TD 22 : ESPACES VECTORIELS NORMÉS

PSI 1 2023-2024 **vendredi 08 mars 2024**

22.1 **a.** Supposons que le résultat est vrai pour une norme N_1 et soit une autre norme N_2. Comme on est en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes donc il existe des constantes $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ telles que $\alpha N_1 \leqslant N_2 \leqslant \beta N_1$. Par hypothèse, $\lim\limits_{k\to+\infty} N_1(A^k)^{\frac{1}{k}} = \rho(A)$. Or, $\lim\limits_{k\to+\infty} \alpha^{\frac{1}{k}} = \lim\limits_{k\to+\infty} \beta^{\frac{1}{k}} = 1$ donc, par le théorème des gendarmes, comme $\forall k \in \mathbb{N},\ \alpha^{\frac{1}{k}} N_1(A^k)^{\frac{1}{k}} \leqslant N_2(A^k)^{\frac{1}{k}} \leqslant \beta^{\frac{1}{k}} N_1(A^k)^{\frac{1}{k}}$, on en déduit que $\lim\limits_{k\to+\infty} N_2(A^k)^{\frac{1}{k}} = \rho(A)$: le résultat est aussi vrai pour N_2.

b. Si $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est semblable à $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = PBP^{-1}$. Soit N une norme sur E. Comme le produit matriciel est bilinéaire il existe $M \geqslant 0$ telle que $\forall (U, V) \in E^2,\ N(UV) \leqslant MN(U)N(V)$ d'après le cours car E est de dimension finie. Ou on a vu en cours que $||UV||_\infty \leqslant n||U||_\infty||V||_\infty$ et il existe des constantes $\alpha' > 0$ et $\beta' > 0$ telles que $\alpha' N \leqslant ||.||_\infty \leqslant \beta' N$, on trouve facilement que pour toutes matrices U et V dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $N(UV) \leqslant \dfrac{n(\beta')^2}{\alpha'} N(U)N(V)$ et $M = \dfrac{n(\beta')^2}{\alpha'}$ convient.

Or, $A^k = PB^kP^{-1}$ et $B^k = P^{-1}A^kP$, donc $N(A^k) \leqslant M^2N(P)N(B^k)N(P^{-1})$ et $N(B^k) \leqslant M^2N(P^{-1})N(A^k)N(P)$. On passe ces deux inégalités à la puissance $\dfrac{1}{k} > 0$ et $\dfrac{1}{M^2N(P)N(P^{-1})} N(A^k) \leqslant N(B^k) \leqslant M^2N(P^{-1})N(A^k)N(P)$ et, par encadrement, on obtient $\lim\limits_{k\to+\infty} N(B^k)^{\frac{1}{k}} = \rho(A)$ car, par exemple, $\lim\limits_{k\to+\infty} \big(M^2N(P^{-1})N(P)\big)^{\frac{1}{k}} = 1$.

c. On écrit $T = I_n + N$ avec $N = T - I_n$ nilpotente d'ordre inférieur ou égal à n (classique avec le théorème de Cayley-Hamilton car $\chi_N = X^n$) et, comme N et I_n commutent, on a $T^k = \sum\limits_{i=0}^{k} \dbinom{k}{i} N^i = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \dbinom{k}{i} N^i$ pour $k \geqslant n$. On écrit l'inégalité triangulaire et $1 \leqslant ||T^k||_\infty = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \dbinom{k}{i} ||N^i||_\infty$. Le terme de droite est polynomial en k de degré inférieur ou égal à $n-1$ donc quand on élève tout à la puissance $\dfrac{1}{k}$, la limite vaut 1 à gauche et à droite (par croissances comparées) et on conclut par encadrement que $\lim\limits_{k\to+\infty} ||T^k||_\infty^{\frac{1}{k}} = 1$.

d. Comme $A^0 = I_n = B^0$, $||A^0||_\infty \leqslant ||B^0||_\infty$ et, par définition de B, $||A^1||_\infty = ||A||_\infty \leqslant ||B||_\infty = ||B^1||_\infty$. Si on suppose, pour un entier $k \in \mathbb{N}^*$, que $||A^k||_\infty \leqslant ||B^k||_\infty$, alors $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ [A^{k+1}]_{i,j} = \sum\limits_{\ell=1}^{n} a_{i,\ell}[A^k]_{\ell,j}$ donc, par inégalité triangulaire, $\big|[A^{k+1}]_{i,j}\big| \leqslant \sum\limits_{\ell=1}^{n} |a_{i,\ell}|\big|[A^k]_{\ell,j}\big| \leqslant \sum\limits_{\ell=1}^{n} b_{i,\ell}\big|[B^k]_{\ell,j}\big|$ par définition de B et par hypothèse de récurrence. Ainsi, comme les coefficients de B^k sont positifs (clair par récurrence et par définition du produit matriciel), on a $\big|[A^{k+1}]_{i,j}\big| \leqslant \sum\limits_{\ell=1}^{n} b_{i,\ell}[B^k]_{\ell,j} = [B^{k+1}]_{i,j}$ donc $||A^{k+1}||_\infty \leqslant ||B^{k+1}||_\infty$. Par principe de récurrence, on a bien établi que $\forall k \in \mathbb{N},\ ||A^k||_\infty \leqslant ||B^k||_\infty$.

