CHAPITRE 15
FONCTIONS VECTORIELLES

⊙ Contrairement au chapitre précédent, plutôt que d'étudier les fonctions scalaires définies dans l'espace ou le plan (les fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$) qui représentent la pression, la température, etc.... on s'intéresse ici aux fonctions vectorielles de la variable réelle (les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^p$) qui représentent une trajectoire d'un point dans le plan ou l'espace, ce qui va donner lieu à l'étude de la représentation des courbes paramétrées (par le temps par exemple).

Les récents changements de programme en PSI ont vu la baisse conséquente des notions de géométrie, on a ainsi vu disparaître l'étude des coniques, des quadriques, des abscisses curvilignes des courbes, des repères de Frénet et des rayons de courbure dont on avait besoin pour la découpe à la fraise de plaque de métal par exemple par l'intermédiaire des courbes parallèles. Il ne reste même plus les courbes définies en coordonnées cartésiennes avec leurs tangentes, asymptotes, points multiples, point d'inflexion, longueur.

Il existe un nombre incalculable de courbes planes ou gauches (dans l'espace) : elles ont été répertoriées depuis longtemps, qu'elles soient issues des domaines de la caustique (enveloppes de rayons lumineux issus d'une réflexion par exemple) comme la cardioïde qu'on peut voir dans son bol au petit déjeuner, de la mécanique comme les ellipses ou hyperboles qui sont les trajectoires des planètes, de la dynamique comme la cycloïde qui est la courbe sur laquelle lâcher un point matériel pour qu'il aille par la gravité le plus vite d'un point à un autre, etc...

Ces courbes possèdent des noms mystérieux traduisant leur origine ou leur forme : trèfle équilatère, lemniscate, nœud de papillon, cissoïde, deltoïde, strophoïde, trifolium,.... et ce n'est qu'un tout petit aperçu ! D'ailleurs vous pouvez admirer ces arcs et leurs origines et caractéristiques géométriques sur le site https://mathcurve.com/ du confrère Robert Ferréol.

I désignera dans ce chapitre un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points distincts.

TABLE DES MATIÈRES

PROGRAMME

L'objectif de cette section est de généraliser aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ la notion de dérivée d'une fonction numérique.

Toutes les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

2 : Dérivabilité des fonctions vectorielles

Contenus	Capacités & Commentaires
Interprétation d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ comme courbe paramétrée.	L'étude et le tracé d'arcs paramétrés sont hors programme.
Dérivabilité en un point. Dérivabilité sur un intervalle.	Définition par le taux d'accroissement, caractérisation par le développement limité d'ordre un. Traduction par les coordonnées dans la base canonique. Interprétation cinématique.
Combinaison linéaire de fonctions dérivables.	
Dérivée de $L(f)$, où L est linéaire et f à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.	
Dérivée de $B(f, g)$, où B est bilinéaire, de $M(f_1, \ldots, f_p)$, où M est p-linéaire, et f, g, $f_1, \ldots, f_p$ à valeurs vectorielles.	La démonstration n'est pas exigible. Application au produit scalaire et au déterminant.
Dérivée de $f \circ \varphi$ où φ est à valeurs réelles et f à valeurs vectorielles.	
Fonction de classe C^k, de C^∞ sur un intervalle.	

PARTIE 15.1 : DÉFINITION DE LA DÉRIVATION

15.1.1 : Dérivée ponctuelle

DÉFINITION 15.1 :
Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$ *et* $t_0 \in I$, *si la fonction* $h \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$ *admet une limite en* 0, *on dit que* f *est* **dérivable en** t_0. *Alors, on note* $f'(t_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h} \in \mathbb{R}^n$ *le* **vecteur dérivé** *de* f *en* t_0.

REMARQUE 15.1 :

- f *est dérivable en* t_0 *si et seulement si la fonction "taux d'accroissement"* $\tau_{t_0} : I \backslash \{t_0\} \to \mathbb{R}^n$ *définie par* $\tau_{t_0}(t) = \dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ *est prolongeable par continuité en* t_0.
- f *est dérivable en* t_0 *si et seulement si* f *admet un* $DL_1(t_0)$, *c'est-à-dire si et seulement s'il existe un vecteur* $v \in \mathbb{R}^n$ *tel que* $f(t_0+h) \underset{0}{=} f(t_0) + hv + o(h)$ *; dans ce cas on a* $f'(t_0) = v$.
- *Interprétation géométrique : si* $f'(t_0) \neq 0$ *alors le vecteur* $f'(t_0)$ *dirige la tangente au point de paramètre* t_0 *de la courbe paramétrée par* $t \mapsto f(t)$ *(le point est régulier).*
- *Interprétation cinématique : si* $f(t)$ *repère la position d'un mobile à l'instant* t *alors* $f'(t_0)$ *est le* **vecteur vitesse instantané** *à l'instant* t_0.

