

Correction du DM11
Inspiré de CCP PC 2002 maths 1

Partie I

1. On vérifie que $P = (X - 1)(2X - 1)^2$ est annulateur de A
2. On cherche le reste de la division euclidienne de X^n par P : $X^n = PQ + aX^2 + bX + c$. Avec $X = 1$ et $X = \frac{1}{2}$, on obtient les équations $1 = a + b + c$ et $2^{-n} = \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c$; en dérivant, puis avec $X = \frac{1}{2}$, on obtient la troisième équation $n2^{1-n} = a + b$. On en déduit $\begin{cases} a = 4 - (n+1)2^{2-n} \\ b = 2^{2-n} - 4 + 6n2^{-n} \\ c = 1 - n2^{1-n} \end{cases}$ et $A^n = \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} 1-2n & 2n & 0 \\ -2n & 2n+1 & 0 \\ -2n & 2n+1-2^n & 2^n \end{pmatrix}$, pour $n \geq 1$ (cette expression n'est pas du tout utile pour calculer la limite) ou plutôt, en fonction de A^2 , A et I_3 : $A^n = (4 - (n+1)2^{2-n})A^2 + (2^{2-n} - 4 + 6n2^{-n})A + (1 - n2^{1-n})I_3$, pour $n \geq 1$
3. On en déduit $\lim_{n \rightarrow +\infty} A^n = 4A^2 - 4A + I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ L'endomorphisme associé est un projecteur de rang 1 : c'est le projecteur sur $\text{Vect}\{(0, 0, 1)\}$ parallèlement au plan $\text{Vect}\{(1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$.
4. Par définition, on a $\lambda \in \text{Sp}(A)$ si et seulement si $\ker(A - \lambda I_3) \neq \{0\}$ donc si et seulement si $\lambda I_3 - A$ n'est pas inversible.
On calcule $\det(\lambda I_3 - A) = \frac{1}{4}(2\lambda - 1)^2(\lambda - 1)$ donc $\text{Sp}(A) = \left\{ \frac{1}{2}, 1 \right\}$ et $\rho(A) = 1$

Partie II

1. ψ est une norme (vu en cours); on peut aussi dire que ψ est la norme N_∞ sur \mathbb{C}^{n^2} en identifiant une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à un vecteur de \mathbb{C}^{n^2} .
Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ alors $\psi(A) = 1$ et $\psi(A^2) = 2$ donc $\psi(A)^2 < \psi(A^2)$.
2. a) θ est linéaire donc lipschitzienne et il existe C_A telle que θ soit C_A -lipschitzienne, ie $N(AX) \leq C_A N(X)$
b) L'ensemble considéré est une partie de \mathbb{R} non vide (car $\mathbb{C}^n \setminus \{0\} \neq \emptyset$) et majoré par C_A donc $\widetilde{N}(A)$ existe
3. a) Si $\widetilde{N}(A) = 0$ alors $N(AX) = 0$ pour tout $X \neq 0$ donc $AX = 0$ pour tout X (même nul) donc $A = 0$; la réciproque est évidente.
b) Pour $X \neq 0$, on a $\frac{N(\lambda AX)}{N(X)} = |\lambda| \frac{N(AX)}{N(X)} \leq |\lambda| \widetilde{N}(A)$ donc $\widetilde{N}(\lambda A) \leq |\lambda| \widetilde{N}(A)$
c) On en déduit, pour $\lambda \neq 0$, $\widetilde{N}(A) = \widetilde{N}\left(\frac{1}{\lambda}(\lambda A)\right) \leq \frac{1}{|\lambda|} \widetilde{N}(\lambda A)$, ce qui donne $\widetilde{N}(\lambda A) = |\lambda| \widetilde{N}(A)$ (qui est valable aussi si $\lambda = 0$)
d) Pour $X \neq 0$, on a $\frac{N((A+B)X)}{N(X)} \leq \frac{N(AX) + N(BX)}{N(X)} \leq \widetilde{N}(A) + \widetilde{N}(B)$ donc $\widetilde{N}(A+B) \leq \widetilde{N}(A) + \widetilde{N}(B)$
e) Si $X \neq 0$ alors $\frac{N(AX)}{N(X)} \leq \widetilde{N}(A)$ donc $N(AX) \leq \widetilde{N}(A)N(X)$ (valable aussi si $X = 0$).
f) On vient de prouver que \widetilde{N} est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; reste à vérifier qu'elle est matricielle : pour tout $X \in \mathbb{C}^n$, on a $N(ABX) \leq \widetilde{N}(A)N(BX) \leq \widetilde{N}(A)\widetilde{N}(B)N(X)$ donc $\widetilde{N}(AB) \leq \widetilde{N}(A)\widetilde{N}(B)$; ce qui justifie bien que \widetilde{N} est une norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
4. a) $|(AX)_i| = \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j \right| \leq N_\infty(X) \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \leq M_A N_\infty(X)$ donc $N_\infty(AX) \leq M_A N_\infty(X)$
b) Y est choisi de sorte que : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $|y_i| = 1$ et $a_{i_0 j} y_j = |a_{i_0 j}|$, on a alors $N_\infty(Y) = 1$ et, la coordonnée d'indice i_0 de AY est $(AY)_{i_0} = \sum_{j=1}^n a_{i_0 j} y_j = M_A$ donc $N_\infty(AY) \geq M_A N_\infty(Y) = M_A$ ce qui donne, avec l'inégalité inverse prouvée à la question précédente, $\widetilde{N}_\infty(A) = M_A$
5. Si $\lambda \in \text{Sp}(A)$ alors il existe $X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$. On en déduit $|\lambda|N(X) = N(AX) \leq \widetilde{N}(A)N(X)$ donc comme $X \neq 0$, on a $|\lambda| \leq \widetilde{N}(A)$. Ceci étant valable pour tout $\lambda \in \text{Sp}(A)$, on a $\rho(A) = |\lambda| \leq \widetilde{N}(A)$