Traitons maintenant deux cas :

- $\underline{\rho(A) = 0}$, alors il n'y a aucune valeur propre non nulle de A donc $Sp(A) = \{0\}$ et $\chi_A = X^n$ donc $A^n = 0$ par Cayley-Hamilton ce qui prouve que $\forall k \geqslant n, A^k = 0$ donc $\lim\limits_{k\to+\infty} ||A^k||_\infty^{\frac{1}{k}} = 0 = \rho(A)$.
- $\underline{\rho(A) > 0}$, la matrice $\dfrac{A}{\rho(A)}$ a une valeur propre de module 1 et ensuite uniquement des valeurs propres de modules inférieurs ou égaux à 1 par construction ; elle est trigonalisable car χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$ donc est semblable à une matrice triangulaire supérieure T' dont les coefficients sont en

module inférieur à 1 sur la diagonale. En posant $m = \underset{1\leqslant i<j\leqslant n}{\text{Max}} |t_{i,j}|$ et T la matrice triangulaire supérieure ayant des 1 sur la diagonale et des m au dessus, $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, $|t'_{i,j}| \leqslant t_{i,j}$ donc, avec ce qui précède, on a $\forall k \in \mathbb{N}$, $||T'^k||_\infty \leqslant ||T^k||_\infty$. Or la question précédente montre que $\lim\limits_{k\to+\infty} ||T^k||_\infty^{\frac{1}{k}} = 1$. Mais comme T' a un terme qui vaut 1 sur la diagonale, T'^k l'a également donc $1 \leqslant ||T'^k||_\infty \leqslant ||T^k||_\infty$ d'où $1 \leqslant ||T'^k||_\infty^{\frac{1}{k}} \leqslant ||T^k||_\infty^{\frac{1}{k}}$. Par encadrement, $\lim\limits_{k\to+\infty} ||T'^k||_\infty^{\frac{1}{k}} = 1$. Comme $\frac{A}{\rho(A)}$ et T' sont semblables, d'après la question **b.**, on a donc $\lim\limits_{k\to+\infty} \left|\left|\left(\frac{A}{\rho(A)}\right)^k\right|\right|_\infty^{\frac{1}{k}} = 1$ donc, par homogénéité de la norme, $\lim\limits_{k\to+\infty} ||A^k||_\infty^{\frac{1}{k}} = \rho(A)$.

Dans tous les cas, on a $\lim\limits_{k\to+\infty} ||A^k||_\infty^{\frac{1}{k}} = \rho(A)$ donc, d'après la question **a.**, puisque ça marche pour la norme infinie, pour toute norme $||\,.\,||$ de E, on a $\lim\limits_{k\to+\infty} ||A^k||^{\frac{1}{k}} = \rho(A)$.

22.2 **a.** On sait d'après le cours que $||\,.\,||_\infty$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: il faut le refaire ici et montrer la séparation, l'homogénéité et l'inégalité triangulaire !

Soit $(M,X) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $[MX]_i = \sum\limits_{k=1}^{n} m_{i,k}x_k$. Ainsi, par inégalité triangulaire, on a $|[MX]_i| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} |m_{i,k}||x_k| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} ||M||_\infty ||X||_\infty = n||M||_\infty||X||_\infty$. On en déduit que $||MX||_\infty \leqslant n||M||_\infty||X||_\infty$.

b. Par hypothèse, il existe $m \geqslant 0$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}$, $||A^k||_\infty \leqslant m$. Soit aussi $X \in \text{Ker}(A - I_n) \cap \text{Im}\,(A - I_n)$, on a $AX = X$ et $\exists Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X = AY - Y$. On multiplie cette dernière égalité par A^k donc $A^kX = A^{k+1}Y - A^kY$. Or $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^kX = X$ par une récurrence simple et car $A^0X = I_nX = X$, donc en sommant ces relations, on obtient $B_pX = \frac{1}{p}\sum\limits_{k=0}^{p-1} A^kX = X = \frac{1}{p}\sum\limits_{k=0}^{p-1}(A^{k+1}Y - A^kY) = \frac{A^pY - Y}{p}$.
D'après **a.** et par inégalité triangulaire, $||X||_\infty = \left|\left|\frac{A^pY - Y}{p}\right|\right|_\infty \leqslant \frac{mn+1}{p}||Y||_\infty$. Comme $\lim\limits_{p\to+\infty} \frac{mn+1}{p} = 0$, on a $||X||_\infty = 0$ par encadrement donc $X = 0$. Les deux sous-espaces $\text{Ker}(A - I_n)$ et $\text{Im}\,(A - I_n)$ sont donc en somme directe donc supplémentaires car, avec la formule du rang, $\dim(\text{Ker}(A - I_n)) + \dim(\text{Im}\,(A - I_n)) = n$.

c. Notons P la matrice dans la base canonique de la projection sur $\text{Ker}(A - I_n)$ parallèlement à $\text{Im}\,(A - I_n)$. La première colonne de B_p est constituée des coordonnées (dans la base canonique $(E_1, \cdots, E_n)$) de B_pE_1. En décomposant $E_1 = X_1 + X_2$ avec $X_1 \in \text{Ker}(A - I_n)$ et $X_2 \in \text{Im}(A - I_n)$ donc $AX_1 = X_1$ et $\exists X_3 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX_3 - X_3 = X_2$, alors $B_pE_1 = B_pX_1 + B_pX_2$. Comme avant, $B_pX_1 = X_1$ car $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^kX_1 = X_1$. De plus, $B_pX_2 = \frac{1}{p}\sum\limits_{k=0}^{p-1}(A^{k+1}X_3 - A^kX_3) = \frac{A^pX_3 - X_3}{p}$ par télescopage donc $||B_pX_2||_\infty \leqslant \frac{nm+1}{p}||X_3||_\infty$ ce qui donne $\lim\limits_{p\to+\infty} B_pX_2 = 0$ par encadrement comme ci-dessus.
Comme $PX = X_1$ par construction, on a $\lim\limits_{p\to+\infty} B_pE_1 = PE_1$. On fait bien sûr de même pour les autres colonnes, ce qui montre que les n^2 coordonnées (les n^2 cases) de la suite $(B_p)_{p\geqslant 0}$ convergent vers celles de P. Comme on est en dimension finie, ceci assure que $\lim\limits_{p\to+\infty} B_p = P$.

22.3 **a.** Comme a et b ont été choisis strictement positifs, la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est bien définie et strictement positive car la fonction racine est bien définie et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Par construction, elle est aussi strictement croissante car la fonction $\sqrt{\ }$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ (par exemple $a + \sqrt{b} > a$ donc

$u_2 > u_1$ et $a+\sqrt{b+\sqrt{a}} > a+\sqrt{b}$ donc $u_3 > u_2$).

Si $a = b$, notons $(v_n)_{n\geqslant 1}$ la suite associée, alors $v_1 = \sqrt{a}$ et $\forall n \geqslant 1,\ v_{n+1} = \sqrt{a+v_n} = f_a(v_n)$. La fonction $f_a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est dérivable, strictement croissante et son unique point fixe est $\ell_a \geqslant 0$ tel que $\ell_a = \sqrt{a+\ell_a} \Longrightarrow \ell_a^2 - \ell_a - a = 0$. On trouve classiquement $\ell_a = \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$ (car $\dfrac{1-\sqrt{1+4a}}{2} < 0$).