DÉMONSTRATION : Si f est dérivable en t_0, en notant $v = f'(t_0)$, alors $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$ s'écrit aussi $\dfrac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h} \underset{0}{=} v + o(1)$ ou encore, en multipliant par h, $f(t_0+h) - f(t_0) \underset{0}{=} hv + o(h)$ comme attendu. Réciproquement, s'il existe $v \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(t_0+h) \underset{0}{=} f(t_0) + hv + o(h)$, alors en divisant par h, on a $\dfrac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h} \underset{0}{=} v + o(1)$ d'où $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h} = v$ et f est dérivable en t_0 avec $f'(t_0) = v$.

PROPOSITION SUR LA DÉRIVABILITÉ D'UNE FONCTION VECTORIELLE SUR SES FONCTIONS COORDONNÉES 15.1 :
Soit $t_0 \in I$, $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ **une base de** $\mathbb{R}^n$, $f : I \to \mathbb{R}^n$ **une fonction et** $f_1, \cdots, f_n$ **les fonctions de** I **dans** $\mathbb{R}$ **telles que** $\forall t \in I,\ f(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(t) e_k$. **Alors** f **est dérivable en** t_0 **si et seulement si** $f_1, \cdots, f_n$ **sont dérivables en** t_0. **Dans ce cas, on a** $f'(t_0) = \sum\limits_{k=1}^{n} f'_k(t_0) e_k$.

DÉMONSTRATION : Il suffit d'écrire, pour $t \in I \setminus \{t_0\}$, $\dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{f_k(t)-f_k(t_0)}{t-t_0} e_k$ (en regroupant les termes) et on se rappelle que, puisqu'on est en dimension finie, $t \mapsto \dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ admet une limite finie en t_0 si et seulement si toutes ses fonctions coordonnées $t \mapsto \dfrac{f_k(t)-f_k(t_0)}{t-t_0}$ admettent des limites finies en t_0. Dans ce cas, on aura bien $f'(t_0) = \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} = \sum\limits_{k=1}^{n} \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{f_k(t)-f_k(t_0)}{t-t_0} e_k = \sum\limits_{k=1}^{n} f'_k(t_0) e_k$ par définition.

REMARQUE 15.2 :

- *Une fonction vectorielle* $f : I \to \mathbb{R}^n$ *est dérivable en un point* t_0 *si et seulement si toutes les* **fonctions coordonnées** *le sont (et ceci dans n'importe quelle base).*
- *Soit* $f : I \to \mathbb{C}$ *et* $t_0 \in I$, *alors* f *est dérivable en* t_0 *si et seulement si* $\mathrm{Re}(f)$ *et* $\mathrm{Im}(f)$ *le sont.*

Dans ce cas, $f'(t_0) = \mathrm{Re}(f)'(t_0) + i\,\mathrm{Im}(f)'(t_0)$. *De plus* $\overline{f}$ *est dérivable en* t_0 *et* $(\overline{f})'(t_0) = \overline{f'(t_0)}$.

- *C'est un cas particulier de la proposition précédente en dimension 2.*

DÉMONSTRATION : Pour les fonctions à valeurs complexes, il suffit d'écrire, comme précédemment, pour $t \neq t_0$, $\dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} = \left(\dfrac{\mathrm{Re}(f)(t)-\mathrm{Re}(f)(t_0)}{t-t_0}\right) + i\left(\dfrac{\mathrm{Im}(f)(t)-\mathrm{Im}(f)(t_0)}{t-t_0}\right)$; on sait qu'une telle fonction admet une limite finie en t_0 si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire admettent des limites finies en t_0, ce qui donne l'équivalence de la remarque et, en cas de convergence, $f'(t_0) = \mathrm{Re}(f)'(t_0) + i\,\mathrm{Im}(f)'(t_0)$.
Même chose avec $\overline{f}$ si on écrit $\dfrac{\overline{f}(t)-\overline{f}(t_0)}{t-t_0} = \left(\dfrac{\mathrm{Re}(f)(t)-\mathrm{Re}(f)(t_0)}{t-t_0}\right) - i\left(\dfrac{\mathrm{Im}(f)(t)-\mathrm{Im}(f)(t_0)}{t-t_0}\right)$.

PROPOSITION SUR LA CONTINUITÉ D'UNE FONCTION DÉRIVABLE 15.2 :
Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$ et $t_0 \in I$, si f est dérivable en t_0 alors f est continue en t_0.

DÉMONSTRATION : Si f est dérivable en t_0, en notant comme avant $\tau_{t_0}(t) = \dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$, on a pour $t \neq t_0$, $f(t) = f(t_0) + (t-t_0)\tau_{t_0}(t)$ donc, comme $\lim\limits_{t\to t_0} \tau_{t_0}(t) = f'(t_0)$ donc $\lim\limits_{t\to t_0}(t-t_0)\tau_{t_0}(t) = \overrightarrow{0}$ et $\lim\limits_{t\to t_0} f(t) = f(t_0)$ ce qui prouve la continuité de f en t_0.

DÉFINITION 15.2 :

Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$ *et* $t_0 \in I$.

