CHAPITRE 14 FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

PARTIE 14.1 : FONCTIONS DE CLASSE C^1 ET C^2

REMARQUE 14.1 : Soit $p \in \mathbb{N}^* \setminus \{2\}$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ et $a \in \Omega$ avec $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset \Omega$. Pour tout $k \in [\![1; p]\!]$, on définit la fonction $\varphi_k :]-r; r[\to \mathbb{R}$ par $\forall t \in]-r; r[$, $\varphi_k(t) = f(a+te_k)$.

DÉFINITION 14.1 :
Avec ces notations, si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ et si $v \neq 0 \in \mathbb{R}^p$, on dit que f **admet en a une dérivée selon le vecteur** *v si la fonction $\varphi_{a,v} :]-\alpha; \alpha[\to \mathbb{R}$ définie par $\varphi_{a,v}(t) = f(a + tv)$ admet une dérivée en 0 avec $\alpha = \dfrac{r}{||v||}$.*
Dans ce cas, on note $D_v f(a)$ cette dérivée, qui vaut donc $D_v f(a) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(a + tv) - f(a)}{t}$.

DÉFINITION 14.2 :
Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ et $a \in \Omega$, avec les notations précédentes, on dit que f **admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la k-ième variable** *si φ_k est dérivable en 0 et on définit alors cette dérivée partielle par, notée $\partial_k f(a)$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a)$ par $\partial_k f(a) = \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a) = \varphi_k'(0) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(a + te_k) - f(a)}{t}$.*

REMARQUE 14.2 : Si la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est définie par $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ et $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, on note plutôt $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(a_1 + t, a_2) - f(a_1, a_2)}{t}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(a_1, a_2 + t) - f(a_1, a_2)}{t}$.

DÉFINITION 14.3 :
Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$, on dit que f **est de classe C^1 sur Ω si ses dérivées partielles d'ordre 1 existent et sont continues sur Ω.** *On note $C^1(\Omega, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe C^1 sur Ω.*

DÉFINITION 14.4 :
$f : \Omega \to \mathbb{R}$ *admet en $a \in \Omega$ un* **développement limité d'ordre** 1 *s'il existe $a_1, \cdots, a_p$ tels que :*

$$f(a + h) \underset{0}{=} f(a) + a_1 h_1 + \cdots + a_p h_p + o\big(||h||\big) \text{ si } h = (h_1, \cdots, h_p)$$

ce qui signifie : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall h \in \mathbb{R}^p,\ ||h|| \leqslant \alpha \Longrightarrow \big|f(a + h) - f(a) - a_1 h_1 - \cdots - a_p h_p\big| \leqslant \varepsilon ||h||$.

THÉORÈME ÉNORME 14.1 :
Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^1, alors f admet en tout point $a \in \Omega$ un développement limité :

$$f(a + h) \underset{0}{=} f(a) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \cdots + h_p \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) + o\big(||h||\big) \text{ si } h = (h_1, \cdots, h_p).$$

Une fonction de classe C^1 sur Ω est continue sur Ω.

THÉORÈME 14.2 :
Soit $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ des fonctions de classe C^1 sur Ω telles que g ne s'annule pas sur Ω. Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur I intervalle ouvert avec $f(\Omega) \subset I$, alors $f + g$, λf, fg, f/g et $\varphi \circ f$ sont aussi de classe C^1 sur Ω et on a les relations : $\forall k \in [\![1; p]\!]$, $\dfrac{\partial (f + g)}{\partial x_k} = \dfrac{\partial f}{\partial x_k} + \dfrac{\partial g}{\partial x_k}$, $\dfrac{\partial (\lambda f)}{\partial x_k} = \lambda \dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ **et** $\dfrac{\partial (fg)}{\partial x_k} = g \times \dfrac{\partial f}{\partial x_k} + f \times \dfrac{\partial g}{\partial x_k}$, $\dfrac{\partial (f/g)}{\partial x_k} = \dfrac{1}{g^2}\Big(g \times \dfrac{\partial f}{\partial x_k} - f \times \dfrac{\partial g}{\partial x_k}\Big)$, $\dfrac{\partial (\varphi \circ f)}{\partial x_k} = \dfrac{\partial f}{\partial x_k} \times \big(\varphi' \circ f\big)$.

DÉFINITION 14.5 :
Si $f:\Omega\to\mathbb{R}$ *est de classe* C^1 *et* $a\in\Omega$, *on définit la* **différentielle de** f **en** a, *c'est la forme linéaire* $df(a):\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}$ *vérifiant* $\forall h=(h_1,\cdots,h_p)\in\mathbb{R}^p,\ df(a)(h)=\sum_{k=1}^{p}h_k\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$ *aussi noté* $df(a).h$.