Comme $v_1 = \sqrt{a} < \sqrt{\dfrac{1+4a}{4}} < \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2} = \ell_a$, on a $0 < v_1 < \ell_a$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 < v_n < \ell_a$, on applique f_a strictement croissante à cette inégalité et on a $0 < f_a(0) < f_a(v_n) = v_{n+1} < f_a(\ell_a) = \ell_a$. Par principe de récurrence, on a donc $\forall n \geqslant 1,\ 0 < v_n < \ell_a$. La suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est donc croissante et majorée par ℓ_a donc elle converge vers un réel $\ell'_a \leqslant \ell_a$. Mais en passant à la limite dans $v_{n+1} = f_a(v_n)$, comme f_a est continue, on a $\ell'_a = f_a(\ell'_a)$ ce qui montre que $\ell'_a = \ell_a$ d'après ce qui précède. Par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell_a$.

Si $b < a$ (le cas $b > a$ est similaire), on pose, pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n = \sqrt{a+\sqrt{b+\sqrt{a+\sqrt{b+\ldots}}}}$ et $v_n = \sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots}}}}$. Il est clair que $\forall n \geqslant 1,\ u_n \leqslant v_n$. D'après ce qui précède, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \leqslant \ell_a$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée donc elle converge (vers ℓ) par le théorème de la limite monotone.

b. Par construction, $\forall n \geqslant 1,\ u_{n+2} = \sqrt{a+\sqrt{b+u_n}}$. On passe à la limite dans cette relation (elles existent). Comme $\sqrt{\ }$ est une fonction continue, on a donc $\ell = \sqrt{a+\sqrt{b+\ell}}$ ce qui donne en élevant au carré la relation $\ell^2 = a+\sqrt{b+\ell}$ puis $\ell^2 - a = \sqrt{b+\ell}$ donc $(\ell^2-a)^2 = b+\ell$. En développant, on trouve $\ell^4 - 2a\ell^2 - \ell + a^2 - b = 0$. Ainsi, le polynôme $P = X^4 - 2aX^2 - X + a^2 - b$ admet ℓ comme racine.

22.4 **a.** Une norme sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est une application $N : E \to \mathbb{R}_+$ telle que :

- $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in E,\ N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ (homogénéité).
- $\forall x \in E,\ N(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0_E$ (séparation).
- $\forall (x,y) \in E^2,\ N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$ (inégalité triangulaire).

b. Les trois applications N_0, N_1, N_2 sont bien définies car, puisque les fonctions f de E sont de classe C^2 sur $[0;1]$, les fonctions f, f', f'' sont continues sur le segment $[0;1]$ donc les intégrales sont bien définies.

Les trois applications N_0, N_1, N_2 vérifient l'homogénéité par linéarité de la dérivation, de l'intégrale et par homogénéité de la valeur absolue sur $\mathbb{R}$: il suffit de l'écrire !

Les trois applications N_0, N_1, N_2 vérifient l'inégalité triangulaire par linéarité de la dérivation, de l'intégrale et parce que la valeur absolue vérifie elle-même l'inégalité triangulaire : il suffit de l'écrire !

N_0 vérifie la séparation parce que si $f \in E$ et $N_0(f) = 0$, la fonction continue et positive $|f|$ a une intégrale nulle sur $[0;1]$ donc elle y est nulle ce qui donne $f = 0$.

N_1 vérifie la séparation parce que si $f \in E$ et $N_1(f) = 0$, on a forcément $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 |f'(t)|dt = 0$ donc, comme $|f'|$ est positive et continue, on a $f' = 0$ sur l'intervalle $[0;1]$ donc f y est constante, cette constante étant nulle avec la condition $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt = 0$. On a donc bien $f = 0$.

N_2 ne vérifie pas la séparation car la fonction $f : x \mapsto \sin(2\pi x)$ est dans E et, après des calculs élémentaires, $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 f'(t)dt = \int_0^1 f''(t)dt = 0$ donc $N_2(f) = 0$ alors que la fonction f n'est pas nulle.

Au final, N_0 et N_1 sont des normes mais N_2 n'en est pas une.

c. Soit $f \in E$ et $F : [0;1] \to \mathbb{R}$ la primitive de f qui s'annule en 0 définie par $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. Comme F est de classe C^3 sur $[0;1]$ car f y est C^2, le théorème des accroissements finis justifie l'existence de $c \in]0;1[\subset [0;1]$ tel que $F'(c) = \dfrac{F(1) - F(0)}{1 - 0} = F(1)$. Or $F'(c) = f(c)$ et $F(1) = \int_0^1 f(t)dt$ donc $f(c) = \int_0^1 f(t)dt$.

d. Soit $f \in E$ et $x \in [0;1]$, $f(t) = f(c) + \int_c^t f'(x)dx$ (avec le c de la question précédente) donc, par inégalité triangulaire et de la moyenne, $|f(t)| \leqslant |f(c)| + \left| \int_c^t |f'(x)|dx \right| \leqslant |f(c)| + \int_0^1 |f'(x)|dx$ car $\widetilde{[c;t]} \subset [0;1]$ et $|f'| \geqslant 0$. Ainsi, $N_1(f) = |f(c)| + \int_0^1 |f'(x)|dx$ est un majorant de f sur $[0;1]$ et $N_0(f) = \int_0^1 |f(t)|dt \leqslant \int_0^1 N_1(f)dt = N_1(f)$ qui prouve que N_1 domine N_0.