- *Si* $t_0 \neq \mathrm{Sup}(I)$, *on dit que* f *est* **dérivable à droite en** t_0 *si* $f|_{I\cap[t_0;+\infty[}$ *est dérivable en* t_0, *c'est-à-dire si la fonction* $h \mapsto \dfrac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$ *admet une limite quand* h *tend vers* 0 *avec* $h > 0$.

Dans ce cas, on note $f'_d(t_0) = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$ *le* **vecteur dérivé de f à droite en** t_0.

- *Si* $t_0 \neq \mathrm{Inf}(I)$, *on dit que* f *est* **dérivable à gauche en** t_0 *si* $f|_{I\cap]-\infty;t_0]}$ *est dérivable en* t_0, *c'est-à-dire si la fonction* $h \mapsto \dfrac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$ *admet une limite quand* h *tend vers* 0 *avec* $h < 0$.

Dans ce cas, on note $f'_g(t_0) = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$ *le* **vecteur dérivé de f à gauche en** t_0.

PROPOSITION SUR UNE CONDITION NÉCESSAIRE ET SUFFISANTE DE DÉRIVABILITÉ SUR LA DÉRIVABILITÉ À GAUCHE ET À DROITE 15.3 :
Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$ et t_0 à l'intérieur de I, alors f est dérivable en t_0 si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite en t_0 et si $f'_g(t_0) = f'_d(t_0)$.

15.1.2 : Fonctions dérivables, fonctions de classe C^1

DÉFINITION 15.3 :
Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$.

- *On dit que* f *est* **dérivable sur** I *si* f *est dérivable en tout point* t_0 *de* I.

  Dans ce cas, on note $f' : I \to \mathbb{R}^n$ *la* **fonction dérivée de** f *qui à* $t_0 \in I$ *associe* $f'(t_0)$.

- *On dit que* f *est* **de classe** C^1 **sur** I *si* f *est dérivable sur* I *et si* f' *est continue sur* I.

  On note $C^1(I, \mathbb{R}^n)$ *l'ensemble des fonctions de classe* C^1 *sur* I *et à valeurs dans* $\mathbb{R}^n$.

<u>*REMARQUE 15.3*</u> *: On a l'inclusion stricte* $C^1(I, \mathbb{R}^n) \subset C^0(I, \mathbb{R}^n)$.

<u>***EXEMPLE 15.1***</u> ***:*** Soit un vecteur non nul $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$, la fonction vectorielle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ définie par $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = |t|\overrightarrow{v}$ est continue en 0 et pourtant elle n'est pas dérivable en 0.

<u>DÉMONSTRATION</u> : Pour $t < 0$, on a $\dfrac{f(t)-f(0)}{t-0} = \dfrac{|t|\overrightarrow{v} - \overrightarrow{0}}{t-0} = -\overrightarrow{v}$ car $|t| = -t$ donc $f'_g(0) = -\overrightarrow{v}$.
Pour $t > 0$, on a $\dfrac{f(t)-f(0)}{t-0} = \dfrac{|t|\overrightarrow{v} - \overrightarrow{0}}{t-0} = \overrightarrow{v}$ car $|t| = t$ donc $f'_d(0) = \overrightarrow{v}$.
Comme $f'_g(0) \neq f'_d(0)$, f n'est par dérivable en 0 alors qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$ par opérations.

PROPOSITION SUR LA LINÉARITÉ DE LA DÉRIVÉE 15.4 :
$C^1(I, \mathbb{R}^n)$ **est un sous-espace de** $\mathcal{F}(I, \mathbb{R}^n)$ **et :** $\forall (f, g) \in C^1(I, \mathbb{R}^n)^2,\ \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ (\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$.

<u>DÉMONSTRATION</u> : <u>Méthode 1</u> : pour $t_0 \in I$ et $t \in I$ tel que $t \neq t_0$, on peut transformer le taux d'accroissement $\dfrac{(\alpha f+\beta g)(t) - (\alpha f + \beta g)(t_0)}{t-t_0} = \alpha \dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} + \beta \dfrac{g(t)-g(t_0)}{t-t_0}$ et, quand t tend vers t_0, la limite existe par hypothèse puisque f et g sont de classe C^1 sur I et $(\alpha f + \beta g)'(t_0) = \alpha f'(t_0) + \beta g'(t_0)$ ce qui montre la relation fonctionnelle $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$. Comme f' et g' sont continues par hypothèse, $(\alpha f + \beta g)'$ est continue par combinaison linéaire donc $\alpha f +\ bg$ est de classe C^1 par définition.
<u>Méthode 2</u> (en anticipant sur la proposition suivante) : on décompose les fonctions f et g dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ en $\forall t \in I,\ f(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(t)e_k$ et $g(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} g_k(t)e_k$. Ainsi, pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on a $\forall t \in I,\ (\alpha f + \beta g)(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} (\alpha f_k(t) + \beta g_k(t))e_k$ et les fonctions $\alpha f_k + \beta g_k$ sont de classe C^1 par combinaison linéaire de telles fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ d'après la proposition 15.5, celle-ci montre aussi qu'alors $\alpha f + \beta g$ est de classe C^1 avec $(\alpha f + \beta g)'(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} (\alpha f'_k(t) + \beta g'_k(t))e_k = \alpha \sum\limits_{k=1}^{n} f'_k(t)e_k + \beta \sum\limits_{k=1}^{n} g'_k(t))e_k = \alpha f'(t) + \beta g'(t)$.

