

DEVOIR 21 : ESPACES VECTORIELS NORMÉS

PSI 1 2023-2024

mardi 12 mars 2024

QCM

- 1** Domination des normes : soit E un espace vectoriel muni de deux normes N_1 et N_2 telles que $N_1 \leq \beta N_2$ pour $\beta > 0$ et A une partie non vide de E . Pour $k \in \{1, 2\}$, on note $B_k(0_E, r)$ la boule ouverte de centre 0_E et de rayon $r > 0$ pour la norme N_k
- 1.1** $A \subset B_1(0_E, r) \implies A \subset B_2(0_E, \beta r)$ **1.3** si E de dimension finie, $\exists \alpha > 0$ tel que $N_2 \leq \alpha N_1$
- 1.2** $A \subset B_2(0_E, r) \implies A \subset B_1(0_E, \beta r)$ **1.4** si $\exists \alpha > 0$, $N_2 \leq \alpha N_1$, alors A bornée pour $N_1 \iff A$ bornée pour N_2
- 2** Topologie : soit E un espace vectoriel normé, $(U_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de E , U_i^c désigne le complémentaire de U_i , a un vecteur de E et A une partie de E
- 2.1** a est intérieur à A si $\exists r > 0$, $B(a, r) \subset A$ **2.3** $\bigcup_{i \in I} U_i$ est une partie ouverte de E
- 2.2** a est adhérent à A si $\exists r > 0$, $B(a, r) \cap A \neq \emptyset$ **2.4** $\bigcap_{i \in I} U_i^c$ est une partie fermée de E
- 3** Caractérisation séquentielle : soit E un espace vectoriel normé, A une partie de E , $x \in E$ et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$
- 3.1** $(\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} \text{ telle que } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x) \implies x \in \bar{A}$
- 3.2** $(\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} \text{ telle que } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x) \iff x \in \bar{A}$
- 3.3** $(\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}, \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(x)) \implies f \text{ continue en } x$
- 3.4** $(\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}, \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(x)) \iff f \text{ continue en } x$
- 4** Trigonométrie des rotations et symétries : soit $x \in \mathbb{R}$
- 4.1** $x \notin 0[\frac{\pi}{2}] \implies \tan(\frac{\pi}{2} + x) = \frac{1}{\tan x}$ **4.3** $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$
- 4.2** $\sin(\pi + x) = \cos(\frac{\pi}{2} + x)$ **4.4** $\cos(\pi + x) = \cos x$

Énoncé Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, a un vecteur de E et A une partie de E .

Donner une condition nécessaire et suffisante (portant sur les suites) pour que a soit adhérent à A .

Donner une condition nécessaire et suffisante (portant sur les suites) pour que A soit une partie fermée de E .

Preuve Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $n \in \mathbb{N}^*$ et $U_1, \dots, U_n$ des ouverts de E .

Montrer que $U = \bigcap_{k=1}^n U_k$ est un ouvert de E .

Exercice 1 Soit $E = \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ muni de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ associée au produit scalaire canonique

$(A|B) = \text{tr}(A^T B)$. On admet que $\forall (U, V) \in E^2$, $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$. Soit A, B deux matrices de E et $\|A\| < 1$ et $I_p - A$ inversible, on définit la suite de matrices $(U_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $U_0 = I_p$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n + B$.

a. Montrer que si $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = M_0$, alors $M_0 = (I_p - A)^{-1} B$.

b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - M_0 = A(U_n - M_0)$.

c. En déduire que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge bien vers M_0 .

Exercice 2 Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni de n'importe quelle norme et $A = \left\{ P \in E \mid 0 \leq \int_0^1 P(x) dx \leq 1 \right\}$.

Est-ce que A est une partie convexe ? bornée ? fermée ? ouverte ?

DEVOIR 21	NOM :	PRÉNOM :
-----------	-------	----------

QCM Répondre dans le tableau ci-dessous au QCM : mettre une croix dans la case de la ligne i colonne j revient à déclarer la question i,j vraie. Ne rien mettre revient à la déclarer fausse.

i · j	1	2	3	4	Fautes
1					
2					
3					
4					

Énoncé

Preuve

Exercice 1

Exercice 2

i · j	1	2	3	4	Fautes
1		X	X	X	
2	X		X	X	
3	X	X		X	
4		X	X		

1.1 Faux : inégalités dans le mauvais sens **1.2** Vrai : $x \in A \implies N_2(x) < r \implies N_1(x) \leq \beta N_2(x) < \beta r$ **1.3** Vrai : en dimension finie toutes les normes sont équivalentes **1.4** Vrai : alors N_1 et N_2 sont équivalentes.