Soit $f \in E$ non nulle telle que $N_0(f) = N_1(f)$. Avec les notations précédentes, $\int_0^1 |f(t)|dt = \int_0^1 N_1(f)dt$ donc $\int_0^1 (N_1(f) - |f(t)|)dt = 0$ mais on a vu que $t \mapsto N_1(f) - |f(t)|$ est positive et continue ce qui montre que $\forall t \in [0;1],\ |f(t)| = N_1(f) \neq 0$ car $f \neq 0$ et, puisque f est continue donc ne change pas de signe, $f = N_1(f)$ ou $f = -N_1(f)$. Réciproquement, si $f = a$ est constante avec $a \neq 0$, alors $N_0(f) = N_1(f) = |a|$. Les fonctions non nulles telles que $N_0(f) = N_1(f)$ sont les fonctions constantes non nulles.

e. Supposons l'existence d'une telle constante $k > 0$ telle que $\forall f \in E,\ N_1(f) \leqslant kN_0(f)$. Soit, pour tout entier n, la fonction $f_n : [0;1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(t) = t^n$. Alors $f_n \in E$ et $N_0(f_n) = \int_0^1 f_n(t)dt = \dfrac{1}{n+1}$ et $N_1(f_n) = \dfrac{1}{n+1} + \int_0^1 nt^{n-1}dt = \dfrac{1}{n+1} + 1$ ce qui donne $\dfrac{1}{n+1} + 1 \leqslant \dfrac{k}{n+1}$ ou $k \geqslant n+2$. Ceci étant supposé être vrai pour tout entier n, on a notre contradiction. On conclut donc qu'il n'existe pas $k > 0$ telle que $\forall f \in E,\ N_1(f) \leqslant kN_0(f)$. Par conséquent, N_0 ne domine pas N_1 : N_0 et N_1 ne sont pas équivalentes.

22.5 **a.** Le maximum d'un nombre fini de réels positifs étant clairement défini et positif, la fonction N est bien définie sur $\mathbb{R}^n$ quelle que soit la famille $\mathcal{F}$ et elle est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

<u>Séparation</u> : soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $N(x) = 0$, alors $\underset{1 \leqslant i \leqslant m}{\text{Max}} (|(v_i|x)|) = 0$ donc $\forall i \in [\![1;m]\!],\ (v_i|x) = 0$. Ainsi, $x \in \big(\text{Vect}(v_1, \cdots, v_m)\big)^{\perp}$. Mais $\mathcal{F}$ est une famille génératrice par hypothèse ce qui se traduit par $\text{Vect}(v_1, \cdots, v_m) = \mathbb{R}^n$. On a vu dans le cours qu'alors $(\mathbb{R}^n)^{\perp} = \{0\}$, ce qui montre que $x = 0$.

<u>Homogénéité et inégalité triangulaire</u> : par définition $N = ||v_x||_\infty$ où on a posé $v_x = \big((v_i|x)\big)_{1 \leqslant i \leqslant m} \in \mathbb{R}^m$ et où $||\,.\,||_\infty$ est la norme infinie classique (mais dans $\mathbb{R}^m$). Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, par bilinéarité du produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^n$, on a les relations $v_{\lambda x} = \lambda v_x$ et $v_{x+y} = v_x + v_y$. Comme on sait que justement $||\,.\,||_\infty$ est une norme, on en déduit que $N(\lambda x) = ||v_{\lambda x}||_\infty = ||\lambda v_x||_\infty = |\lambda|\,||v_x||_\infty = |\lambda|\,N(x)$ et $N(x+y) = ||v_{x+y}||_\infty = ||v_x + v_y||_\infty \leqslant ||v_x||_\infty + ||v_y||_\infty = N(x) + N(y)$.

N vérifie l'axiome de séparation, l'homogénéité et l'inégalité triangulaire, donc N est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

b. Prenons $m = n$ et $\mathcal{F} = (e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ (bien génératrice), alors si $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$, puisque $\mathcal{F}$ est orthonormale, $x_i = (e_i|x)$ donc $N(x) = \underset{1 \leqslant i \leqslant n}{\text{Max}} |x_i| = ||x||_\infty$ (norme infini classique dans $\mathbb{R}^n$).

c. Prenons $m = 2^n$ et $\mathcal{F} = (v_\varepsilon)_{\varepsilon \in \{-1,1\}^n}$ où, si on note $\varepsilon = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n$, on pose $v_\varepsilon = \sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i e_i$. La famille $\mathcal{F}$ est bien génératrice de $\mathbb{R}^n$ car, par exemple en notant $A_1 = \{\varepsilon \in \{-1,1\}^n \mid \varepsilon_1 = 1\}$ la partie de $\{-1,1\}^n$ de cardinal 2^{n-1}, on a $\sum\limits_{\varepsilon\in A_1} v_\varepsilon = 2^{n-1}e_1$ car dès que $j \geqslant 2$, il existe autant de n-uplets ε dans A_1 tels que $\varepsilon_j = 1$ que de n-uplets tels que $\varepsilon_j = -1$ (2^{n-2} de chaque sorte). Ainsi, $e_1 = \dfrac{1}{2^{n-1}}\sum\limits_{\varepsilon\in A_1} v_\varepsilon$. Bien sûr, par symétrie, si $k \in [\![2;n]\!]$, $e_k = \dfrac{1}{2^{n-1}}\sum\limits_{\varepsilon\in A_k} v_\varepsilon$ avec $A_k = \{\varepsilon \in \{-1,1\}^n \mid \varepsilon_k = 1\}$. De plus, toujours si $x = \sum\limits_{i=1}^n x_ie_i$, pour $\varepsilon \in \{-1,1\}^n$, $(v_\varepsilon|x) = \sum\limits_{i=1}^n \varepsilon_ix_i$ ce qui donne $N(x) = \underset{\varepsilon\in\{-1,1\}^n}{\mathrm{Max}}\left|\sum\limits_{i=1}^n \varepsilon_ix_i\right|$. Il est clair que $\left|\sum\limits_{i=1}^n \varepsilon_ix_i\right|$ est maximale si les ε_ix_i sont tous de même signe, c'est-à-dire si $(\forall i \in [\![1;n]\!],\ \varepsilon_ix_i = |x_i|)$ ou si $(\forall i \in [\![1;n]\!],\ \varepsilon_ix_i = -|x_i|)$. On a donc $N(x) = \sum\limits_{i=1}^n |x_i| = ||x||_1$ (norme 1 classique dans $\mathbb{R}^n$).

d. Supposons qu'il existe une famille génératrice $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $||.||_2 = N$ (N associée à $\mathcal{F}$ comme dans l'énoncé). On peut déjà supposer que deux vecteurs différents de $\mathcal{F}$ ne sont pas colinéaires. En effet, si par exemple v_1 et v_2 sont colinéaires, et si on suppose que v_2 est celui des deux qui a une norme maximale ($||v_2||_2 \geqslant ||v_1||_2$), alors $N(x) = \underset{1\leqslant i\leqslant m}{\mathrm{Max}}(|(v_i|x)|) = \underset{2\leqslant i\leqslant m}{\mathrm{Max}}(|(v_i|x)|) = N'(x)$ avec la famille $\mathcal{F}' = (v_2,\cdots,v_m)$ qui est encore génératrice. Dorénavant, on prendra donc $\mathcal{F}$ avec des vecteurs non deux à deux colinéaires.