PROPOSITION DE PASSAGE PAR LES COORDONNÉES 15.5 :
Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$**, et** $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ **une base de** $\mathbb{R}^n$**, et** $f_1, \cdots, f_n$ **les fonctions coordonnées de** f **dans** $\mathcal{B}$**, c'est-à-dire** $\forall t \in I,\ f(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(t)e_k$ **:**

$$f \in C^1(I, \mathbb{R}^n) \Longleftrightarrow (f_1, \cdots, f_n) \in C^1(I, \mathbb{R})^n \text{ ; dans ce cas, } f' = \sum_{k=1}^{n} f'_k e_k.$$

En particulier : $f \in C^1(I, \mathbb{C}) \Longleftrightarrow \big(\mathrm{Re}\,(f), \mathrm{Im}(f)\big) \in C^1(I, \mathbb{R})^2$.

Dans ce cas $f' = \mathrm{Re}\,(f)' + i\,\mathrm{Im}(f)'$ **et, de plus,** $\overline{f} \in C^1(I, \mathbb{C})$ **et** $(\overline{f})' = \overline{f'}$.

DÉMONSTRATION : • D'après la proposition 15.1, $f = \sum_{k=1}^{n} f_k e_k$ est dérivable sur I si et seulement si toutes ses coordonnées f_k le sont. Dans ce cas, on a $f' = \sum_{k=1}^{n} f'_k e_k$. Or, on a vu dans le chapitre des espaces vectoriels normés que f' est continue si et seulement si toutes les fonctions f'_k le sont, ce qui montre que f est de classe C^1 sur I si et seulement si toutes les fonctions coordonnées f_k sont elles-mêmes de classe C^1 sur I.
• D'après la remarque 15.2, $f = \mathrm{Re}\,(f) + i\,\mathrm{Im}(f)$ est dérivable sur I si et seulement si $\mathrm{Re}\,(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont et on a $f' = (\mathrm{Re}\,(f))' + i(\mathrm{Im}(f))'$. Une fonction complexe est continue si et seulement si ses parties réelle et imaginaire sont continues. Ainsi, f est de classe C^1 sur I si et seulement si $\mathrm{Re}\,(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont de classe C^1 sur I.
• Comme $\overline{f} = \mathrm{Re}\,(f) - i\,\mathrm{Im}(f)$ et que $\mathrm{Im}(f)$ est de classe C^1 sur I si et seulement si $-\mathrm{Im}(f)$ l'est, f est de classe C^1 sur I si et seulement si $\overline{f}$ l'est et on a alors $(\overline{f})' = \mathrm{Re}\,(f)' - i\,\mathrm{Im}(f)' = \overline{f'}$.

REMARQUE 15.4 : Cela nous permet de nous ramener à des fonctions numériques de I *dans* $\mathbb{R}$.

PARTIE 15.2 : PROPRIÉTÉS DE LA DÉRIVATION

15.2.1 : Composées

PROPOSITION SUR LA RELATION ENTRE DÉRIVABILITÉ ET COMPOSÉE À GAUCHE PAR UNE APPLICATION LINÉAIRE 15.6 :
Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$ **et** $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$**. Si** $f \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ **alors** $L \circ f \in C^1(I, \mathbb{R}^p)$ **et** $(L \circ f)' = L \circ f'$**.**

DÉMONSTRATION : Méthode 1 : soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \cdots, e'_p)$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et de $\mathbb{R}^p$, on pose $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(L) = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ et on décompose f dans $\mathcal{B}$ en $f(t) = \sum_{j=1}^{n} f_j(t) e_j$, alors $L \circ f(t) = \sum_{j=1}^{n} f_j(t) \sum_{i=1}^{p} a_{i,j} e'_i = \sum_{i=1}^{p} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} f_j(t) \Big) e'_i = \sum_{i=1}^{p} g_i(t) e'_i$ en posant $g_i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} f_j(t)$. Or, d'après la proposition 1.5, toutes les f_j sont de classe C^1 sur I car f l'est, ainsi, avec cette même proposition, $L \circ f$ est de classe C^1 sur I car toutes les g_i sont de classe C^1 par combinaison linéaire de telles fonctions. De plus, on a $(L \circ f)'(t) = \sum_{i=1}^{p} g'_i(t) e'_i = \sum_{i=1}^{p} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} f'_j(t) \Big) e'_i = \sum_{j=1}^{n} f'_j(t) \sum_{i=1}^{p} a_{i,j} e'_i = L(f'(t)) = L \circ f'(t)$.
Méthode 2 : pour $t_0 \in I$ et $t \in I$ tel que $t \neq t_0$, on écrit $\dfrac{L(f(t)) - L(f(t_0))}{t - t_0} = L\Big(\dfrac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}\Big)$. Par hypothèse, f est de classe C^1 donc $\lim_{t \to t_0} \dfrac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = f'(t_0)$ et la fonction L est continue car linéaire en dimension finie. Par composée, on obtient la limite $\lim_{t \to t_0} \dfrac{L(f(t)) - L(f(t_0))}{t - t_0} = L(f'(t_0))$ ce qui garantit la dérivabilité de $L \circ f$ sur I et que $(L \circ f)' = L(f')$. De plus, comme L et f' sont continues, $L \circ f$ est continue par composée d'où l'aspect C^1 de $L \circ f$ sur I.

