CHAPITRE 15

FONCTIONS VECTORIELLES

DÉFINITION 15.1 :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $t_0 \in I$, si la fonction $h \in \mathbb{R} \mapsto \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}$ admet une limite en 0, on dit que f est **dérivable en t_0** . Alors, on note $f'(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} \in \mathbb{R}^n$ le **vecteur dérivé** de f en t_0 .

REMARQUE 15.1 : f est dérivable en t_0 si et seulement si f admet un $DL_1(t_0)$, c'est-à-dire si et seulement s'il existe un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(t_0 + h) = f(t_0) + hv + o(h)$; dans ce cas on a $f'(t_0) = v$.

PROPOSITION 15.1 :

Soit $t_0 \in I$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction et $f_1, \dots, f_n$ les fonctions de I dans $\mathbb{R}$ telles que $\forall t \in I$, $f(t) = \sum_{k=1}^n f_k(t)e_k$. Alors f est dérivable en t_0 si et seulement si $f_1, \dots, f_n$ sont dérivables en t_0 . Dans ce cas, on a $f'(t_0) = \sum_{k=1}^n f'_k(t_0)e_k$.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $t_0 \in I$, si f est dérivable en t_0 alors f est continue en t_0 .

REMARQUE 15.2 :

- Une fonction vectorielle $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dérivable en un point t_0 si et seulement si toutes les **fonctions coordonnées** le sont (et ceci dans n'importe quelle base).
- Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ et $t_0 \in I$, alors f est dérivable en t_0 si et seulement si $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ le sont. Dans ce cas, $f'(t_0) = \operatorname{Re}(f)'(t_0) + i \operatorname{Im}(f)'(t_0)$. De plus $\bar{f}$ est dérivable en t_0 et $(\bar{f})'(t_0) = \overline{f'(t_0)}$.

DÉFINITION 15.2 :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$.

- On dit que f est **dérivable sur I** si f est dérivable en tout point t_0 de I . Dans ce cas, on note $f' : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ la **fonction dérivée** de f qui à $t_0 \in I$ associe $f'(t_0)$.
- On dit que f est de **classe C^1 sur I** si f est dérivable sur I et si f' est continue sur I . On note $C^1(I, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions de classe C^1 sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

PROPOSITION 15.2 :

$C^1(I, \mathbb{R}^n)$ est un sous-espace de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R}^n)$ et : $\forall (f, g) \in C^1(I, \mathbb{R}^n)^2$, $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$.

PROPOSITION 15.3 :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ et $f_1, \dots, f_n$ les fonctions coordonnées de f dans $\mathcal{B}$: $f = \sum_{k=1}^n f_k e_k$. Alors $f \in C^1(I, \mathbb{R}^n) \iff (f_1, \dots, f_n) \in C^1(I, \mathbb{R})^n$. Dans ce cas, $f' = \sum_{k=1}^n f'_k e_k$.

En particulier : $f \in C^1(I, \mathbb{C}) \iff (\operatorname{Re}(f), \operatorname{Im}(f)) \in C^1(I, \mathbb{R})^2$.

Dans ce cas $f' = \operatorname{Re}(f)' + i \operatorname{Im}(f)'$ et, de plus, $\bar{f} \in C^1(I, \mathbb{C})$ et $(\bar{f})' = \overline{f'}$.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$. Si $f \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ alors $L \circ f \in C^1(I, \mathbb{R}^p)$ et $(L \circ f)' = L \circ f'$.

PROPOSITION 15.4 :

Soit $f \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$, $g \in C^1(I, \mathbb{R}^m)$ et $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ bilinéaire, alors la fonction $B(f, g) : I \rightarrow \mathbb{R}^p$ définie par $B(f, g)(t) = B(f(t), g(t))$ est de classe C^1 sur I et $B(f, g)' = B(f', g) + B(f, g')$.

Soit $(m, n, p) \in (\mathbb{N}^*)^3$ et, pour tout $k \in \llbracket 1; p \rrbracket$, des $f_k : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 sur un intervalle I . Si $M : (\mathbb{R}^n)^p \rightarrow \mathbb{R}^m$ est multilinéaire, alors $g : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ définie par $g(t) = M(f_1(t), \dots, f_p(t))$ est C^1 et $\forall t \in I$, $g'(t) = M(f'_1(t), f_2(t), \dots, f_p(t)) + M(f_1(t), f'_2(t), f_3(t), \dots, f_p(t)) + \dots + M(f_1(t), \dots, f_{p-1}(t), f'_p(t))$.

PROPOSITION 15.5 :

Pour le produit scalaire, la norme euclidienne canonique dans $\mathbb{R}^n$ et le déterminant :

(i) Si $(f, g) \in C^1(I, \mathbb{R}^n)^2$ alors $(f|g) \in C^1(I, \mathbb{R})$ et $(f|g)' = (f'|g) + (f|g')$.

(ii) Si $f \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ est telle que $\forall t \in I$, $f(t) \neq 0$ alors $\|f\| \in C^1(I, \mathbb{R})$ et $\|f\|' = \frac{(f|f)'}{\|f\|}$.

Soit $M : I \rightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de classe C^1 avec $M(t) = (C_j(t))_{1 \leq j \leq p}$ (C_j est la fonction de t qui renvoie la j -ième colonne de la matrice $M(t)$). Alors $\det(M) : I \rightarrow \mathbb{K}$ est C^1 et, sur I , on a la relation

(iii) $(\det(M))' = \sum_{j=1}^p \det(C_1(t), \dots, C_{j-1}(t), C'_j(t), C_{j+1}(t), \dots, C_p(t))$.

PROPOSITION 15.6 :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 et $\varphi : J \rightarrow I$ de classe C^1 .

Alors $f \circ \varphi$ est de classe C^1 et on a : $\forall u \in I$, $(f \circ \varphi)'(u) = \varphi'(u)f'(f(u))$.

DÉFINITION 15.3 :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, on note $f^{(0)} = f$ et pour $p \in \mathbb{N}$ et si $f^{(p)}$ est dérivable sur I , la fonction $f^{(p+1)} = (f^{(p)})'$: cette fonction $f^{(p)}$ est alors la **dérivée p -ième de f sur I** .

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on dit que f est de **classe C^p sur I** si f' est de classe C^{p-1} sur I .

On note $C^p(I, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions de classe C^p sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

On dit que f est de **classe C^∞ sur I** si f est de classe C^p sur I pour tout entier $p \in \mathbb{N}$.

On note $C^\infty(I, \mathbb{R}^n) = \bigcap_{p \in \mathbb{N}} C^p(I, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur I et à valeurs dans F .

REMARQUE 15.3 : • f de classe C^2 si f' existe et est de classe C^1 donc si f'' existe et est continue.

• Par récurrence, pour $p \in \mathbb{N}^*$: (f de classe C^p sur I) $\iff$ ($f^{(p)}$ existe et est continue sur I).

PROPOSITION 15.7 :

Pour tout $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $C^p(I, \mathbb{R}^n)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R}^n)$ et :

$$\forall (f, g) \in C^p(I, \mathbb{R}^n)^2, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, (\alpha f + \beta g)^{(p)} = \alpha f^{(p)} + \beta g^{(p)}.$$

Soit $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^p sur I et $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^p .

Alors $\lambda f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe C^p et si $p \in \mathbb{N}$: $(\lambda f)^{(p)} = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \lambda^{(k)} f^{(p-k)}$ (formule de LEIBNIZ).

Soit $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^p , $\varphi : J \rightarrow I$ de classe C^p . Alors $f \circ \varphi$ est de classe C^p .