THÉORÈME ÉNORME 14.3 :
Soit $f:\Omega\to\mathbb{R}$ **de classe** C^1 **et** $x=(x_1,\cdots,x_p):I\to\Omega$ **de classe** C^1 **sur un intervalle** I. **Alors la fonction** $g:I\to\mathbb{R}$ **définie par** $g(t)=f\big(x_1(t),\cdots,x_p(t)\big)$ **est de classe** C^1 **sur** I **et :**

$$\forall t\in I,\ g'(t)=x_1'(t)\frac{\partial f}{\partial x_1}\big(x(t)\big)+\cdots+x_p'(t)\frac{\partial f}{\partial x_p}\big(x(t)\big)\ \text{(c'est la règle de la chaîne)}\ .$$

THÉORÈME ÉNORME 14.4 :
Soit Ω **et** Γ **des ouverts de** $\mathbb{R}^2$ **et** $x,y:\Omega\to\mathbb{R}$ **de classe** C^1**,** $f:\Gamma\to\mathbb{R}$ **de classe** C^1**, le tout vérifiant** $\forall(u,v)\in\Omega,\ \big(x(u,v),y(u,v)\big)\in\Gamma$. **Alors** $g:\Omega\to\mathbb{R}$ **définie par** $g(u,v)=f\big(x(u,v),y(u,v)\big)$ **est de classe** C^1 **sur** Ω **avec les relations :**

$$\forall(u,v)\in\Omega,\ \begin{cases}\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) &= \frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\frac{\partial f}{\partial x}\big(x(u,v),y(u,v)\big)+\frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\frac{\partial f}{\partial y}\big(x(u,v),y(u,v)\big)\\ \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) &= \frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\frac{\partial f}{\partial x}\big(x(u,v),y(u,v)\big)+\frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\frac{\partial f}{\partial y}\big(x(u,v),y(u,v)\big)\end{cases}.$$

REMARQUE 14.3 : Comme on écrit (même en mathématique) rarement les points en lesquels on calcule les dérivées partielles, ces deux formules s'abrègent en : $\begin{cases}\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial y}\\ \frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial y}\end{cases}$.

PROPOSITION 14.5 :
Soit C **un ouvert convexe et** $f:C\to\mathbb{R}$ **de classe** C^1**, alors** f **constante** $\iff\Big(\forall k\in[\![1;p]\!],\ \frac{\partial f}{\partial x_k}=0\Big)$.

DÉFINITION 14.6 :
Soit $f:\Omega\to\mathbb{R}$ *de classe* C^1, *pour tout* $a\in\Omega$ *on définit le* **gradient de** f **en** a, *noté* $\nabla f(a)$ *ou* $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f(a)$, *par la relation* $\forall h\in\mathbb{R}^p,\ \forall a\in\Omega,\ df(a).h=df(a)(h)=\big(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f(a)|h\big)=\big(\nabla f(a)|h\big)$.

PROPOSITION 14.6 :
Avec ces notations, $\forall a\in\Omega,\ \nabla f(a)=\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f(a)=\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)e_k$.

REMARQUE 14.4 : La valeur de $df(a).v$ *est la "vitesse de variation de* f *à partir de* a *dans la direction du vecteur* v*", alors* $df_a.v=D_vf(a)=\big(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f(a)\big|v\big)$ *est maximal quand* v *et* $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f(a)$ *sont "positivement" colinéaires ce qui montre que la direction de* $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f(a)$ *est la "ligne de plus grande pente".*

PROPOSITION 14.7 :
Soit $f,g:\Omega\to\mathbb{R}$ **sont de classe** C^1 **sur** Ω**,** g **ne s'annulant pas sur** Ω**,** $\varphi:I\to\mathbb{R}$ **de classe** C^1 **sur** I **intervalle ouvert avec** $f(\Omega)\subset I$ **et** $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$**, alors** $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\lambda f+\mu g)=\lambda\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f+\mu\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,g$, $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(fg)=f\times\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,g+g\times\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f$, $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\big(f/g\big)=\frac{1}{g^2}\big(g\times\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f-f\times\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,g\big)$ **et** $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\varphi\circ f)=\big(\varphi'\circ f\big)\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f$.