Soit $j \in [\![1;m]\!]$ tel que $||v_j||_2 = \underset{1\leqslant i\leqslant m}{\mathrm{Max}}||v_i||_2$. Comme, par CAUCHY-SCHWARZ, pour $i \in [\![1;m]\!]$, on a $|(v_i|v_j)| \leqslant ||v_i||_2||v_j||_2 \leqslant ||v_j||_2^2$ par définition de j, on en déduit que $N(v_j) = \underset{1\leqslant i\leqslant m}{\mathrm{Max}}(|(v_i|v_j)|) = ||v_j||_2^2$. Puisqu'on a supposé que $N = ||.||_2$, on a aussi $N(v_j) = ||v_j||_2^2 = ||v_j||_2$ donc $||v_j|| = 1$ (on ne peut pas avoir $||v_j||_2 = 0$ sinon tous les vecteurs de $\mathcal{F}$ seraient nuls par définition de j et $\mathcal{F}$ ne pourrait pas être génératrice).

On prend un vecteur v unitaire qui est orthogonal à v_j, on le peut car $n \geqslant 2$. Et on pose alors $x = v_j + \lambda v$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Alors, d'après PYTHAGORE, $||x||_2^2 = ||v_j||_2^2 + \lambda^2||v||_2^2 > ||v_j||_2^2$ donc $||x||_2 > ||v||_2 = 1$. On va montrer que, pour λ assez petit, le vecteur x vérifie $N(x) = N(v_j)$ (les boules unités pour les normes N sont des polyèdres et, comme v_j est sur la sphère unité $B_N(0_{\mathbb{R}^n},1)$, la "face" du polyèdre contenant v_j est une partie du plan passant par v_j et de vecteur normal v_j - on l'a constaté pour les normes 1 et ∞ en **b.** et **c.**).

D'abord, comme $v_j \perp v$, on a $|(v_j|v)| = |(v_j|v_j + \lambda v)| = |(v_j|v_j) + 0| = ||v_j||_2^2 = 1$. Évaluons, pour $i \in [\![1;m]\!]$ tel que $i \neq j$, la quantité $(v_i|x) = (v_i|v_j + \lambda v) = (v_i|v_j) + \lambda(v_i|v)$. Par inégalité triangulaire et puisque l'on a $||v_i||_2 \leqslant ||v_j||_2 = 1$, $|(v_i|x)| \leqslant |(v_i|v_j)| + |\lambda|\,|(v_i|v)| \leqslant |(v_i|v_j)| + |\lambda|\,||v_i||_2\,||v||_2 \leqslant |(v_i|v_j)| + |\lambda|$. Comme v_i n'est pas colinéaire à v_j, d'après le cas d'égalité dans l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, on a $|(v_i|v_j)| < ||v_i||_2||v_j||_2 = ||v_i||_2 \leqslant 1$ donc $|(v_i|v_j)| < 1$. Il suffit donc de choisir λ tel que $0 < |\lambda| \leqslant 1 - |(v_i|v_j)|$ pour qu'on ait $|(v_i|x)| \leqslant 1$. Il faut maintenant rendre ce choix indépendant de i.

Posons donc $\lambda_0 = \underset{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ i\neq j}}{\mathrm{Min}}(1 - |(v_i|v_j)|) > 0$, alors si on choisit $\lambda \in [-\lambda_0;\lambda_0]$, on a donc $\forall i \in [\![1;m]\!]$, $|(v_i|x)| \leqslant 1$ et $|(v_j|x)| = 1$ donc $N(x) = 1$. Comme on a vu que $||x||_2 > 1$, on ne peut donc pas avoir $N = ||.||_2$.

Ainsi, la norme 2 classique $||.||_2$ de $\mathbb{R}^n$ n'est pas une norme N obtenue comme ceci.

22.6 **a.** Supposons que f est k-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, alors $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$, alors, pour tout réel x tel que $|x - x_0| \leqslant \alpha = \dfrac{\varepsilon}{k+1}$, on a $|f(x) - f(x_0)| \leqslant k|x-x_0| \leqslant \dfrac{\varepsilon k}{k+1} \leqslant \varepsilon$. Ceci prouve que f est continue en x_0 et, comme ceci est valable pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, que f est continue sur $\mathbb{R}$.

b. Soit $f : x \mapsto |x|$. La fonction f n'est pas dérivable en 0. Pourtant, f est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. En effet, si

$(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \leqslant y$, traitons quatre cas :

- si $0 \leqslant x \leqslant y$, on a $|f(x)-f(y)| = |x-y| \leqslant 1.|x-y|$.
- si $x \leqslant y \leqslant 0$, on a $|f(x)-f(y)| = |(-x)-(-y)| = |y-x| = |x-y| \leqslant 1.|x-y|$.
- si $x \leqslant 0 \leqslant y \leqslant |x|$, on a $|f(x)-f(y)| = |(-x)-y| = |x+y| = -x-y \leqslant 1.|x-y| = y-x$ car $-y \leqslant y$.
- si $x \leqslant 0 \leqslant |x| \leqslant y$, on a $|f(x)-f(y)| = |(-x)-y| = |x+y| = x+y \leqslant 1.|x-y| = y-x$ car $x \leqslant -x$.

Le fait que f soit lipschitzienne n'implique donc pas que f soit dérivable.

