ÉNONCÉS EXERCICES CORRIGÉS 13 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

13.1 Équations linéaires scalaires d'ordre 1

13.1 *Centrale PSI 2013*

a. Quels sont les $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $t \mapsto t^\alpha$ se prolonge en une fonction nulle en 0 de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$?
b. En déduire les valeurs de $k \in \mathbb{R}$ pour lesquelles il existe une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue et non nulle qui vérifie la relation : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \int_0^x tf(t)dt = kx\int_0^x f(t)dt$.

13.2 *Centrale PSI 2012* Soit $\alpha > 0$ et l'équation $(E)\ :\ xy' + \alpha y = \frac{1}{1+x}$ qu'on va résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$.

a. Résoudre (E) et montrer qu'il existe une unique solution y_0 de (E) qui admet une limite finie en 0^+ : vous en donnerez une expression à l'aide d'une intégrale.
b. Déterminer le développement en série entière de y_0 au voisinage de 0.

13.3 Résoudre l'équation différentielle $(E)\ :\ y' = |y - t|$.

13.4 *Centrale PSI 2013* Montrer que l'équation $(E)\ :\ ty' + y = \frac{1}{t-1}$ possède une unique solution sur $]-\infty;1[$, et que cette solution est de classe C^∞.

13.5 Résoudre l'équation $(E)\ :\ t(t^2-1)y' + 2y = t^2$.

13.6 Trouver toutes les $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables en 0 telles que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = e^x f(y) + e^y f(x)$.

13.7 **a.** Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue de limite nulle en $+\infty$.

Montrer que les solutions de l'équation différentielle $y' + y = h$ converge vers 0 en $+\infty$.
b. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe C^1, on suppose que $\lim\limits_{+\infty}(f + f') = \ell \in \mathbb{C}$, montrer que $\lim\limits_{+\infty} f = \ell$.

13.8 *Centrale PSI 2012* On se donne l'équation différentielle : $(E)\ : ty' = |y - 1|$.

a. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$. Tracer quelques-unes de ses solutions.
b. Montrer que si $z : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est solution de (E) alors $y : t \to z(-t)$ l'est sur $\mathbb{R}_-^*$.
En déduire l'allure des solutions sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}$.

13.9 *Centrale PSI 2012* On se donne l'équation différentielle $(E)\ :\ t(1-t)y' + (t-2)y = (t-2)e^{t-1}$ et son équation homogène associée dont on cherche les solutions $y : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle réel.
a. Déterminer deux réels a et b tels que $\frac{t-2}{t(1-t)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t-1}$ pour $t \notin \{0,1\}$.

En déduire les solutions de (E) sur des intervalles I ne contenant ni 0 ni 1.
b. Décrire les solutions de (E) sur $]-\infty\,;1[$, sur $]0\,;+\infty[$ et enfin sur $\mathbb{R}$.

13.2 Équations linéaires scalaires d'ordre 2 à coefficients constants

13.10 <u>*Centrale PSI 2012*</u> Soit $(E)\ :\ f''(-t)+f(t)=\sin(t)+t^2$.

a. Établir que toute $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ se décompose d'une unique manière comme somme d'une fonction paire g et d'une fonction impaire h : $f=g+h$; et que $\big(f$ de classe $C^2\big)\iff\big(g$ et h de classe $C^2\big)$.
b. En déduire les solutions de (E).

13.3 Équations linéaires scalaires d'ordre 2

13.11 On considère l'équation différentielle $(E)\ :\ xy''-y'-x^3y=0$.

a. Montrer que si y est solution sur I alors $x\mapsto y(-x)$ est solution sur $I'=-I$.
b. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation via le changement de variable $t=x^2$.
c. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$.

13.12 Soit l'équation différentielle $(E)\ :\ t^2y''-ty'+y=0$ qu'on veut résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$. Trouver une fonction polynomiale y_1 solution de (E). On cherche une solution y_2 solution de (E) indépendante de y_1. On pose $w(t)=y_1(t)y_2'(t)-y_1'(t)y_2(t)$. Quelle équation différentielle est vérifiée par w ? En déduire une expression de $y_2(t)$ qui convient.

13.13 <u>*Mines PSI 2010 d'après RMS*</u> Soit l'espace vectoriel $E=\big\{f\in C^2\big([0;1],\mathbb{R}\big)\ |\ f(0)=f'(0)=0\big\}$.

Pour toute fonction $f\in E$, on pose $N(f)=||f+2f'+f''||_\infty$.
a. Montrer que N est une norme.
b. Montrer qu'il existe $c>0$ tel que : $\forall f\in E,\ ||f||_\infty\leqslant c\,N(f)$.