REMARQUE 15.5 : • Si $v \in \mathbb{R}^p$ *est fixé et* $f \in C^1(I, \mathbb{R})$*, alors la dérivée de* $t \mapsto f(t)v$ *est* $t \mapsto f'(t)v$.

• *On a déjà utilisé ce résultat sur les systèmes différentiels où on avait* $(PX)' = PX'$.

DÉMONSTRATION : • Il suffit d'appliquer la proposition précédente avec $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ définie par $L(u) = u.v$ qui est clairement linéaire et on a, puisque f est supposée de classe C^1 sur I, $(L(f))' = L(f')$ ce qui s'écrit aussi, avec abus de notation habituel, $\forall t \in I,\ (f(t)v)' = f'(t)v$.
• Même chose, en identifiant $\mathbb{R}^p$ et $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, avec $L : U \mapsto PU$ qui est linéaire et si $X : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ de classe C^1 sur I, alors $t \mapsto PX(t)$ est de classe C^1 sur I et, avec abus de notation classique, $(PX(t))' = PX'(t)$.

PROPOSITION RELIANT DÉRIVABILITÉ ET APPLICATION BILINÉAIRE 15.7 :
Soit $f \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$**,** $g \in C^1(I, \mathbb{R}^m)$ **et** $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ **bilinéaire, alors la fonction** $B(f,g) : I \to \mathbb{R}^p$ **définie par** $B(f,g)(t) = B\big(f(t), g(t)\big)$ **est de classe** C^1 **sur** I **et** $B(f,g)' = B(f',g) + B(f,g')$**.**

<u>DÉMONSTRATION</u> : <u>Méthode 1</u> : soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \cdots, e'_m)$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ respectivement, alors pour $t \in I$, si on décompose $f(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t)e_i$ et $g(t) = \sum_{j=1}^{m} g_j(t)e'_j$, on a par bilinéarité de B : $B\big(f(t), g(t)\big) = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant m}} f_i(t)g_j(t)B(e_i, e'_j)$. Or, en appliquant la proposition 15.6 avec l'application linéaire $L_{i,j} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ telle que $L_{i,j}(t) = tB(e_i, e'_j)$ (voir la remarque 15.5), toutes les fonctions $h_{i,j} : t \in I \mapsto f_i(t)g_j(t)B(e_i, e'_j)$ sont C^1 (car f_i et g_j le sont d'après la proposition 15.5) sur I avec $h'_{i,j}(t) = (f'_i(t)g_j(t) + f_i(t)g'_j(t))B(e_i, e'_j)$ donc, $B(f,g)$ est de classe C^1 par combinaison linéaire de telles fonctions et on a $\forall t \in I,\ B(f,g)'(t) = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant m}} (f'_i(t)g_j(t) + f_i(t)g'_j(t))B(e_i, e'_j)$ qu'on réécrit $B(f,g)'(t) = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant m}} f'_i(t)g_j(t)B(e_i, e'_j) + \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant m}} f_i(t)g'_j(t)B(e_i, e'_j)$ et, à nouveau par bilinéarité de B : $B(f,g)'(t) = B\Big(\sum_{i=1}^{n} f'_i(t)e_i, \sum_{j=1}^{m} g_j(t)e'_j\Big) + B\Big(\sum_{i=1}^{n} f_i(t)e_i, \sum_{j=1}^{m} g'_j(t)e'_j\Big) = B(f'(t), g(t)) + B(f(t), g'(t))$.

<u>Méthode 2</u> : pour $t_0 \in I$ et $t \in I$ tel que $t \neq t_0$, on écrit le taux d'accroissement suivant en intercalant le vecteur $B\big(f(t_0), g(t)\big)$: $\dfrac{B(f(t), g(t)) - B(f(t_0), g(t_0))}{t - t_0} = B\Big(\dfrac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}, g(t)\Big) + B\Big(f(t_0), \dfrac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0}\Big)$.
Puisque f et g sont dérivables (donc continues) en t_0 et que B est continue car bilinéaire en dimension finie, quand t tend vers t_0, on a $B(f,g)'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \dfrac{B(f(t), g(t)) - B(f(t_0), g(t_0))}{t - t_0} = B(f'(t_0), g(t_0)) + B(f(t_0), g'(t_0))$ d'où la relation de la proposition. De plus, comme f, f', g, g', B sont continues sur leurs ensembles de définition, $B(f,g)'$ l'est aussi ce qui garantit l'aspect C^1 de $B(f,g)$.
Cette démonstration n'est pas exigible.