2.1 Vrai : cours **2.2** Faux : a est adhérent à A si $\forall r > 0, B(a, r) \cap A \neq \emptyset$ **2.3** Vrai : une réunion d'ouverts en est un **2.4** Vrai : U_i^c est un fermé par définition et une intersection de fermés en est un.

3.1 et **3.2** Vrais : cours **3.3** Faux : $\lfloor 1/n \rfloor \rightarrow 0 = \lfloor 0 \rfloor$ et $\lfloor \cdot \rfloor$ n'est pas continue en 0 **3.3** Vrai : cours.

4.1 Faux : c'est $\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\frac{1}{\tan x}$ **4.2** Vrai : $\sin(\pi + x) = -\sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ **4.3** Vrai : faire un dessin **4.4** Faux : $\cos(\pi + x) = -\cos x$.

Énoncé

Par un théorème du cours :

- a est adhérent à A si et seulement s'il existe $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $a = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.
- A est fermée si et seulement si toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ convergente vérifie $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \in A$.

Preuve

Soit $a \in U$, alors pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, comme U_k est un ouvert et que $a \in U$, il existe $r_k > 0$ tel que $B(a, r_k) \subset U_k$. Posons $r = \min_{1 \leq k \leq n} r_k > 0$, alors $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, B(a, r) \subset B(a, r_k) \subset U_k$ car $r \leq r_k$ donc, comme $B(a, r_k) \subset U_k$, on a aussi $B(a, r) \subset U_k$. Ainsi, $B(a, r) \subset U$. Ceci prouve que U est un ouvert.

Exercice 1

a. $(u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = M_0$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = M_0$ par hypothèse. Par opérations, on a aussi $\lim_{n \rightarrow +\infty} Au_n = AM_0$. Par somme, comme $u_{n+1} = Au_n + B$, on a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = AM_0 + B$. Par unicité de la limite, il vient $M_0 = AM_0 + B$ donc $(I_p - A)M_0 = B$ et, comme $I_p - A$ est inversible, on a bien $M_0 = (I_p - A)^{-1}B$.

b. Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - M_0 = Au_n + B - (AM_0 + B) = Au_n - AM_0 = A(u_n - M_0)$.

c. D'après l'inégalité admise, on a donc $\|u_{n+1} - M_0\| \leq \|A\| \|u_n - M_0\|$ donc, par une récurrence facile, $\forall n \in \mathbb{N}, \|u_n - M_0\| \leq \|A\|^n \|u_0 - M_0\|$. Comme $\|A\| < 1$, par encadrement, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n - M_0\| = 0$, ce qui est la définition de $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = M_0$.

Exercice 2

- La partie A est convexe car si $(P, Q) \in A^2$ et $t \in [0; 1]$, par croissance de l'intégrale, on a $0 = t \times 0 + (1 - t) \times 0 \leq \int_0^1 (tP(x) + (1 - t)Q(x))dx \leq 1 = t \times 1 + (1 - t) \times 1$ donc $tP + (1 - t)Q \in A$.
- A n'est pas bornée car si on prend par exemple la norme $N(P) = |a| + |b| + |c|$ pour $P = aX^2 + bX + c$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, P_n = 2nX - n \in A$ car $\int_0^1 (2nx - n)dx = 0$ alors que $N(P_n) = 3n \rightarrow +\infty$.
- Si $(P_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ converge vers $P \in \mathbb{R}_2[X]$ pour la norme infinie (par exemple), alors ceci implique la convergence uniforme sur un segment de $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers P donc $0 \leq \int_0^1 P(t)dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 P_n(t)dt \leq 1$ par passage à la limite dans une inégalité large. Ainsi, $P \in A$ et A est fermé.
- A n'est pas ouverte car si $P = 0 \in A$, pour tout réel $r > 0$, la boule $B(P, r)$ (pour la norme N par exemple) n'est pas incluse dans A puisqu'elle contient le polynôme $P = -\frac{r}{2}$ et que $\int_0^1 P(x)dx = -\frac{r}{2} \notin [0; 1]$.