13.14 <u>*Centrale PSI 2012*</u> On se donne l'équation différentielle $(E)\ :\ t^2y''-ty'-3y=5t^4$ et son équation homogène associée $(E_0)\ :\ t^2y''-ty'-3y=0$ dont on cherche les solutions $y:I\to\mathbb{R}$ où I est un intervalle.
a. Trouver $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $y_\alpha:t\mapsto t^\alpha$ soit solution de (E_0) sur $\mathbb{R}_+^*$.
b. En déduire les solutions de (E_0) sur $\mathbb{R}_+^*$, sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}$.
Quelle est dans chacun des trois cas la dimension de l'espace vectoriel des solutions de (E_0) ?
c. Chercher une solution particulière y_0 polynomiale de (E). Donner l'allure globale des graphes des solutions de (E) définies sur $\mathbb{R}$ (on note $S_\mathbb{R}$ l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$).
d. $\varphi_1:y\mapsto\big(y(1),y'(1)\big)$ et $\varphi_2:y\mapsto\big(y(-1),y(1)\big)$ sont-elles des bijections de $S_\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$?

13.15 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 telle que $f+f''\geqslant 0$. Montrer $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)+f(x+\pi)\geqslant 0$.

13.16 Résoudre l'équation $(E)\ :\ (1+t^2)y''(t)+4ty'(t)+2y(t)=0$ en recherchant les fonctions DSE solutions.

13.17 <u>*Centrale 2012 PSI*</u>

a. Résoudre l'équation différentielle $(E)\ :\ 4xy''+2y'+y=0$ sachant que un certain intervalle J, il existe deux solutions f et g de (E) telles que $fg=1$.

Indication : on pourra montrer d'abord qu'avec ces conditions, on a $4xf'^2+f^2=0$.

b. Proposer une autre méthode étant donnés les résultats.

13.18 Soit I un intervalle et $q_1, q_2 : I \to \mathbb{R}$ continues vérifiant $q_1 \leqslant q_2$. On note φ_1 et φ_2 deux solutions sur I respectivement de $(E_1)\ :\ y'' + q_1 y = 0$ et $(E_2)\ :\ y'' + q_2 y = 0$. On suppose φ_1 non identiquement nulle.

a. Montrer que les zéros de φ_1 sont isolés : c'est-à-dire que si un réel $t_0 \in I$ vérifie $\varphi_1(t_0) = 0$ alors $\exists \alpha > 0,\ \forall t \in I \cap [t_0 - \alpha; t_0 + \alpha],\ \varphi(x) = 0 \Longrightarrow t = t_0$.

b. Soit $a < b$ deux zéros consécutifs de φ_1. Montrer que φ_2 s'annule sur $[a; b]$.

Indication : étudier $w = \varphi_1 \varphi_2' - \varphi_2 \varphi_1'$.

c. Application : montrer que si φ est une solution non nulle de l'équation $(E)\ :\ y'' + e^t y = 0$ alors $\forall a \in \mathbb{R}_+,\ \exists t \in [a; a + \pi],\ \varphi(t) = 0$.

13.19 Résoudre sur $]-1; 1[$ l'équation $(E)\ :\ 4(1 - t^2)y'' - 4ty' + y = 0$ en recherchant les fonctions DSE.

Et sur d'autres intervalles ?

13.4 Systèmes différentiels linéaires

13.20 Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3 et $u \in E$ unitaire. Résoudre l'équation $x' = u \wedge x$.

13.21 Résoudre le système différentiel suivant $\begin{cases} x' &= 2x - y + 2z \\ y' &= 10x - 5y + 7z \\ z' &= 4x - 2y + 2z \end{cases}$

13.22 Résoudre le système différentiel suivant $\begin{cases} x' &= 2y + 2z \\ y' &= -x + 2y + 2z \\ z' &= -x + y + 3z \end{cases}$

13.5 Exercices aux oraux des étudiants de PSI1

13.23 *CCP PSI 2013* Adrien

Soit $(E)\ :\ (1 + x^2)y'' - 2y = 0$.

a. Montrer qu'il existe une unique solution polynomiale y de (E) vérifiant $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

On pourra d'abord déterminer le degré de ce polynôme.

b. Déterminer toutes les solutions de (E). On pourra utiliser : $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{x}{1 + x^2} + \int_0^x \frac{2t^2 dt}{(1 + t^2)^2}$.

13.24 *Mines PSI 2014* Soufiane

Soit E l'espace des fonctions de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et $\Phi : E \to E$ définie par $\Phi(f) = g$ où $g(t) = f'(t) + tf(t)$.

a. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de Φ.

b. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de Φ^2.

c. Résoudre l'équation $(E)\ :\ y'' + 2xy' + (x^2 - 1)y = 0$.

13.25 *CCP PSI 2014* Lucie

Soit $(E)\ :\ x(x - 1)y' + y = \ln(x)$.

a. Montrer que (E) admet une unique solution dans R_+^* notée f.

b. Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \ln(x) dx$. Montrer son existence et calculer sa valeur.

c. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x) dx$ après avoir justifié son existence. On rappelle que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

13.26 *ENSAM PSI 2014* Mohammed

Résoudre $(E)\ :\ (e^t-1)y'+(e^t+1)y-(3+2e^t)=0$.