22.7 **a.** Soit $(A,B) \in E^2$, la case (i,j) de A^TB contient, par définition du produit matriciel et de la transposée, le terme $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{k,i}b_{k,j}$. Ainsi, $\text{Tr}\,(A^TB) = \sum\limits_{i=1}^{n}\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} a_{k,i}b_{k,i}\Big) = \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}b_{i,j} =< A,B >$ en remplaçant k par i, i par j. $||A||$ est donc la norme euclidienne (associée au produit scalaire canonique) de A.

b. Pour $(u,v) \in (\mathbb{R}^m)^2$, si on écrit $u = (u_1,\cdots,u_m)$ et $v = (v_1,\cdots,v_m)$, on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz (pour le produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^m$) : $|(u|v)| = \Big|\sum\limits_{i=1}^{m} u_iv_i\Big| \leqslant \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} u_i^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} v_i^2} = ||u||\,||v||$.

Si on note la matrice $C = AB = (c_{i,j})_{1\leqslant i,j \leqslant n}$, on a $c_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}$ par définition du produit matriciel donc, avec l'inégalité précédente élevée au carré, en posant $u_k = a_{i,k}$ et $v_k = b_{k,j}$ et $m = n$, il vient $||AB||^2 \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n}\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k}^2\Big) \times \Big(\sum\limits_{k=1}^{n} b_{k,j}^2\Big)\right) = \sum\limits_{i=1}^{n}\left(\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k}^2\Big)\sum\limits_{j=1}^{n}\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} b_{k,j}^2\Big)\right)$ or $\sum\limits_{j=1}^{n}\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} b_{k,j}^2\Big) = ||B||^2$ donc $||AB||^2 \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n}\left(||B||^2\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k}^2\Big)\right) = ||A||^2\,||B||^2$.

c. On a déjà $AM_0 = M_0A$ par hypothèse. Si on suppose, pour un entier $p \in \mathbb{N}$, que $AM_p = M_pA$, alors $AM_{p+1} = A(2M_p - M_pAM_p) = 2AM_p - (AM_p)^2 = 2M_pA - (M_pA)^2 = (2M_p - M_pAM_p)A = M_{p+1}A$ par hypothèse de récurrence. Ainsi, par principe de récurrence, on a $\forall p \in \mathbb{N},\ AM_p = M_pA$.

Pour $p \in \mathbb{N}$, $||I_n - AM_{p+1}|| = ||I_n - 2AM_p + AM_pAM_p|| = ||(I_n - AM_p)^2|| \leqslant ||I_n - AM_p||^2$ d'après la question **b.**. On a $||I_n - AM_0|| = ||I_n - AM_0||^{2^0}$ et, si on suppose que $||I_n - AM_p|| \leqslant ||I_n - AM_0||^{2^p}$ pour un entier $p \in \mathbb{N}$, alors $||I_n - AM_{p+1}|| \leqslant ||I_n - AM_p||^2 \leqslant (||I_n - AM_0||^{2^p})^2 = ||I_n - AM_0||^{2^{p+1}}$. Par principe de récurrence, $\forall p \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant ||I_n - AM_p|| \leqslant ||I_n - AM_0||^{2^p}$.

Comme $||I_n - AM_0|| < 1$ par hypothèse, on a $\lim\limits_{p\to+\infty} ||I_n - AM_0||^{2^p} = 0$ et, par encadrement avec l'inégalité précédente, on en déduit que $\lim\limits_{p\to+\infty} ||I_n - AM_p|| = 0$, ce qui prouve que $\lim\limits_{p\to+\infty} AM_p = I_n$. On a aussi $||A^{-1} - M_p|| = ||A^{-1}(I_n - AM_p)|| \leqslant ||A^{-1}||\,||I_n - AM_p||$ donc, de même, $\lim\limits_{p\to+\infty} M_p = A^{-1}$.

La suite $\big(||I_n - AM_0||^{2^p}\big)_{p\in\mathbb{N}}$ tend très vite vers 0 donc la convergence de $(M_p)_{p\in\mathbb{N}}$ vers A^{-1} est extrêmement rapide, seul le choix de la matrice M_0 telle que $||I_n - AM_0|| < 1$ reste à faire.

22.8 **a.** Si $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ avec $|a| < 1$ et $|b| < 1$, comme on a $A^k = \begin{pmatrix} a^k & 0 \\ 0 & b^k \end{pmatrix}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, il vient $B_n(A) = I_2 + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{4^k(2k-1)}\dbinom{2k}{k}A^k = \begin{pmatrix} a_n & 0 \\ 0 & b_n \end{pmatrix}$ par définition avec $a_n = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{4^k(2k-1)}\dbinom{2k}{k}a^k$ et $b_n = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{4^k(2k-1)}\dbinom{2k}{k}b^k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'après le cours, la suite $(B_n(A))_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. La série entière $\sum\limits_{k\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{k-1}}{4^k(2k-1)}\dbinom{2k}{k}z^k$ a pour rayon $R = 1$ par la règle de D'ALEMBERT car en notant $u_k = \dfrac{(-1)^{k-1}}{4^k(2k-1)}\dbinom{2k}{k}$, on a $\lim\limits_{k\to+\infty}\left|\dfrac{u_{k+1}}{u_k}\right| = 1$ puisque $\forall k \geqslant 1,\ \left|\dfrac{u_{k+1}}{u_k}\right| = \dfrac{2k-1}{4(2k+1)} \times \dfrac{(2k+2)!k!k!}{(2k)!(k+1)!(k+1)!} = \dfrac{2k-1}{4(2k+1)} \times \dfrac{(2k+2)(2k+1)}{(k+1)^2}$. Comme $|a| < 1$ et $|b| < 1$, les deux séries $\sum\limits_{k\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{k-1}}{4^k(2k-1)}\dbinom{2k}{k}a^k$ et $\sum\limits_{k\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{k-1}}{4^k(2k-1)}\dbinom{2k}{k}b^k$ convergent donc les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Ainsi, la suite $(B_n(A))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

