

DEVOIR 22 : NORMES DIFFÉRENTIELLES

PSI 1 2023-2024

mardi 19 mars 2024

QCM

- 1 Images directes et réciproques : soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ continue, soit $a \in \mathbb{R}$, U un fermé de E , V un ouvert de E

1.1 $f^{-1}([0; a])$ est un fermé de E

1.3 Si U est borné, $f(U)$ est un borné de $\mathbb{R}$

1.2 $f^{-1}(]a; +\infty[)$ est un ouvert de E

1.4 Si V est borné, $f(V)$ est un ouvert de $\mathbb{R}$

- 2 Continuité et lipschitzianité : soit E, F des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés avec E de dimension finie ; soit $f : E \rightarrow F$, $g : F \rightarrow E$ continues et $h \in \mathcal{L}(E, F)$ et $k \in \mathcal{L}(F, E)$

2.1 $g \circ h$ est continue

2.3 $k \circ h$ est lipschitzienne

2.2 $k \circ f$ est continue

2.4 $h \circ k$ est lipschitzienne

- 3 Équations linéaires du premier ordre ; soit $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues, l'équation différentielle $(E) : y' - ay = b$, $(E_0) : y' - ay = 0$, on note S_E l'ensemble des fonctions réelles y solutions de (E) sur $\mathbb{R}$, S_0 l'ensemble des fonctions réelles y solutions de (E_0) sur $\mathbb{R}$, on note aussi A une primitive de a sur $\mathbb{R}$

3.1 $y \in S_0 \iff (\exists \lambda \in \mathbb{R}, y = \lambda e^A)$

3.3 S_E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel

3.2 $y \in S_E \iff (\exists \lambda : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ dérivable}, y = \lambda e^A)$

3.4 S_0 est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel

- 4 Variation des fonctions et TAF : soit $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable admettant des limites à gauche et à droite en 0

4.1 f strictement décroissante $\iff \forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) < 0$

4.3 $\exists c \in [1; 3], f'(c) = \frac{f(3) - f(1)}{2}$

4.2 f croissante $\iff (\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) \geq 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x))$

4.4 $\exists c \in]-1; 1[, f'(c) = \frac{f(1) - f(-1)}{2}$

Énoncé Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $a, b, c : I \rightarrow \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$ trois fonctions continues. Énoncer les résultats du théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ linéaire relatifs à un problème de CAUCHY linéaire pour une équation différentielle linéaire scalaire du second ordre $(E) : y'' - ay' - by = c$.

Preuve Soit E et F deux $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels normés (norme $\|\cdot\|_E$ dans E et $\|\cdot\|_F$ dans F). On suppose E de dimension finie, soit une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E . Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, montrer que f est lipschitzienne.

Exercice 1 Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$ associée au produit scalaire $(A|B) = \text{tr}(A^T B)$.

a. Établir que : $\forall A \in E, \text{tr}(A)^2 \leq n \text{tr}(A^T A)$.

b. Justifier la continuité de l'application trace $\text{tr} : E \rightarrow \mathbb{R}$.

c. Calculer $\|\text{tr}\|$ qui est par définition la plus petite constante $k \geq 0$ telle que $\forall A \in E, |\text{tr}(A)| \leq k\|A\|_2$.

Exercice 2 Résoudre sur l'intervalle $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E) : (1 + t^2)y' + ty = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}$.

Parmi ces solutions y , laquelle est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (vous donnerez un équivalent de y en $+\infty$).

QCM Répondre dans le tableau ci-dessous au QCM : mettre une croix dans la case de la ligne i colonne j revient à déclarer la question i,j vraie. Ne rien mettre revient à la déclarer fausse.

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1					
2					
3					
4					

Énoncé

Preuve

Exercice 1

Exercice 2

i · j	1	2	3	4	Fautes
1	X	X	X		
2	X		X		
3	X			X	
4		X	X		

1.1 Vrai : du cours car $[0; a]$ est fermé dans $\mathbb{R}$ **1.2** Vrai : du cours car $]a; +\infty[$ est ouvert dans $\mathbb{R}$ **1.3** Vrai : si U est borné alors U est compact (fermé borné) et f continue est bornée sur U (théorème des bornes atteintes) **1.4** Faux : par exemple $E = \mathbb{R}$, $f = \sin$ et $V =]0; \pi[$ ouvert alors que $f(V) =]0; 1]$ ne l'est pas.

2.1 Vrai : h est continue car linéaire et E de dimension finie donc $g \circ h$ continue par composée **2.2** Faux : k linéaire mais F pas forcément de dimension finie donc k pas forcément continue **2.3** Vrai : $k \circ h$ linéaire par composée et E de dimension finie **2.4** Faux : $h \circ k \in \mathcal{L}(F)$ et F pas forcément de dimension finie.