13.27 *ENS Cachan PSI 2015* Alberto Alonso

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $j\in[\![1;n]\!]$, on s'intéresse au système différentiel de $\mathbb{R}^n$: $X_j'(t)=AX_j(t)$ avec $X_j(0)=e_j$ (vecteur de la base canonique).

On note $X_{i,j}(t)$ la i-ième coordonnée du vecteur $X_j(t)$ et on définit $X(t)=\big(X_{i,j}(t)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a. Montrer que $X_j(t)$ est bien défini pour tout $t\in\mathbb{R}$.

b. Montrer que $\det(X(t))\neq 0$.

c. Trouver une équation différentielle vérifiée par $\det(X(t))$.

d. Montrer que : $\mathrm{Tr}\,(A)=0\Longrightarrow(\forall t\in\mathbb{R},\ \det(X(t))=1)$.

13.28 *Centrale Maths1 PSI 2015* Agatha Courtenay

Soit $a\in C^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Soit f une solution sur $\mathbb{R}_+$ de l'équation $(E)\ :\ y''+(1+a)y=0$.
Posons $g : x\mapsto f(x)+\displaystyle\int_0^x \sin(x-t)a(t)f(t)dt$.

a. Est-ce que $\lim\limits_{x\to+\infty} a(x)=0$?

b. Montrer que $g''+g=0$.

c. Montrer qu'il existe $C\in\mathbb{R}$ tel que $|f(x)|\leqslant C+\displaystyle\int_0^x |a(t)f(t)|dt$.

d. Conclure quant aux solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+$.

13.29 *Mines PSI 2015* Gabriel Olympie

Soit μ un réel quelconque. Soit l'équation $(E)\ :\ xy'+\mu y=\dfrac{1}{1+x}$. Résoudre cette équation sur R_+^*.
Déterminer en fonction de μ les solutions qui admettent une limite finie en 0.

13.30 *CCP PSI 2015* Clément Suberchicot

Résoudre l'équation différentielle $(E)\ :\ y''+4y'+4y=\dfrac{e^{-2t}}{1+t^2}$.

13.31 *E3A PSI 2015* Jean-Baptiste Biehler

Soit $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$.

a. Justifier que A est diagonalisable. La diagonaliser.

b. Résoudre le système différentiel : $(S)\ :\ \begin{cases}x' &= 2x+y+z\\ y' &= x+2y+z\\ z' &= x+y+2z\end{cases}$.

13.32 *ENS-Cachan PSI 2016* Jean Migliorini I

Soit l'équation différentielle $(E_\lambda)\ :\ (1-x^2)y''-2xy'+\lambda y=0$.
On pose, pour $n\in\mathbb{N}^*$, les polynômes $U_n=(X^2-1)^n$ et $P_n=U_n^{(n)}$.
a. Calculer $(X^2-1)U_n'$ en fonction de U_n. Montrer que P_n est solution de $(E_{n(n+1)})$.
b. Soit u une solution de $(E_{n(n+1)})$ et $W=u'P_n-uP_n'$ (wronskien de la famille (u,P_n)).
Trouver une équation différentielle vérifiée par W. La résoudre.
c. Montrer que seuls les αP_n, pour $\alpha\in\mathbb{C}$, sont solutions C^2 de $(E_{n(n+1)})$ sur $[-1;1]$.

13.33 *Mines PSI 2016* Samuel Cailleaux II

Soit $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et $(E) \ : \ y'' + qy = 0$. Soit f une solution de (E) telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

a. Forme de l'ensemble des solutions de (E). Structure ? Dimension ?

b. Unicité de f ? Prouver que les zéros de f sont isolés.

Supposons que $\forall x \in \mathbb{R}, \ q(x) \leqslant 0$.

c. Prouver que f^2 est convexe.

d. Prouver que $\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) \geqslant 1$.

13.34 *Mines PSI 2016* Paul Mondou et Romain Morgavi I

Soit $p \in \mathbb{R}$. Trouver toutes les solutions f de l'équation : $\forall t \in \mathbb{R}, \ f^{(3)}(t) - f(t) = e^{pt}$.

13.35 *ENS Cachan PSI 2017* Vincent Bouget

Soit $c, f : [0;1] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On suppose $c \geqslant 0$. On considère les problèmes suivants :

- $(1) \ -u''(x) + c(x)u(x) = f(x)$ pour $x \in [0;1]$ avec $u(0) = u(1) = 0$.
- $(2) \ -u''_\lambda(x) + c(x)u_\lambda(x) = f(x)$ pour $x \in [0;1]$ avec $u_\lambda(0) = 0, \ u'_\lambda(0) = \lambda$.

a. Montrer qu'il existe une unique solution de (2) qui appartienne à $C^2([0;1], \mathbb{R})$.

b. Montrer qu'il existe une unique solution de (1) qui appartienne à $C^2([0;1], \mathbb{R})$.

Indication : montrer que $\lambda \mapsto u_\lambda(1)$ est affine.

c. Montrer que $f \geqslant 0 \Longrightarrow u \geqslant 0$.

