PSI1

DM11

pour le mardi 19 mars

Notations

Soit n et p des entiers supérieurs ou égaux à 1. $\mathbb{K}$ désignant le corps des réels ou celui des complexes, on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ ayant n lignes et p colonnes. Lorsque $p = n$, $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ est noté plus simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et est muni de sa structure d'algèbre, I_n représentant la matrice identité.
$0_{n,p}$ désigne la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et 0_n la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
$GL_n(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{K})$.
Tout vecteur $x = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de $\mathbb{K}^n$ est identifié à un élément X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne de X soit x_i. Dans toute la suite, nous noterons indifféremment $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ aussi bien que le vecteur de $\mathbb{K}^n$ qui lui est associé.
Pour $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ dans $\mathbb{K}^p$, on note $(AX)_i$ le coefficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne de AX.
Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\operatorname{Sp} A$ l'ensemble des complexes λ pour lesquels il existe un vecteur X non nul de C^n tel que $AX = \lambda X$:

$$\operatorname{Sp}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \exists X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}, AX = \lambda X\}$$

et on appelle rayon spectral de A le réel $\rho(A)$ (dont on admettra l'existence) défini par :

$$\rho(A) = \max_{\lambda\in \operatorname{Sp} A} |\lambda|.$$

Conformément à l'usage, on note N_∞ la norme définie sur $\mathbb{C}^n$ par :

$$\forall X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{C}^n, N_\infty(X) = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|.$$

On qualifie de norme matricielle toute norme φ définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant la propriété :

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_{n(\mathbb{K})})^2, \varphi(AB) \leqslant \varphi(A) \cdot \varphi(B).$$

Partie I

On considère la matrice $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0\\ -2 & 3 & 0\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}$

1. Déterminer un polynôme annulateur de A de degré 3.
2. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. La suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ?
   Si oui, caractériser géométriquement l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $B = \lim A^n$.
4. Calculer $\det(\lambda I_3 - A)$, où $\lambda \in \mathbb{C}$; en déduire l'ensemble $\operatorname{Sp}(A)$ et le réel $\rho(A)$. *On pourra commencer par remarquer que* $\lambda \in \operatorname{Sp}(A)$ *si et seulement si* $\lambda I_3 - A$ *n'est pas inversible.*

Partie II

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et N une norme quelconque sur $\mathbb{C}^n$. On pose :

$$M_A = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|.$$

1. Montrer que l'application $\psi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}, A = (a_{i,j}) \mapsto \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, mais n'est pas en général une norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. a) Montrer qu'il existe une constante réelle C_A telle que :

$$\forall X \in \mathbb{C}^n, N(AX) \leqslant C_A N(X).$$

   On pourra s'intéresser à l'application $\theta : X \in \mathbb{C}^n \mapsto AX$

   b) Montrer que l'ensemble $\left\{\dfrac{N(AX)}{N(X)}\ ,\ X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}\right\}$ possède une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.

On notera dans la suite :

$$\widetilde{N}(A) = \sup_{X\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}} \frac{N(AX)}{N(X)}.$$

3. Montrer :

a) $\widetilde{N}(A) = 0 \Leftrightarrow A = 0_n$.

b) $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \widetilde{N}(\lambda A) \leqslant |\lambda| \widetilde{N}(A)$.

c) En déduire : $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \widetilde{N}(\lambda A) = |\lambda| \widetilde{N}(A)$.

d) $\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \widetilde{N}(A+B) \leqslant \widetilde{N}(A) + \widetilde{N}(B)$.

e) $\forall X \in \mathbb{C}^n, N(AX) \leqslant \widetilde{N}(A) N(X)$.

f) Déduire de ces résultats que $\widetilde{N}$ est une norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

4. a) Montrer que pour tout $X \in \mathbb{C}^n$: $N_\infty(AX) \leqslant M_A N_\infty(X)$.

b) Soit i_0 un entier compris entre 1 et n tel que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}| = M_A$. En considérant le vecteur Y de $\mathbb{C}^n$ de composantes y_j définies par :

$$y_j = \frac{\overline{a_{i_0,j}}}{|a_{i_0,j}|} \text{ si } a_{i_0,j} \neq 0 \text{ et } y_j = 1 \text{ si } a_{i_0,j} = 0$$

montrer que $M_A \leqslant \widetilde{N_\infty}(A)$ et en déduire $\widetilde{N_\infty}(A) = M_A$.

5. En considérant un complexe λ de $\mathrm{Sp}(A)$, montrer que :

$$\rho(A) \leqslant \widetilde{N}(A).$$

6. Montrer que si $\displaystyle\lim_{k \to +\infty} A^k = 0_n$, alors $\rho(A) < 1$. *On pourra commencer par montrer que* $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \Rightarrow \lambda^k \in \mathrm{Sp}\left(A^k\right)$.

Dans toute la suite du problème, on admettra que, réciproquement, si $\rho(A) < 1$, alors $\displaystyle\lim_{k \to +\infty} A^k = 0_n$.

7. a) Montrer que pour tout k entier naturel non nul : $\rho(A) \leqslant \left[\widetilde{N}\left(A^k\right)\right]^{\frac{1}{k}}$.

b) Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, $\rho(\alpha A) = |\alpha| \rho(A)$.

c) Soit $\varepsilon > 0$ et $A_\varepsilon = \dfrac{A}{\rho(A) + \varepsilon}$. Vérifier que $\rho(A_\varepsilon) < 1$ et en déduire l'existence d'un entier naturel k_ε tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \left(k \geqslant k_\varepsilon \Rightarrow \widetilde{N}\left(A^k\right) \leqslant (\rho(A) + \varepsilon)^k\right).$$

d) En déduire $\displaystyle\lim_{k \to +\infty} \left[\widetilde{N}\left(A^k\right)\right]^{\frac{1}{k}} = \rho(A)$.

Partie III

Une matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est dite positive (resp. strictement positive) et on note $A \geqslant 0$ (resp. $A > 0$) si et seulement si tous ses coefficients sont positifs ou nuls (resp. strictement positifs). Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on note $A \geqslant B$ (resp. $A \leqslant B$, $A > B$, $A < B$) si et seulement si $A - B \geqslant 0$ (resp. $B - A \geqslant 0$, $A - B > 0$, $B - A > 0$).
Notons que grâce à l'identification de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pourra parler de vecteur de $\mathbb{R}^n$ positif ou strictement positif.

1. Donner un exemple de matrice A montrant que les conditions $A \geqslant 0$ et $A \neq 0$ n'impliquent pas nécessairement $A > 0$.

2. A, B, A', B' désignent des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que si $0 \leqslant A \leqslant B$ et $0 \leqslant A' \leqslant B'$, alors $0 \leqslant AA' \leqslant BB'$.

b) Montrer que si $0 \leqslant A \leqslant B$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant A^k \leqslant B^k$.

c) Montrer que si $0 \leqslant A \leqslant B$, alors $\widetilde{N_\infty}(A) \leqslant \widetilde{N_\infty}(B)$.

d) Montrer que si $0 \leqslant A \leqslant B$, alors $\rho(A) \leqslant \rho(B)$.

e) Montrer que si $0 \leqslant A < B$, il existe $c \in]0,1[$ tel que $A \leqslant cB$ et en déduire $\rho(A) < \rho(B)$.