b. Comme I_2 et N commutent, on a $\forall n \geqslant 1,\ A^n = \sum\limits_{k=0}^{n}\dbinom{n}{k}(\lambda I_2)^k N^{n-k} = \lambda^n I_2 + n\lambda^{n-1}N$ par le binôme de NEWTON car $\forall k \geqslant 2,\ N^k = 0$. Pour $n \geqslant 2$, $B_n(A) = I_2 + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{4^k(2k-1)}\dbinom{2k}{k}(\lambda^n I_2 + n\lambda^{n-1}N)$ donc $B_n(A) = \left(1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{4^k(2k-1)}\dbinom{2k}{k}\lambda^k\right)I_2 + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{4^k(2k-1)}\dbinom{2k}{k}k\lambda^{k-1}\right)N$. On a vu en **a.** que le rayon de convergence de $\sum\limits_{k\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{k-1}}{4^k(2k-1)}\dbinom{2k}{k}z^k$ vaut 1 donc celui de la "série dérivée" $\sum\limits_{k\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{k-1}}{4^k(2k-1)}\dbinom{2k}{k}kz^{k-1}$ vaut aussi 1 d'après le cours. Comme $|\lambda| < 1$ par hypothèse, les deux séries $\sum\limits_{k\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{k-1}}{4^k(2k-1)}\dbinom{2k}{k}\lambda^k$ et $\sum\limits_{k\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{k-1}}{4^k(2k-1)}\dbinom{2k}{k}k\lambda^{k-1}$ convergent donc, d'après l'expression (1), la suite $(B_n(A))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

c. Traitons les deux cas quant à la diagonalisabilité de A :

- Si A est diagonalisable, alors A est semblable à une matrice $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ du type de la question **a.** avec a et b qui sont les valeurs propres de A donc qui vérifient bien $|a| < 1$ et $|b| < 1$ par hypothèse. Il existe donc $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $A = PDP^{-1}$. On a classiquement, $\forall k \in \mathbb{N},\ A^k = PD^kP^{-1}$ donc $B_n(A) = P\left(I_2 + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{4^k(2k-1)}\dbinom{2k}{k}D^k\right)P^{-1} = PB_n(D)P^{-1}$. On sait d'après **a.** que $(B_n(D))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers D' et, comme $\varphi : M \mapsto PMP^{-1}$ est linéaire en dimension finie, elle est continue donc, par caractérisation séquentielle de la continuité, $(B_n(A))_{n\in\mathbb{N}} = (\varphi(B_n(D)))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $B = \varphi(D')$.
- Si A n'est pas diagonalisable, comme χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$, A est tout de même trigonalisable et on a forcément, d'après le cours, $\chi_A = (X-\lambda)^2$ car χ_A ne peut pas être scindé à racines simples puisque A n'est pas diagonalisable. Ainsi, il existe $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $A = PTP^{-1}$ avec $T = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ et $\alpha \neq 0$. En posant $N = \alpha E_{1,2}$, on a bien N nilpotente d'indice 2 donc, d'après la question **b.**, la suite $(B_n(T))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers T'. Comme avant, puisque $B_n(A) = PB_n(T)P^{-1}$ et que $\varphi : M \mapsto PMP^{-1}$ est continue, $(B_n(A))_{n\in\mathbb{N}} = (\varphi(B_n(T)))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $B = \varphi(T')$.

Comme $\forall k \geqslant 1,\ \dbinom{1/2}{k} = \dfrac{(-1)^{k-1}}{4^k(2k-1)}\dbinom{2k}{k}$ par un calcul classique, pour tout réel $x \in]-1;1[$, on a la relation $\sqrt{1+x} = 1 + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{k-1}}{4^k(2k-1)}\dbinom{2k}{k}x^k = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k x^k$ en notant à nouveau $u_k = \dfrac{(-1)^{k-1}}{4^k(2k-1)}\dbinom{2k}{k}$ pour $k \geqslant 1$ et $u_0 = 1$. Comme $\forall x \in]-1;1[,\ (\sqrt{1+x})(\sqrt{1+x}) = 1+x$, on a $\left(\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k x^k\right) \times \left(\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k x^k\right) = 1+x$ donc, par identification des coefficients d'une série entière de rayon strictement positif, on a $u_0^2 = u_0 = 1$, $2u_0u_1 = 1$ car $u_1 = 1$ (on le savait déjà) mais surtout $\forall n \geqslant 2,\ \sum\limits_{k=0}^{n} u_k u_{n-k} = 0$. Ainsi, si on prend $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, par produit de CAUCHY, on a $\left(\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k z^k\right) \times \left(\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k z^k\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}\right)z^n = 1+z$ (1) donc

$f(z)^2 = 1 + z$ en notant $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k z^k$ pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$.

De même, en notant $g(z) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{k-1}}{4^k(2k-1)}\dbinom{2k}{k} k z^{k-1}$ pour $|z| < 1$, on a $\forall x \in]-1;1[,\ g(x) = f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$ car $f(x) = \sqrt{1+x}$ donc $2f(x)g(x) = 1$. Comme avant, en passant par l'égalité des coefficients qui provient d'un produit de CAUCHY, on montre que $\forall |z| < 1,\ 2f(z)g(z) = 1$. À nouveau, on traite les deux cas :

- Si A est diagonalisable, il existe $P \in GL_2(\mathbb{C})$ tel que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ avec $|a| < 1$ et $|b| < 1$. D'après ce qui précède, $(B_n(D))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $D' = \begin{pmatrix} f(a) & 0 \\ 0 & f(b) \end{pmatrix}$ et, en élevant au carré, il vient $D'^2 = \begin{pmatrix} f(a)^2 & 0 \\ 0 & f(b)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a & 0 \\ 0 & 1+b \end{pmatrix} = I_2 + D$ d'après (1). Ainsi, $B = \varphi(D') = PD'P^{-1}$, et on obtient bien la relation $B^2 = PD'^2P^{-1} = P(I_2 + D)P^{-1} = I_2 + A$.
- Si A n'est pas diagonalisable, A est trigonalisable et il existe $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $A = PTP^{-1}$ avec $T = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ et $\alpha \neq 0$ donc $T = \lambda I_2 + N$ en posant $N = \alpha E_{1,2}$. On a vu qu'alors la suite $(B_n(T))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $T' = f(\lambda)I_2 + g(\lambda)N$. À nouveau, $T'^2 = f(\lambda)^2 I_2 + 2f(\lambda)g(\lambda)N$ car $N^2 = 0$ donc $T'^2 = (1+\lambda)I_2 + N = I_2 + (\lambda I_2 + N) = I_2 + T'$. Comme avant, $B = \varphi(T') = PT'P^{-1}$, et on obtient bien la relation $B^2 = PT'^2P^{-1} = P(I_2 + T')P^{-1} = I_2 + A$.