13.36 *ENS Cachan PSI 2017* Corentin Gatellier I

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} |g(t)|dt$ converge et l'équation différentielle $(E) \ : \ y'' + gy = 0$.

a. Montrer que si y est une solution bornée de (E), alors y' tend vers 0 en $+\infty$.

b. Soit y_1 et y_2 des solutions bornées de (E). Montrer que $y_1y'_2 - y_2y'_1 = 0$.

c. Montrer que (E) admet des solutions non bornées.

13.37 *Mines PSI 2017* Romain Delon II

Résoudre le système différentiel $(S) \ : \ \begin{cases} x' = & y + z \\ y' = & x \\ z' = & x + y + z \end{cases}$.

Vous donnerez d'abord les éléments propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

13.38 *Mines PSI 2017* Élio Garnaoui II

Soit $n \geqslant 1$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique. On considère le système différentiel $(S) \ : \ X' = AX$.
a. On suppose n impair. Montrer que A n'est pas inversible et qu'il existe une solution X_0 non nulle constante de (E). Montrer que toute solution est incluse dans un hyperplan affine ; c'est-à-dire qu'il existe une base $(e_1, \cdots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que si $X : t \mapsto \sum_{k=1}^{n} x_k(t)e_k$ est une solution de (E), alors x_n est constante.
b. On suppose à nouveau n quelconque. Si X et Y sont solutions de (E), montrer que ${}^tXY$ est constant. En déduire que toutes les solutions de (S) sont bornées.

13.39 *Mines PSI 2017* Iñigo Saez-Casares II

Soit $f :]0;1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

On suppose que $\forall x \in]0;1[,\ f(x) = \int_{1-x}^{1} \frac{f(t)}{t} dt$. Déterminer f.

13.40 *CCP PSI 2017* Claire Meunier I

Soit le système différentiel $(S)\ :\ \begin{cases} x' = & 3x + 2y \\ y' = & -2x - y \end{cases}$. On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Trigonaliser A et en déduire la résolution du système (S).

13.41 *Centrale Maths1 PSI 2018* Erwan Dessailly

Soit le système différentiel $(S)\ :\ \begin{cases} x' & = & -x + 2y - 3z \\ y' & = & -x + 2y - z \\ z' & = & x - y + 3z \end{cases}$

a. Mettre ce système sous la forme $X' = AX$. Calculer χ_A.

b. La matrice A est-elle diagonalisable ? trigonalisable ?

c. Trouver un vecteur $v_1 \in \mathbb{R}^3$ tel que $\mathrm{Ker}(A - I_3) = \mathrm{Vect}(v_1)$. Montrer que $\mathrm{Ker}((A - I_3)^2) \setminus \mathrm{Vect}(v_1) \neq \emptyset$.

d. En déduire une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Résoudre (S).

Questions de cours :

- que peut-on dire de l'ensemble E des solutions de (S) ?

- que se passe-t-il si les coefficients dépendent du temps ? Peut-on résoudre ? Qu'arrive-t-il à E ?

- que dire du polynôme caractéristique et du polynôme minimal d'un endomorphisme ?

- discuter le cas d'une matrice de passage non constante.

13.42 *Centrale Maths1 PSI 2018* Benoit Souillard

Soit le système différentiel $(S)\ :\ \begin{cases} y_1' & = & \dfrac{3}{t^2} y_2 \\ y_2' & = & 2y_1 \end{cases}$

a. Montrer que (S) admet sur $\mathbb{R}_+^*$ des solutions de la forme $(y_1, y_2) = (C_1 t^{\alpha}, C_2 t^{\beta})$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ à déterminer en trouvant un lien entre les réels C_1 et C_2.

b. Justifier que l'ensemble E des solutions de (S) sur $\mathbb{R}_+^*$ est un espace de dimension 2. En donner une base.

c. Quelles sont les solutions de (S) sur $\mathbb{R}_-^*$?

13.43 *Mines PSI 2018* Charlotte Beaune et Santiago Monteagudo I

a. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, trouver les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $(E)\ :\ y'' - 9y = a|t| + b$.

b. Montrer que (E) possède une unique solution sur $\mathbb{R}$ dont le graphe possède une asymptotes en $\pm\infty$.

13.44 *Mines PSI 2018* Pauline Lamaignère II

Déterminer les solutions de l'équation $(E)\ :\ 2t(1+t)y' + (1+t)y = 1$ sur des intervalles à préciser.

Indication : on pourra chercher une solution DSE de (E).

13.45 *Mines PSI 2018* Martin Monsel II

On pose $E = C^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{C})$ et on définit $\varphi : E \to E$ par $\forall x > 0,\ \varphi(f)(x) = x^2 f'(x) + 2if(x)$.

a. On pose $\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x > 0,\ f_k(x) = x^k e^{\frac{2i}{x}}$. Calculer $\varphi(f_k)$. Montrer que $(f_0, \cdots, f_n)$ est libre pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. L'application φ est-elle injective ?