6. Si $\lambda \in \text{Sp}(A)$ alors il existe $X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$ donc $A^k X = \lambda^k X$ et $\lambda^k \in \text{Sp}(A^k)$ puisque $X \neq 0$. On a donc $0 \leq \rho(A)^k \leq \rho(A^k) \leq \widetilde{N}(A^k)$ donc si $A^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ alors $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(A)^k = 0$ ce qui donne $\boxed{\rho(A) < 1}$

7. a) fait juste avant !

b) Soit $\lambda \in \text{Sp}(A)$ et $X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$, on a alors $\alpha AX = \alpha \lambda X$ donc $\alpha \lambda \in \text{Sp}(\alpha A)$. De même, si $\alpha \neq 0$ et $\lambda \in \text{Sp}(\alpha A)$, il existe $X \neq 0$ tel que $\alpha AX = \lambda X$ donc $AX = \frac{\lambda}{\alpha} X$ et $\frac{\lambda}{\alpha} \in \text{Sp}(A)$. On en déduit $\text{Sp}(\alpha A) = \{\alpha \lambda, \lambda \in \text{Sp}(A)\}$ (ce qui est aussi vrai si $\alpha = 0$) et donc $\boxed{\rho(\alpha A) = |\alpha| \rho(A)}$

c) $\rho(A_\varepsilon) = \frac{\rho(A)}{\rho(A) + \varepsilon} < 1$ donc $A_\varepsilon^k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$ donc il existe k_ε tel que $k \geq k_\varepsilon \Rightarrow \widetilde{N}\left(\frac{A^k}{(\rho(A) + \varepsilon)^k}\right) \leq 1$.

d) On a donc pour tout $\varepsilon > 0$: $\rho(A) \leq \left[\widetilde{N}(A^k)\right]^{\frac{1}{k}} \leq \rho(A) + \varepsilon$ pour tout entier $k \geq k_\varepsilon$ ce qui signifie que

$$\boxed{\lim_{k \rightarrow +\infty} \left[\widetilde{N}(A^k)\right]^{\frac{1}{k}} = \rho(A)}$$

Partie III

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ & \end{pmatrix}$

2. a) $0 \leq a_{i,j} \leq b_{i,j}$ et $0 \leq a'_{i,j} \leq b'_{i,j}$ donc $0 \leq a_{i,k} a'_{k,j} \leq b_{i,k} b'_{k,j}$ puis $0 \leq \sum_{k=1}^n a_{i,k} a'_{k,j} \leq \sum_{k=1}^n b_{i,k} b'_{k,j}$

b) récurrence sur k

c) Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\sum_{j=1}^n a_{i,j} \leq \sum_{j=1}^n b_{i,j}$ donc $\widetilde{N}_\infty(A) = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n a_{i,j} \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n b_{i,j} = \widetilde{N}_\infty(B)$

d) Si $0 \leq A \leq B$ alors $0 \leq A^k \leq B^k$ donc $\widetilde{N}_\infty(A^k) \leq \widetilde{N}_\infty(B^k)$ puis $\left[\widetilde{N}_\infty(A^k)\right]^{\frac{1}{k}} \leq \left[\widetilde{N}_\infty(B^k)\right]^{\frac{1}{k}}$ et en faisant tendre k vers $+\infty$, on a $\boxed{\rho(A) \leq \rho(B)}$

e) Si $A \neq 0$, il suffit de prendre $c = \max_{1 \leq i,j \leq n} \frac{a_{i,j}}{b_{i,j}}$, si $A = 0$, on prend $c = \frac{1}{2}$. On a alors $\rho(A) \leq \rho(cB) = c\rho(B) < \rho(B)$ car $\rho(B) \neq 0$ (en effet, comme $B > 0$, on a $\text{Tr}(B) > 0$ donc B possède une valeur propre non nulle car $\text{Tr}(B)$ est la somme des valeurs propres complexes de B car χ_B est scindé dans \mathbb{C}).