PROPOSITION RELIANT DÉRIVABILITÉ ET APPLICATION MULTILINÉAIRE 15.8 :
Soit $(m,n,p) \in (\mathbb{N}^*)^3$ **et, pour** $k \in [\![1;p]\!]$**, des applications** $f_k : I \to \mathbb{R}^n$ **de classe** C^1 **sur un intervalle** I**. Si** $M : (\mathbb{R}^n)^p \to \mathbb{R}^m$ **une application multilinéaire. Alors l'application** $g : I \to \mathbb{R}^m$ **définie par** $g(t) = M(f_1(t), \cdots, f_p(t))$ **est de classe** C^1 **et on a**
$\forall t \in I,\ g'(t) = M(f'_1(t), f_2(t), \cdots, f_p(t)) + M(f_1(t), f'_2(t), f_3(t), \cdots, f_p(t)) + \cdots + M(f_1(t), \cdots, f_{p-1}(t), f'_p(t))$.

<u>DÉMONSTRATION</u> : non exigible.

PROPOSITION SUR PRODUIT SCALAIRE, NORME, DÉTERMINANT 15.9 :
Avec le produit scalaire et la norme euclidienne canonique dans $\mathbb{R}^n$ **:**

(i) Si $(f,g) \in C^1(I, \mathbb{R}^n)^2$ **alors** $(f|g) \in C^1(I, \mathbb{R})$ **et** $(f|g)' = (f'|g) + (f|g')$**.**

(ii) Si $f \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ **est telle que** $\forall t \in I,\ f(t) \neq 0$ **alors** $||f|| \in C^1(I, \mathbb{R})$ **et** $||f||' = \dfrac{(f|f')}{||f||}$**.**

Soit $M : I \mapsto \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ **de classe** C^1 **avec** $M(t) = (C_j(t))_{1 \leqslant j \leqslant p}$ **(**C_j **est la fonction de** t **qui renvoie la** j**-ième colonne de la matrice** $M(t)$**. Alors** $\det(M) : I \to \mathbb{K}$ **est** C^1 **et, sur** I**, on a la relation**

(iii) $\big(\det(M)\big)' = \sum_{j=1}^{p} \det\big(C_1(t), \cdots, C_{j-1}(t), C'_j(t), C_{j+1}(t), \cdots, C_p(t)\big)$**.**

DÉMONSTRATION : (i) le produit scalaire $B : (x,y) \mapsto (x|y)$ étant bilinéaire sur $(\mathbb{R}^n)^2$, la proposition précédente permet de conclure que $(f|g) = B(f,g)$ est de classe C^1 si f et g le sont avec la relation souhaitée $\forall t \in I,\ (f|g)'(t) = B(f,g)'(t) = B(f'(t), g(t)) + B(f(t), g'(t)) = (f'(t)|g(t)) + (f(t)|g'(t))$: OK !
(ii) On écrit $||f|| = \sqrt{(f|f)}$ et par composition de $t \mapsto \sqrt{t}$ qui est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $t \mapsto (f(t)|f(t))$ qui est de classe C^1 d'après (i) et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ par hypothèse, on en déduit que $t \mapsto ||f(t)||$ est aussi de classe C^1 sur I avec $\forall t \in I,\ ||f||'(t) = (f|f)'(t) \times \dfrac{1}{2\sqrt{(f(t)|f(t))}} = \dfrac{2(f(t)|f'(t))}{2\sqrt{(f(t)|f(t))}} = \dfrac{(f(t)|f'(t))}{||f(t)||}$ comme attendu.
(iii) Il suffit de constater que la fonction $\det$ est multilinéaire et d'utiliser la proposition 15.8.

REMARQUE 15.6 : Application cinématique : soit un mouvement qui s'effectue à l'instant $t \in I$ à vitesse $v = ||\vec{v}||$ et à accélération $\vec{a}$, la vitesse v est constante au cours du mouvement si et seulement si $\forall t \in I,\ \vec{v} \perp \vec{a}$.

DÉMONSTRATION : Supposons le mouvement au moins deux fois dérivable sur l'intervalle I.
$(\Longrightarrow)$ supposons que v est constante sur I, alors on considère deux cas :
- si v est nulle, alors il n'y a pas de mouvement et $\vec{v} = \vec{a} = \vec{0}$ donc $\vec{v} \perp \vec{a}$.
- si $v = v_0$ n'est pas nulle, on dérive v avec la proposition 15.8.(ii) et $v' = (||\vec{v}||)' = \dfrac{(\vec{v}|\vec{a})}{||\vec{v}||} = 0$ donc $\vec{v} \perp \vec{a}$.