On note, pour $m \in \mathbb{N}$, $F_m = \text{Vect}(f_0, \cdots, f_m)$ et on définit $\psi_m : F_m \to F_{m+1}$ par $\psi_m(f) = \varphi(f)$.

b. Quel est le rang de ψ_m ?

c. Montrer que f_n est prolongeable par continuité en 0 si $n \geqslant 1$.

d. À quelle condition sur n la fonction f_n est-elle dérivable en 0 ? De classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$?

13.46 *E3A PSI 2018* Colin Baumgard

On considère le système (S) : $\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & -3x - 6y + 4z - t - 6 \\ y' & = & 2x + 3y - 2z + 4 \\ z' & = & -y + z - t \end{array}\right.$

a. Mettre (S) sous la forme $X' = AX + B(t)$.

b. Diagonaliser A et résoudre le système homogène (S_0) : $X' = AX$.

c. Trouver une solution particulière "simple".

d. En déduire l'ensemble des solutions réelles de (S).

13.47 *E3A PSI 2018* Amélie Guyot

On suppose que le rayon de $\sum\limits_{n\geqslant 0} b_n x^n$ vérifie $R' \geqslant 1$. On pose $\forall x \in]-1;1[,\ g(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$.

On se donne l'équation différentielle (E) : $(1-x)y' + y = g(x)$.

a. Résoudre l'équation homogène (E_0) : $(1-x)y' + y = 0$.

Soit y une solution développable en série entière de (E) écrite $\forall x \in]-r;r[,\ y(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec $r > 0$.

b. Montrer que $a_1 = b_0 - a_0$ et $\forall n \geqslant 2,\ a_n = \dfrac{1}{n(n-1)} \sum\limits_{k=1}^{n-1} k b_k$.

c. En déduire que le rayon R de $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ vérifie $R \geqslant 1$.

d. Résoudre (E) dans le cas où $g(x) = -\ln\left(1 - \frac{x}{2}\right)$.

13.48 *E3A PSI 2018* Claire Raulin

Soit (E) : $2t^2 y'' + y = 0$ et y solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$. On pose $z : u \mapsto y(e^u)e^{-u/2}$.

a. Exprimer $y(t)$ en fonction de $z(\ln(t))$.

b. Montrer que z est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants (E').

c. Résoudre (E') et en déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

13.49 *ENS Cachan PSI 2019* Mathis Chénet

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ de classe C^1 telle que $\exists \alpha \in \mathbb{C},\ \lim\limits_{t\to+\infty}(f'(t)-\alpha f(t)) = 0$.

a. Montrer que $\forall x \geqslant 0,\ f(x) = f(0)e^{\alpha x} + \displaystyle\int_0^x (f'(t)-\alpha f(t))e^{\alpha(x-t)}dt$.

b. Supposons que $\mathrm{Re}\,(\alpha) < 0$, montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Soit maintenant un entier $n \geqslant 1$ et $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\deg(P) = n$ (ie $a_n \neq 0$).

Pour $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ de classe C^n, on note $P(D)f = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k f^{(k)}$.

c. Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- $\forall f \in C^n(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}),\ \lim\limits_{x\to+\infty} P(D)f(x) = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
- Toutes les racines de P ont des parties réelles strictement négatives.

13.50 *ENS Cachan PSI 2019* Romain Cornuault

Soit $y, \Phi, \Psi : [a;b] \to \mathbb{R}_+$ trois fonctions continues telles que $\forall t \in [a;b],\ y(t) \leqslant \Phi(t) + \displaystyle\int_a^t \Psi(s)y(s)ds$.

On pose $F(t) = \displaystyle\int_a^t \Psi(s)y(s)ds$.

a. Montrer que $\forall t \in [a;b],\ F(t)\exp\left(-\displaystyle\int_a^t \Psi(s)ds\right) \leqslant \displaystyle\int_a^t \Psi(s)\Phi(s)\exp\left(-\displaystyle\int_a^s \Psi(u)du\right)ds$.

b. Montrer que $\forall t \in [a;b],\ y(t) \leqslant \Phi(t) + \displaystyle\int_a^t \Psi(s)\Phi(s)\exp\left(\displaystyle\int_s^t \Psi(u)du\right)ds$.

c. Supposons que $\forall t \in [a;b],\ \Phi(t) = c \geqslant 0$. Montrer que $\forall t \in [a;b],\ y(t) \leqslant c\exp\left(\displaystyle\int_a^t \Psi(s)ds\right)$.

d. Soit $f, g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continues telles que $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ f(t) \leqslant \displaystyle\int_0^t f(s)g(s)ds$. Montrer que f est nulle.

Soit $(a, m) \in [0;1[\times[0;1]$ et $f, g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continues telles que $\forall t \geqslant 0,\ f(t) \leqslant af(mt) + \displaystyle\int_0^t f(s)g(s)ds$.

e. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in \mathbb{R}_+,\ f(t) \leqslant a^n f(m^n t) + \left(\sum\limits_{k=0}^{n-1} a^k\right)\displaystyle\int_0^t f(s)g(s)ds$. Qu'en déduire sur f ?