DÉFINITION 14.7 :
Soit $f:\Omega\to\mathbb{R}$, $a\in\Omega$ *et* $(i,j)\in[\![1;p]\!]^2$, *on dit que* f *admet en* a **une dérivée partielle d'ordre** 2 **par rapport à** x_j **puis** x_i *si* $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ *existe sur un voisinage de* a *et* $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ *admet une dérivée partielle d'ordre* 1 *par rapport à* x_i *en* a, *on note alors* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)$ *cette valeur. Si* $i=j$, *on note* $\frac{\partial^2 f}{\partial {x_i}^2}(a)$ *à la place de* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_i}(a)$.

DÉFINITION 14.8 :
On dit que f *est de classe* C^2 *sur* Ω *si toutes les dérivées partielles d'ordre* 2 *existent et sont continues sur* Ω*. On note* $C^2(\Omega, \mathbb{R})$ *l'ensemble des fonctions de classe* C^2 *de* Ω *dans* $\mathbb{R}$.

THÉORÈME 14.8 :
Une fonction de classe C^2 est de classe C^1. Soit $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ des fonctions de classe C^2 sur Ω telles que g ne s'annule pas sur Ω. Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur I intervalle ouvert avec $f(\Omega) \subset I$, alors $f+g$, λf, f/g et $\varphi \circ f$ sont de classe C^2 sur Ω et $\forall (i,j) \in [\![1;p]\!]^2$, $\dfrac{\partial^2(f+g)}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}$, $\dfrac{\partial^2(\lambda f)}{\partial x_i \partial x_j} = \lambda \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ mais aussi $\dfrac{\partial^2(fg)}{\partial x_i \partial x_j} = \left(\dfrac{\partial g}{\partial x_i}\right)\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right) + \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)\left(\dfrac{\partial g}{\partial x_j}\right) + g \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + f \dfrac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}$.

REMARQUE 14.5 : $C^2(\Omega, \mathbb{R})$ *est donc une algèbre qui contient les fonctions polynomiales et les fonctions rationnelles (là où elles sont définies).*

THÉORÈME ÉNORME 14.9 :
Si $f : \Omega \to F$ de classe C^2 sur un ouvert Ω alors $\forall (i,j) \in [\![1;p]\!]^2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ (SCHWARZ).

REMARQUE FONDAMENTALE 14.6 : $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *avec* $\varphi(r, \theta) = \big(r\cos\theta, r\sin\theta\big)$ *désigne le passage en polaires (non injectif) ou, si on le veut bijectif,* $\varphi : U = \mathbb{R}_+^* \times]-\pi;\pi[\to P$ *avec* $P = \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\})$ *et toujours* $\varphi(r,\theta) = \big(r\cos\theta, r\sin\theta\big) = (x,y)$ *avec* $r = \sqrt{x^2+y^2}$ *et* $\theta = 2\,\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)$.

• *Si* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*, on pose* $g = f \circ \varphi$ *c'est-à-dire* $g(r,\theta) = f\big(r\cos\theta, r\sin\theta\big)$ *:* f *et* g *représentent la même quantité physique (température, enthalpie, pression,...) mais pas avec les mêmes coordonnées.*

• *Si* f *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$*, alors* g *est aussi de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$ *et* $\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial r} = \cos\theta \dfrac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial \theta} = -r\sin\theta \dfrac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{cases}$.

• *On pose* $e_r = \big(\cos\theta, \sin\theta\big)$ *et* $e_\theta = \big(-\sin\theta, \cos\theta\big)$*, la base* (e_r, e_θ) *est aussi une base orthonormale directe de* $\mathbb{R}^2$*. Si* $(x,y) \neq (0,0) \iff r \neq 0$, $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = \dfrac{\partial g}{\partial r} e_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial g}{\partial \theta} e_\theta$.

PARTIE 14.2 : EXTREMA

DÉFINITION 14.9 :
Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *et* $a \in \Omega$*, on dit que* f *admet en* a *:*

(i) un **maximum local** *(resp. minimum) si* $\exists r > 0$, $\forall x \in B(a,r)$, $f(x) \leqslant f(a)$ *(resp.* $f(x) \geqslant f(a)$*).*
(ii) un **extremum local** *si* f *possède en* a *un maximum local ou un minimum local.*
(iii) un **maximum global** *(resp. minimum) (ou absolu) si* $\forall x \in \Omega$, $f(x) \leqslant f(a)$ *(resp.* $f(x) \geqslant f(a)$*).*
(iv) un **extremum global** *(ou absolu) si* f *possède en* a *un maximum global ou un minimum global.*

PROPOSITION 14.10 :
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur Ω et $a \in \Omega$, si f admet un extremum local en a alors $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(a) = 0$, c'est-à-dire $\forall k \in [\![1;p]\!]$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a) = 0$.