$(\Longleftarrow)$ on utilise cette fois la proposition 15.8.(i) et on a $(v^2)' = (||\vec{v}||^2)' = 2(\vec{v}|\vec{a}) = 0$ donc v^2 est constante sur l'intervalle I. Comme v est positive par définition $v = \sqrt{v^2}$ est donc aussi constante sur I.

EXERCICE 15.2 : Calcul de $D(x) = \begin{vmatrix} 1 & \cos(x) & \sin(x) \\ 1 & \cos(x+a) & \sin(x+a) \\ 1 & \cos(x+b) & \sin(x+b) \end{vmatrix}$ pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

REMARQUE FONDAMENTALE 15.7 : Soit (E) : $y'' - ay' - by = 0$ une équation différentielle linéaire scalaire homogène du second ordre ordre sur un intervalle I avec des fonctions continues a et b sur I. Si y_1, y_2 sont deux solutions de (E) sur I, on pose le **wronskien** $w(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_1'(t) \\ y_2(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}$.
Puisque y_1 et y_2 sont de classe C^2 sur I, la fonction w l'est aussi et $w'(t) = aw(t)$. Si on note A une primitive de a sur I, alors $\exists \lambda \in \mathbb{K},\ \forall t \in I,\ w(t) = \lambda e^{A(t)}$. Ceci nous donne une autre méthode pour trouver une base de l'espace des solutions de (E) si on connaît une solution $y_1 \neq 0$ de (E).
On peut généraliser avec une équation (E) : $y^{(n)} - a_1 y^{(n-1)} - \cdots - a_n y = 0$ et poser, si $y_1, \cdots, y_n$ sont des solutions de (E), le wronskien $w(t) = \det\big((y_i^{(j-1)})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}\big)$. On aura alors $\forall t \in I,\ w'(t) = a_1(t)w(t)$.

EXERCICE CLASSIQUE 15.3 : Soit l'équation différentielle (E) : $ty'' + (1-2t)y' + (t-1)y = 0$. Montrer que $y_1 : t \mapsto e^t$ est solution de (E). Soit y une autre solution de (E), calculer $W(t)$. En déduire une solution y_2 de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ non colinéaire à y_1.

PROPOSITION SUR LA DÉRIVÉE DE FONCTIONS COMPOSÉES 15.10 :
Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 et $\varphi : J \to I$ de classe C^1.
Alors $f \circ \varphi$ est de classe C^1 et on a : $\forall u \in J,\ \big(f \circ \varphi\big)'(u) = \varphi'(u) f'\big(\varphi(u)\big)$.

DÉMONSTRATION : On écrit, pour $t \in I$, $f(t) = \sum_{k=1}^{n} f_k(t) e_k$ donc $f(\varphi(u)) = \sum_{k=1}^{n} g_k(u) e_k$ en définissant les $g_k : J \to \mathbb{R}$ par $g_k(u) = f_k(\varphi(u))$. Comme toutes les f_k sont de classe C^1 sur I d'après la proposition 15.5, les g_k sont aussi de classe C^1 par composée donc $g = f \circ \varphi$ est aussi de classe C^1 toujours avec la proposition 15.5. De plus, $\forall u \in J,\ g'(u) = \sum_{k=1}^{n} g_k'(u) e_k = \sum_{k=1}^{n} \varphi'(u) f_k'(\varphi(u)) e_k = \varphi'(u) \sum_{k=1}^{n} f_k'(\varphi(u)) e_k = \varphi'(u) f'(\varphi(u))$.

15.2.2 : Fonctions de classe C^k

DÉFINITION 15.4 :
Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$, *on note* $f^{(0)} = f$ *et pour* $p \in \mathbb{N}$ *et si* $f^{(p)}$ *est dérivable sur* I, *la fonction* $f^{(p+1)} = \left(f^{(p)}\right)'$ *: cette fonction* $f^{(p)}$ *est alors la* **dérivée p-ième de f sur I**.

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, *on dit que* f *est de* **classe C^p sur** I *si* f' *est de classe* C^{p-1} *sur* I.

On note $C^p(I, \mathbb{R}^n)$ *l'ensemble des fonctions de classe* C^p *sur* I *et à valeurs dans* $\mathbb{R}^n$.

On dit que f *est de* **classe C^∞ sur** I *si* f *est de classe* C^p *sur* I *pour tout entier* $p \in \mathbb{N}$.

On note $C^\infty(I, \mathbb{R}^n) = \bigcap\limits_{p \in \mathbb{N}} C^p(I, \mathbb{R}^n)$ *l'ensemble des fonctions de classe* C^∞ *sur* I *et à valeurs dans* F.

REMARQUE 15.8 : • *f de classe C^2 si f' existe et est de classe C^1 donc si $f'' = (f')'$ existe et est continue.*

- *Sous réserve d'existence, si $f^{(n)}$ existe et $n = p + q$ avec $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, alors $f^{(n)} = (f^{(p)})^{(q)}$.*
- *Par récurrence, pour $p \in \mathbb{N}^*$: $\big(f$ de classe C^p sur $I\big) \Longleftrightarrow \big(f^{(p)}$ existe et est continue sur $I\big)$.*

DÉMONSTRATION : • En notant D la fonction qui à une fonction associe sa dérivée, on a par définition $f^{(n)}$ existe si et seulement $f^{(n-1)}$ existe et est dérivable avec la relation $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ donc $f^{(n)} = D(f^{(n-1)})$.