13.51 *ENS Cachan PSI 2019* Tanguy Sommet

Soit $A : [0;+\infty[\to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une fonction 1-périodique de classe C^1.
On s'intéresse à l'équation $(E)\ :\ X'(t) = A(t)X(t)$ d'inconnue $X : [0;+\infty[\to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1.
On admet, c'est le théorème de Cauchy-Lipschitz version matricielle, que si $Y \in \mathbb{R}^n$ est fixé, il existe une unique solution $X : [0;+\infty[\to \mathbb{R}^n$ de (E) telle que $X(0) = Y$.
On note, pour $t \geqslant 0$ et $Y \in \mathbb{R}^n$, $\nu_t(Y) = X(t)$ avec la solution X de (E) de la ligne précédente.
On appelle $R(t)$ la matrice de ν_t dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
a. Pour $t \geqslant 0$, exprimer $X(t)$ en fonction de $R(t)$ et $X(0)$.
b. Montrer que $\forall t \geqslant 0,\ R'(t) = A(t)R(t)$ et que $R(0) = I_n$.
Soit $W : [0;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $W(t) = \det(R(t))$.

c. Montrer que $\forall t \geqslant 0,\ W'(t) = \mathrm{Tr}\,(A(t))W(t)$. Indication : on pourra écrire $W(t) = \begin{vmatrix} \cdots L_1(t) \cdots \\ \vdots \\ \cdots L_n(t) \cdots \end{vmatrix}$ en notant $L_i(t)$ la i-ième colonne de la matrice $R(t)$. En déduire que $R(t)$ est inversible en tout instant $t \geqslant 0$.

d. Montrer que $\forall t \geqslant 0,\ R(t+1) = R(t)R(1)$.

e. Montrer qu'il existe une solution X de (E) non identiquement nulle, de classe C^1 et 1-périodique si et seulement si $1 \in Sp(R(1))$.

On suppose dans la suite que $R(1) = PDP^{-1}$ avec $P \in GL_n(\mathbb{R})$, $D = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $\forall k \in [\![1;n]\!],\ \lambda_k > 0$. On pose $\Lambda(t) = diag\Big(\dfrac{1}{\lambda_1^t}, \dots, \dfrac{1}{\lambda_n^t}\Big)$, $Q(t) = R(t)P\Lambda(t)P^{-1}$ et $\forall t \geqslant 0,\ Z(t) = (Q(t))^{-1}X(t)$.

On pose aussi $D_0 = diag(\ln(\lambda_1), \dots, \ln(\lambda_n))$ et $B(t) = P(\Lambda(t))^{-1}D_0\Lambda(t)P^{-1}$.

f. Montrer que Q est 1-périodique.

g. Montrer que X est solution de $(E) \iff Z'(t) = B(t)Z(t)$.

13.52 *Centrale Maths1 PSI 2019* Thomas Brémond

Soit un réel a et un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Soit deux fonctions $u, v : [a; +\infty[\to \mathbb{R}_+$ de classe C^0 et $C \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall t \geqslant a,\ u(t) \leqslant C + \displaystyle\int_a^t u(s)v(s)ds$.

Montrer que $\forall t \geqslant a,\ u(t) \leqslant C \exp\Big(\displaystyle\int_a^t v(s)ds\Big)$.

b. Soit $X : [a; +\infty[\to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ une fonction de classe C^1. On note $||.||$ la norme infinie et on suppose qu'il existe $k \geqslant 0$ tel que $\forall t \geqslant a,\ ||X'(t)|| \leqslant k||X(t)||$. Montrer que $\forall t \geqslant a,\ ||X(t)|| \leqslant ||X(a)||e^{k(t-a)}$.

c. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe $k \geqslant 0$ telle que pour toutes solutions X et Y de l'équation $(E)\ :\ U' = AU$ d'inconnue $U : [a; +\infty[\to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de classe C^1, $\forall t \geqslant a,\ ||X(t)-Y(t)|| \leqslant ||X(a)-Y(a)||e^{k(t-a)}$.

13.53 *Centrale Maths1 PSI 2019* Charles Broquet

On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\ln(1+t)}{\sqrt{t}}dt$.

a. Donner le domaine de définition de F.

b. Donner un équivalent de F en 0.

c. Résoudre l'équation différentielle $(E)\ :\ 2xy' + y = \ln(1+x)$ sur $\mathbb{R}_+$.

d. La (les) solution (s) de la question **c.** est-elle (sont-elles) développable(s) en série entière sur $[0;1]$?

13.54 *Mines PSI 2019* Romain Cornuault I

On cherche une fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $(E)\ :\ -2y'' + xy' + y = 0$ avec $y(0) = \sqrt{\pi}$ et $y'(0) = 0$.

En cas de convergence, on pose $f(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx-t^2}dt$.

On rappelle la valeur de l'intégrale de Gauss : $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$.

a. Y a-t-il existence et/ou unicité d'une solution au problème posé ?

b. Donner une expression explicite de y vérifiant les conditions ci-dessus.

c. Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. Trouver une équation différentielle vérifiée par f. Conclure.