DÉFINITION 14.10 :
Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *est de classe* C^1 *sur* Ω*, on dit* $a \in \Omega$ *est un* **point critique** *de* f *si* $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(a) = 0$.

REMARQUE 14.7 : • *Cette propriété est fausse sur un ensemble non ouvert.*
• *Ainsi, avec ces conditions :* $\big(f$ *admet un extremum local en* $a\big) \Longrightarrow \big(a$ *est un point critique de* $f\big)$.
• *La réciproque de cette implication est fausse.*

THÉORÈME 14.11 :
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et a un point critique de f :
(i) **si $H_f(a) \in S_p^{++}(\mathbb{R})$ (resp. $S_p^{--}(\mathbb{R})$), f admet en a un minimum (resp. maximum) local.**
(ii) **si $H_f(a) \notin S_p^{+}(\mathbb{R})$ (resp. $S_p^{-}(\mathbb{R})$), f n'a pas de minimum (resp. maximum) local en a.**
(iii) **si $H_f(a) \in \left(S_p^{+}(\mathbb{R}) \setminus S_p^{++}(\mathbb{R})\right) \cup \left(S_p^{-}(\mathbb{R}) \setminus S_p^{--}(\mathbb{R})\right)$, alors on ne peut rien dire.**

REMARQUE 14.8 : Supposons que $f : \Omega \to \mathbb{R}$ (avec Ω ouvert de $\mathbb{R}^2$) admette un point critique en $a \in \Omega$, avec les notations de MONGE *: $r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)$, $s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)$, $t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$:*
(i) Si $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$ (resp. $r < 0$), f admet en a un minimum (resp. maximum) local,
(ii) Si $rt - s^2 < 0$, f admet en a un point selle (ou point col).
(iii) Si $rt - s^2 = 0$, on ne peut pas conclure.

PARTIE 14.3 : COURBES ET SURFACES

DÉFINITION 14.11 :
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^1, la courbe Γ définie par : $\Gamma = \left\{(x,y) \in \Omega \mid f(x,y) = 0\right\}$ (équation implicite), on dit qu'un point $M_0 = (x_0, y_0)$ de Γ est **un point régulier** *si $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(M_0) \neq 0$.*

REMARQUE 14.9 : Avec les notations précédentes, on admet l'existence d'un paramétrage local de classe C^1 de la courbe Γ au voisinage d'un point régulier ; si $f(x_0, y_0) = 0$ et $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x_0, y_0) \neq 0$ alors il existe $r > 0$ tel que $B(M_0, r) \subset \Omega$, un intervalle ouvert I contenant 0, $x : I \to \mathbb{R}$ et $y : I \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que $\big(x(0), y(0)\big) = M_0$ et $\forall (x,y) \in B(M_0, r)$, $(x,y) \in \Gamma \iff \big(\exists t \in I,\ x = x(t)$ et $y = y(t)\big)$.

PROPOSITION 14.12 :
En un point où il est non nul, le gradient est orthogonal aux lignes de niveau $f(x,y) = \lambda$ et orienté dans le sens des valeurs croissantes de f.

REMARQUE 14.10 : Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(M_0)$ est donc un vecteur normal à la tangente à Γ au point M_0 ce qui fait que la tangente à Γ en M_0 a pour équation : $(x - x_0)\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.

DÉFINITION 14.12 :
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^3$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^1, la surface S telle que : $S = \left\{(x,y,z) \in \Omega \mid f(x,y,z) = 0\right\}$ (équation implicite), on dit qu'un point $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ de S est **un point régulier** *si $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(M_0) \neq 0$.*

DÉFINITION 14.13 :
Soit une surface S d'équation $f(x,y,z) = 0$ avec $f : \Omega \to \mathbb{R}$ C^1, I un intervalle, $x, y, z : I \to \mathbb{R}$ C^1 telles que $\forall t \in I$, $\big(x(t), y(t), z(t)\big) \in S$. On dit que **la courbe $\Gamma = \left\{\big(x(t), y(t), z(t)\big) \mid t \in I\right\}$ est tracée sur S.**

REMARQUE 14.11 : Soit une surface S : $f(x,y,z) = 0$ avec $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Les tangentes en un point M_0 régulier de S aux courbes de classe C^1 tracées sur S sont orthogonales à $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(M_0)$.

DÉFINITION 14.14 :
Le plan tangent à la surface S en M_0 régulier est le plan orthogonal à $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(M_0)$ passant par M_0.

PROPOSITION 14.13 :
Ce plan tangent à S en M_0 point régulier a pour équation :
$$(x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0)\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0$$