On démontre la relation de la remarque par récurrence sur n. Si $n = 0$ ou $n = 1$, c'est clair car dériver 0 fois, c'est ne rien faire (en effet $D^0 = \mathrm{id}$). Soit $n \geqslant 1$, supposons la relation vraie jusqu'à $n - 1$. Soit aussi $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p + q = n$ et une fonction $f : I \to \mathbb{R}^n$ telle que $f^{(n)}$ existe, alors par définition $f^{(n-1)}$ existe et, par hypothèse de récurrence, comme $p + (q - 1) = n - 1$, on a $f^{(n-1)} = (f^{(p)})^{(q-1)} = D^{q-1}(f^{(p)})$. Or, par définition $f^{(n)} = (f^{(n-1)})' = D(D^{q-1}(f^{(p)})) = D^q(f^{(p)}) = (f^{(p)})^{(q)}$ comme attendu.
• La propriété est vraie par définition si $p = 1$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ pour lequel la propriété est vraie pour n'importe quelle fonction définie sur I. Soit maintenant une fonction $f : I \to \mathbb{R}^n$.
$(\Longrightarrow)$ Si f est de classe C^p sur I, alors par définition f' est de classe C^{p-1} sur I donc, par hypothèse de récurrence, $(f')^{(p-1)}$ existe et est continue sur I ce qui signifie que $f^{(p)}$ existe et que $f^{(p)}$ est continue sur I comme attendu.
$(\Longleftarrow)$ Si $f^{(p)}$ existe et est continue sur I, on en déduit que $(f')^{(p-1)}$ existe et est continue sur I donc, par hypothèse de récurrence, que f' est de classe C^{p-1} sur I ce qui est la définition du fait que f est de classe C^p sur I.

PROPOSITION SUR LA LINÉARITÉ DES DÉRIVÉES SUCCESSIVES 15.11 :
Pour tout $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $C^p(I, \mathbb{R}^n)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R}^n)$ et :

$$\forall (f, g) \in C^p(I, \mathbb{R}^n)^2,\ \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ (\alpha f + \beta g)^{(p)} = \alpha f^{(p)} + \beta g^{(p)}.$$

DÉMONSTRATION : On le fait par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$. La propriété est claire pour $p = 0$ et elle provient de la linéarité de la dérivation (proposition 15.4) pour $p = 1$.
Soit $p \geqslant 1$ tel que la formule soit vraie pour toutes fonctions f et g vérifiant les bonnes propriétés. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et f, g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}^n$ de classe C^{p+1}, alors par définition, cela signifie que f et g sont dérivables sur I et que f' et g' sont de classe C^p. Par hypothèse de récurrence, $\alpha f' + \beta g'$ est donc elle aussi de classe C^p sur I avec $(\alpha f' + \beta g')^{(p)} = \alpha f'^{(p)} + \beta g'^{(p)} = \alpha f^{(p+1)} + \beta g^{(p+1)}$. Ainsi, $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$ est de classe C^p ce qui justifie que $\alpha f + \beta g$ est de classe C^{p+1} et que $(\alpha f + \beta g)^{(p+1)} = (\alpha f' + \beta g')^{(p)} = \alpha f^{(p+1)} + \beta g^{(p+1)}$.
Pour $p = \infty$, si f et g sont de classe C^∞ sur I, alors ces deux fonctions sont de classe C^p sur I pour tout entier $p \in \mathbb{N}$ donc, d'après ce qui précède, $\alpha f + \beta g$ est de classe C^p sur I. Ceci étant vrai pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, la fonction $\alpha f + \beta g$ est de classe C^∞ sur I.

PROPOSITION SUR LA FORMULE DE LEIBNIZ 15.12 :
Soit $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $\lambda : I \to \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}^n$ de classe C^p sur I.
Alors $\lambda f : I \to \mathbb{R}^n$ est de classe C^p et si $p \in \mathbb{N}$: $(\lambda f)^{(p)} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \lambda^{(k)} f^{(p-k)}$.

<u>Démonstration</u> : Par récurrence sur p comme pour la formule de Leibniz valable pour les fonctions scalaires.

PROPOSITION SUR LA CLASSE DES FONCTIONS COMPOSÉES 15.13 :
Soit $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $f : I \to \mathbb{R}^n$ de classe C^p, $\varphi : J \to I$ de classe C^p. Alors $f \circ \varphi$ est de classe C^p.

<u>Démonstration</u> : Par récurrence sur p.

COMPÉTENCES

- Dériver une fonction vectorielle en dimension finie en passant par les coordonnées.
- Savoir dériver des fonctions définies comme produit scalaire ou norme d'autres fonctions.
- Connaître la formule donnant la dérivée d'un déterminant de matrice dérivable.