13.55 *Mines PSI 2019* Kévin Dufrechou et Mathis Girard I

On s'intéresse à l'équation différentielle $(E)\ :\ \ln(x)y' + \dfrac{y}{x} = 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

On définit $g :]-1; +\infty[\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

a. Résoudre (E) sur $]0;1[$. Et sur $]1;+\infty[$.

b. Montrer que l'on peut prolonger g pour qu'elle devienne C^∞ sur $]-1;+\infty[$.

c. Résoudre (E) sur $]0;+\infty[$.

13.56 *Mines PSI 2019* Lola Josseran I

On considère l'équation différentielle $(E)\ :\ (x^2-x)y''+(x+4)y'-y=0$.

a. Donner les solutions de (E) développables en série entière au voisinage de 0.

b. Existe-t-il des solutions de (E) non développables en série entière au voisinage de 0 ?

13.57 *Mines PSI 2019* Victor Margueritte II

On considère l'équation différentielle $(E)\ :\ x(1-x)y''+(1-3x)y'-y=0$.

a. Trouver les solutions développables en série entière de (E).

b. Résoudre totalement (E) sur des intervalles convenables.

c. Étudier les raccords éventuels.

13.58 *Mines PSI 2019* Thomas Méot II

Soit $E=C^0([0;1],\mathbb{R})$. Pour $f\in E$, on définit $T(f):[0;1]\to\mathbb{R}$ par $T(f)(x)=\displaystyle\int_0^1 \operatorname{Inf}(x,t)f(t)dt$.

a. Montrer que T est un endomorphisme de E.

b. Trouver les éléments propres de T.

13.59 *CCP PSI 2019* Pierre Fabre I

Soit l'équation différentielle $(E)\ :\ x(1-x)y''+(1-3x)y'-y=0$.

a. Donner les solutions de (E) développables en série entière.

b. Pourquoi en existe-t-il d'autres sur $]0;1[$?

c. Trouver toutes les solutions de (E) sur $]0;1[$ en utilisant le changement de fonction inconnue $y(x)=\dfrac{z(x)}{1-x}$.

13.60 *CCP PSI 2019* Auriane Luquet II

Soit $A=\begin{pmatrix}-1 & -4\\ 1 & 3\end{pmatrix}$. On note f l'endomorphisme canoniquement associé à A.

On pose aussi le système différentiel $(S)\ :\ \begin{cases}x'= & -x-4y\\ y'= & x+3y\end{cases}$.

a. Montrer que A n'est pas diagonalisable.

b. Trouver une base $\mathcal{B}=(v_1,v_2)$ de $\mathbb{R}^2$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)=T$ soit triangulaire supérieure.

c. En déduire les solutions du système (S).

13.61 *TPE, EIVP PSI 2019* Maël Classeau II

On considère l'équation différentielle $(E)\ :\ t(t^2-1)y'+2y=t^2$.

a. Résoudre (E) sur les intervalles où elle peut être mise sous forme résolue.

b. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

13.62 *Mines PSI 2021* Paul Jaïs II

a. Résoudre $(E)\ :\ x^2y''-6xy'+(12+x^2)y=0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Indication : on pourra chercher des solutions y de (E) développables en série entière sur $]0;r[$.

b. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

13.63 *Mines PSI 2021* Yuan Le Guennic II

Soit $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une solution sur $\mathbb{R}_+$ de $(E)\ :\ y''+(1+u)y = 0$.
On définit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) + \displaystyle\int_0^x \sin(x-t)u(t)f(t)dt$.

a. Trouver une équation différentielle vérifiée par g.

b. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ |f(x)| \leqslant c + \displaystyle\int_0^x |u(t)|\,|f(t)|dt$.

c. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

13.64 *Mines PSI 2021* Guillaume Touly I

a. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues.
Résoudre $(E)\ :\ y' + fy = g$ avec $y(a) = b$. Y a-t-il unicité de la solution ?
b. Soit $\alpha > 0$ et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et bornée sur $\mathbb{R}_+$.
Résoudre $(E)\ :\ y' - \alpha y = h$. Montrer qu'il existe une unique solution de (E) qui soit bornée sur $\mathbb{R}_+$.

13.65 *CCINP PSI 2021* Esteban Poupinet I

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et telle que f soit solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E)\ :\ x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 0$.
a. Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et que f' et f'' sont développables en série entière.
b. Montrer qu'il existe $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $x^2(1-x)f''(x)-x(1+x)f'(x)+f(x) = a_0+\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} b_n(a_n-a_{n-1})x^n$.
c. En déduire une solution de (E) sur $]-1;1[$.
d. Puis toutes les solutions de (E) sur $]-\infty;0[$, $]0;1[$ et $]1;+\infty[$.

