TD 25 : CALCUL DIFFÉRENTIEL

PSI 1 2023-2024 **mercredi 27 mars 2024**

25.1 *Centrale PSI 2013* Soit les deux parties $D_1 = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et $D_2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ de $\mathbb{R}^2$ et l'application $\varphi : D_2 \to D_1$ définie par $\forall (u,v) \in D_2,\ \varphi(u,v) = (x,y) = \left(\dfrac{u^2+v^2}{2}, \dfrac{u}{v}\right)$.

a. Montrer que φ est de classe C^1 et bijective.

b. Résoudre dans D_1 l'équation $(E)\ :\ 2xy\dfrac{\partial f}{\partial x} + (1+y^2)\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2xf$ en posant $x = \dfrac{u^2+v^2}{2}$ et $y = \dfrac{u}{v}$.

25.2 Déterminer les plans tangents aux points réguliers de la surface $S\ :\ z^3 = xy$ contenant la droite D déterminée par le système d'équations $x - 2 = y - 3(z+1) = 0$.

25.3 Déterminer les plans tangents à $S\ :\ x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$ qui sont orthogonaux à la droite $D\ :\ x = \frac{y}{3} = -\frac{z}{2}$.

25.4 *TPE PSI 2015* Déterminer les plans tangents à $S\ :\ z^2 = xy$ et contenant la droite $D\ :\ x = y = z$.

25.5 *Petites Mines PSI 2015* Patxi Teillagorry

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1. On définit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $g(x,x) = f(x)$ et $g(x,y) = \dfrac{1}{y-x}\displaystyle\int_x^y f(t)dt$ si $x \neq y$.
On pose $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y\}$.

a. Exemple, prendre $f(x) = x^2$. Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

b. Montrer que g est de classe C^1 sur D et calculer $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}$.

c. Soit $a \in \mathbb{R}$, montrer que g admet une dérivée partielle en (a,a) selon x et selon y. Les calculer.

d. Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

25.6 *OdlT 2015/2016 CCP PSI planche 241I* Extrema globaux/locaux de $f(x,y) = x^4y^3 + \ln(1+y^4)$ sur $[-1;1]^2$.

25.7 *Centrale Maths1 PSI 2016* Samy Essabar

a. Soit $f \in C^1((\mathbb{R}_+^*)^2, \mathbb{R})$ et $(x_0,y_0) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tels que $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ f(x,y) \leqslant f(x_0,y_0)$.
Montrer que (x_0,y_0) est un point critique de f.
Pour $a > 0$, on définit $S_a : (\mathbb{R}_+^*)^2 \to \mathbb{R}_+^*$ par $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ S_a(x,y) = xy + \dfrac{2(x+y)a}{xy}$.

b. Montrer que S_a admet un unique point critique noté (x_0,y_0).
Soit $K = \left\{ (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \;\middle|\; x \geqslant \dfrac{x_0}{3} \text{ et } y \geqslant \dfrac{y_0}{3} \text{ et } xy \leqslant 3x_0y_0 \right\}$.

c. Représenter K. Montrer que S_a admet un minimum sur K. Montrer que c'est un minimum sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

d. Parmi les boîtes (parallélépipèdes rectangles de base rectangulaire de dimension x et y) sans couvercle (avec seulement le fond et les quatre faces latérales) de volume $V > 0$ fixé, quelles sont celles de surface minimale ? Vous donnerez la hauteur de la boîte optimale en fonction de la dimension du fond.

25.8 *Mines PSI 2016* Sylvin Bielle I

On note $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Soit $p \in \mathbb{R}$ et $g \in C^2(U, \mathbb{R})$.
Trouver les fonctions $f \in C^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ telles que $\forall (x,y) \in U,\ g(x,y) = f(x^2+y^2)$ sachant que l'on suppose $\forall (x,y) \in U,\ \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = (x^2+y^2)^p$.