Dans les deux cas, la suite $(B_n(A))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ vérifiant $B^2 = I_2 + A$.

22.9 **a.** Soit $h : [0;1] \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = f(x) - g(x)$. Alors $h > 0$ sur $[0;1]$ par hypothèse. Comme f et g sont continues, h l'est aussi sur le segment $[0;1]$ donc elle est bornée et atteint ses bornes. Ainsi, il existe $a \in [0;1]$ tel que $h(a) = \underset{x\in[0;1]}{\mathrm{Min}}\ h(x) = \alpha > 0$.

<u>Initialisation</u> : pour $n = 0$, $\forall x \in [0;1],\ f^0(x) - g^0(x) = \mathrm{id}_{[0;1]}(x) - \mathrm{id}_{[0;1]}(x) = x - x \geqslant 0.\alpha$. Pour $n = 1$, par construction de α, $\forall z \in [0;1],\ f(z) - g(z) = h(z) \geqslant \alpha = 1.\alpha \quad (1)$.

<u>Hérédité</u> : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall y \in [0;1],\ f^n(y) - g^n(y) \geqslant n\alpha \quad (2)$.
Soit $x \in [0;1]$, $f^{n+1}(x) - g^{n+1}(x) = f^{n+1}(x) - f^n(g(x)) + f^n(g(x)) - g^{n+1}(x)$ qu'on réécrit sous la forme $f^{n+1}(x) - g^{n+1}(x) = (f(f^n(x)) - g(f^n(x))) + (f^n(g(x)) - g^n(g(x)))$ car comme f et g commutent, $f^n \circ g = g \circ f^n$.
En prenant $z = g^n(x) \in [0;1]$ dans (1) et $y = g(x)$ dans (2), $f^{n+1}(x) - g^{n+1}(x) \geqslant \alpha + n\alpha = (n+1)\alpha$.

Par principe de récurrence, on a donc $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0;1],\ f^n(x) - g^n(x) \geqslant n\alpha$.

Puisque $[0;1]$ est stable par f et g, par récurrence, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0;1],\ 0 \leqslant f^n(x) \leqslant 1$ et $0 \leqslant g^n(x) \leqslant 1$.
Dès que $n\alpha > 1$, comme $\forall x \in [0;1],\ f^n(x) - g^n(x) \leqslant 1 - 0 = 1$, $f^n(x) - g^n(x) \geqslant n\alpha$ est impossible.

b. Raisonnons par l'absurde. Si on avait $\forall c \in [0;1],\ f(c) \neq g(c)$, alors la fonction $h = f - g$ ne s'annulerait pas sur $[0;1]$. Or cette fonction est continue donc elle garderait un signe constant sur $[0;1]$ par le théorème des valeurs intermédiaires. Traitons deux cas :

- Soit $h = f - g > 0$ sur $[0;1]$, alors on a vu la contradiction à la question précédente.
- Soit $h = f - g < 0$, en posant $\alpha = \underset{x\in[0;1]}{\mathrm{Max}}\,(h(x)) < 0$, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0;1],\ f^n(x) - g^n(x) \leqslant n\alpha$ ce qui devient absurde dès que $n\alpha < -1$ car $\forall x \in [0;1],\ f^n(x) - g^n(x) \geqslant 0 - 1 = -1$ comme avant.

Dans tous les cas, on a une impossibilité donc h s'annule au moins une fois sur $[0;1]$: $\exists c \in [0;1],\ f(c) = g(c)$.

22.10 **a.** Soit $\varphi : [0;1] \to \mathbb{R}$ telle que $\varphi(x) = f(x) - x$. Comme f est continue sur $[0;1]$, φ est aussi continue par opérations sur $[0;1]$. Or $\varphi(0) = f(0) \geqslant 0$ car $f(0) \in [0;1]$ et $\varphi(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$ car $f(1) \in [0;1]$. Ainsi, par le théorème des valeurs intermédiaires, comme $\varphi(0)\varphi(1) \leqslant 0$ et que φ est continue sur $[0;1]$, il existe un réel $\alpha \in [0;1]$ tel que $\varphi(\alpha) = 0$, ce qui justifie que $\alpha \in A$ donc $A \neq \emptyset$.

A est donc une partie non vide de $\mathbb{R}$, majorée par 1 et minorée par 0. La propriété fondamentale de $\mathbb{R}$ montre que A admet une borne supérieure $M \leqslant 1$ et une borne inférieure $m \geqslant 0$. Par caractérisation de la borne supérieure, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers M. On a donc $\forall n \in \mathbb{N},\ f(u_n) = u_n \quad (R)$ et, en passant à la limite dans cette relation (R) et par caractérisation séquentielle de la continuité de f, on a $f(M) = M$. Ainsi, $M \in A$ et M majore A assure que M est le maximum de A. De même, m est le minimum de A.

b. Posons $h = f - g$, de sorte que h est continue sur $[0;1]$ par opérations. Comme $f \circ g = g \circ f$, en l'appliquant en M, on a $f(g(M)) = g(f(M)) = g(M)$ donc $g(M) \in A$ ce qui montre que $g(M) \leqslant M = \mathrm{Max}(A)$. Ainsi, $h(M) = f(M) - g(M) = M - g(M) \geqslant 0$. De même, $f(g(m)) = g(f(m)) = g(m)$ donc $g(m) \in A$ ce qui montre que $g(m) \geqslant m = \mathrm{Min}(A)$. Ainsi, $h(m) = f(m) - g(m) = m - g(m) \leqslant 0$. À nouveau, par le théorème des valeurs intermédiaires, puisque h est continue sur $\widetilde{[m;M]}$ et $h(m)h(M) \leqslant 0$, il existe un réel $c \in \widetilde{[m;M]} \subset [0;1]$ tel que $h(c) = 0$, ce qui revient à $f(c) = g(c)$.