3.1 Vrai : cours **3.2** Faux : λ doit vérifier $e^\lambda \lambda' = b$ pour que $y \in S_E$ **3.3** Faux : si $b \neq 0$ **3.4** Vrai : $S_0 = \text{Vect}(e^A)$.

4.1 Faux : par exemple si $f(x) = -x$ si $x > 0$ et $f(x) = -x - 1$ si $x < 0$ et $f(-0.5) = f(0.5)$ bien que $-0.5 < 0.5$

4.2 Vrai : car f est alors croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ et la condition sur les limites montre que les images des négatifs sont inférieures à celles des positifs **4.3** Vrai : c'est le TAF appliqué à f entre 1 et 3 car $3 - 1 = 2$

4.4 Faux : f n'est pas dérivable sur $] -1; 1[$ car elle ne l'est pas forcément en 0.

Énoncé Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $a, b, c : I \rightarrow \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ trois fonctions continues, l'équation

$$(E) : y'' - ay' - by = c \text{ et } t_0 \in I. \text{ Pour } (y_0, y'_0) \in \mathbb{K}^2, \text{ le problème de CAUCHY } \begin{cases} y'' &= ay' + by + c \\ y(t_0) &= y_0 \\ y'(t_0) &= y'_0 \end{cases}$$

admet une unique solution y définie sur I en entier.

Preuve Si $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k \in E$, on pose $N_\infty(x) = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$. N_∞ est une norme sur E de dimension finie, N_∞ et $\|\cdot\|_E$ sont équivalentes : $\exists \beta > 0$, $N_\infty \leq \beta \|\cdot\|_E$. Par linéarité de f et inégalité triangulaire :
 $\|f(x)\|_F = \left\| f\left(\sum_{k=1}^n x_k e_k\right) \right\|_F = \left\| \sum_{k=1}^n x_k f(e_k) \right\|_F \leq \sum_{k=1}^n |x_k| \|f(e_k)\|_F \leq \left(\sum_{k=1}^n \|f(e_k)\|_F\right) N_\infty(x) \leq K \|x\|_E$ en posant $K = \beta \left(\sum_{k=1}^n \|f(e_k)\|_F\right)$, on a $\forall x \in E$, $\|f(x)\|_F \leq K \|x\|_E$ et f est K -lipschitzienne.

Exercice 1 **a.** $\text{tr}(A)^2 \leq n \text{tr}(A^T A) \iff |(A|I_n)| = |\text{tr}(A)| = |\text{tr}(A^T)| \leq \sqrt{(A|A)} \sqrt{(I_n|I_n)} = \sqrt{n \text{tr}(A^T A)}$ est l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ appliquée au couple (A, I_n) pour le produit scalaire canonique dans E .
b. tr est linéaire en dimension finie donc lipschitzienne donc continue.

c. D'après l'inégalité précédente : $\forall A \in E$, $|\text{tr}(A)| \leq \sqrt{n} \|A\|_2$ donc $\| \text{tr} \| \leq \sqrt{n}$. S'il existait $k < \sqrt{n}$ telle que tr était k -lip., on aurait $|\text{tr}(I_n)| \leq k \|I_n\|_2 \iff n \leq k \sqrt{n}$ ce qui est absurde. Ainsi $\| \text{tr} \| = \sqrt{n}$.

Exercice 2 $(E_0) : y' + \frac{ty}{1+t^2} = 0$. Comme $\left(\frac{1}{2} \ln(1+t^2)\right)' = \frac{t}{1+t^2}$, les $y : t \mapsto \frac{\lambda}{\sqrt{1+t^2}}$ sont les solutions de

$$(E_0) \text{ pour } \lambda \in \mathbb{R}. \text{ Variation de la constante : } (1+t^2) \frac{\lambda'}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \iff \lambda' = \frac{1}{1+t^2} \iff \lambda = \text{Arctan}(t).$$

Par théorème de structure, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les $y_\alpha : t \mapsto \frac{\alpha + \text{Arctan}(t)}{\sqrt{1+t^2}}$ où α parcourt $\mathbb{R}$. Les

y_α sont bien sûr continues sur $\mathbb{R}_+$ et si $\alpha \neq -\frac{\pi}{2}$, on a $y_\alpha(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi + 2\alpha}{2t}$ donc y_α n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$

d'après RIEMANN. Par contre si $\alpha = -\frac{\pi}{2}$, on a $y_\alpha(t) = \frac{-\text{Arctan}(1/t)}{\sqrt{1+t^2}} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{t^2}$ et y_α est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.