25.9 *ENS Cachan PSI 2017* Thomas Laborde

Soit $u \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle que $\lim\limits_{||x|| \to +\infty} \dfrac{|u(x)|}{||x||} = +\infty$. On pose $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x|| < r\}$ pour $r > 0$.
a. Cas $n = 1$: ∇u est-il surjectif ?
Pour la suite, on prend $n = 2$ et on suppose que ∇u n'est pas surjectif.
b. Montrer qu'il existe $v \in \mathbb{R}^2$ tel que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = u(x) - (x|v)$ soit de classe C^1, que ∇f ne s'annule pas, et que $\lim\limits_{||x|| \to +\infty} \dfrac{|f(x)|}{||x||} = +\infty$.
c. Soit $r > 0$ et $(a, b) \in (\mathbb{R}^2 \setminus B_r)^2$, montrer qu'il existe $\gamma : [0; 1] \to (\mathbb{R}^2 \setminus B_r)$ telle que $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$. En déduire que $f(\mathbb{R}^2 \setminus B_r)$ est un intervalle. Conclure.

25.10 *Centrale Maths1 PSI 2019* Victor Marguerittte

Dans $\mathbb{R}^2$, soit D le disque fermé de centre O et de rayon 1 (disque fermé unité). On définit $f : D \to \mathbb{R}$ par $f(x, y) = -(x^2 + y^2)^2 + \dfrac{3}{2}(x^2 + y^2) + 1$ et $F : D \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F(x, y, z) = f(x, y) - z$.
a. Calculer le gradient de F.
b. Soit $S = \{(x, y, z) \in D \times \mathbb{R} \mid z = f(x, y)\}$ la surface représentative de f. Déterminer les points $(x, y) \in D$ où le plan tangent à S en (x, y, z) est normal au vecteur $\vec{v} = (0, 1, -1)$.
c. Soit $\gamma : t \mapsto (t, t)$ et $g = f \circ \gamma$. Donner l'ensemble de définition de g, calculer g' par la règle de la chaîne. En déduire les extrema de la fonction g sur son ensemble de définition.

25.11 *CCP PSI 2019* Perrine Hoffmann et Quentin Vacher I Soit $f : (x, y) \mapsto x^3y^2(1 - x - y)$.
a. Trouver les points critiques de f.
b. Étudier les extrema locaux de f. Admet-elle des extrema absolus ?

25.12 *ENS Cachan PSI 2022* Olivier Baesen et Thibault Le Gal et Antoine Prévost

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in GL_n(\mathbb{R})$ symétrique. On définit $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to S_n(\mathbb{R})$ par $\Phi(M) = M^TAM$.
a. Montrer que Φ, vue comme une application de $\mathbb{R}^{n^2}$ dans $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$, est de classe C^1.
b. Rappeler la définition de la différentielle.
c. Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $d_{I_n}\Phi$ la différentielle de Φ en I_n.
- Montrer que $\Phi(I_n + H) - \Phi(I_n) = H^TA + AH + H^TAH$.
- En déduire que $d_{I_n}\Phi(H) = H^TA + AH$.
- Déterminer le noyau et l'image de $d_{I_n}\Phi$.

d. Montrer que $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid AM \in S_n(\mathbb{R})\}$ et $\mathrm{Ker}(d_{I_n}\Phi)$ sont supplémentaires.
e. Montrer qu'il existe un ouvert U contenant I_n tel que $U \subset GL_n(\mathbb{R})$.

25.13 *Centrale Maths1 PSI 2022* Maxence Rossignol

Soit la fonction $K : [0; 1]^2 \to \mathbb{R}$ définie par $K(x, y) = x(1 - y)$ si $x \leqslant y$ et $K(x, y) = y(1 - x)$ sinon.
a. Montrer que K est continue sur $[0; 1]^2$ et à valeurs dans $\left[0; \dfrac{1}{4}\right]$.
b. Si $(x_0, y_0) \in [0; 1]^2$ et $x_0 < y_0$, déterminer une équation du plan tangent P à la surface S d'équation $z = K(x, y)$ en le point $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Donner aussi un vecteur non nul normal à P.

25.14 *Mines PSI 2022* Jimmy Guertin I Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$.

On définit la fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $F(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (t - x)^2(t - y)^2 e^{-t^2} dt$.
a. Montrer l'existence de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
b. Trouver une relation entre I_{n+2} et I_n pour $n \in \mathbb{N}$.
c. Pour $p \in \mathbb{N}$, calculer I_{2p+1} et I_{2p} en admettant que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.
d. Calculer $F(x, y)$. Montrer que F est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$.
e. Déterminer les points critiques de F, puis ses éventuels extrema.