13.66 *Mines-Télécom PSI 2021* Margot Reungoat II (sur 14 points)

On considère l'équation différentielle $(E)\ :\ y'' + y = e^{-\sqrt{x}}$.
a. Montrer que $y_0 : x \mapsto \sin(x)\displaystyle\int_0^x \cos(t)e^{-\sqrt{t}}dt - \cos(x)\int_0^x \sin(t)e^{-\sqrt{t}}dt$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.
b. Montrer que les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions $y : x \mapsto a\cos(x)+b\sin(x)+\displaystyle\int_0^x \sin(x-t)e^{-\sqrt{t}}dt$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
c. Montrer que $t \mapsto e^{-\sqrt{t}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
d. Soit deux fonctions $a, b : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ayant des limites finies ℓ_a et ℓ_b respectivement en $+\infty$. Montrer que $f : x \mapsto a(x)\cos(x) + b(x)\sin(x)$ admet une limite finie en $+\infty$ si et seulement si $\ell_a = \ell_b = 0$.
e. En déduire la solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ qui admet une limite finie en $+\infty$.

13.67 *X PSI 2022* Olivier Courmont II

Soit $f \in C^1([0;1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.
Montrer que $\displaystyle\int_0^1 |f'(t) - f(t)|dt > \frac{1}{e}$ et que cette constante $\dfrac{1}{e}$ est optimale.

13.68 *ENS Cachan PSI 2022* Jimmy Guertin

Soit p et q deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et l'équation $(E)\ :\ y'' + py' + qy = 0$.
a. Soit f une solution de (E) non identiquement nulle avec $a \in \mathbb{R}$ telle que $f(a) = 0$. Montrer qu'il existe un réel $\eta > 0$ tel que $\forall x \in [a-\eta\,;a+\eta] \setminus \{a\},\ f(x) \neq 0$.
Soit f et g deux solutions de (E) telles que (f, g) est libre et $W : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $W(t) = f(t)g'(t)-f'(t)g(t)$.
b. Établir une équation différentielle vérifiée par W. En déduire une expression de W en fonction de $t_0 \in \mathbb{R}$.
c. Montrer que pour tout réel t, on a $W(t) \neq 0$.
d. Soit $a < b$ tels que $f(a) = f(b) = 0$ et $\forall x \in]a;b[,\ f(x) \neq 0$. Montrer que g s'annule une seule fois sur $]a;b[$.

13.69 *Centrale Maths1 PSI 2022* Paul Mayé

Soit $E = \left\{ f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R},\ \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt \text{ converge} \right\}$. On admet que E est un sous-espace vectoriel de $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et que l'application $\varphi : E \to E$ définie par $\varphi(f) = F$ avec $F(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt$ est linéaire.

a. Soit $f \in E$, montrer que $F = \varphi(f) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et que $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = F'(x) + f(x)$.

b. En déduire que φ n'est pas surjective.

c. Donner les éléments propres de φ.

d. Soit $f \in E$ de classe C^1 et bornée, montrer que $f' \in E$ et que $\big(\varphi(f)\big)' = \varphi(f')$.

e. Montrer que si on pose F l'ensemble des fonctions bornées et C^1 de E, alors F est stable par φ. Quel est le spectre de l'endomorphisme induit par φ dans F ?

Question de cours :

- Que dire du rayon de convergence de la somme et du produit de CAUCHY de deux séries entières ?

13.70 *Mines PSI 2022* Lucas Lacampagne I

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et l'équation différentielle $(E)\ :\ y'' - 9y = a|x| + b$.

a. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que (E) possède une unique solution sur $\mathbb{R}$ admettant une asymptote en $\pm\infty$.

13.71 *Mines PSI 2022* Thibault Sourdeval II

Soit I un intervalle et α, β deux fonctions réelles dérivables définies sur I. On définit le wronskien de α, β comme la fonction $w : I \to \mathbb{R}$ vérifiant $\forall t \in I,\ w(t) = \begin{vmatrix} \alpha(t) & \beta(t) \\ \alpha'(t) & \beta'(t) \end{vmatrix}$.

a. Montrer que si φ et ψ sont des solutions de $(E)\ :\ y'' = ay' + by$ avec $a, b : I \to \mathbb{R}$ continues, alors le wronskien w de φ, ψ vérifie une équation différentielle (F) d'ordre 1 sur I.

b. Si φ ne s'annule pas sur I, exprimer $\left(\dfrac{\psi}{\varphi}\right)'$ en fonction de w et φ.

c. Trouver une solution φ développable en série entière de $(E)\ :\ 2ty'' + y' - y = 0$ telles que $\varphi(0) = 1$.

d. En déduire une autre solution ψ de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ non colinéaire à φ. Et sur $\mathbb{R}_-^*$?

e. Donner toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

13.72 *CCINP PSI 2022* Naïs Baubry I et Anna Decrock I

Soit les équations $(E_0)\ :\ x^2y'' - 2y = 0$ et $(E)\ :\ x^2y'' - 2y = x^3$.

a. Trouver une solution polynomiale u de (E_0).

b. Trouver une fonction v solution de (E_0), indépendante de u, écrite sous la forme $v(x) = u(x)z(x)$ avec z de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$.

c. Déduire de la question précédente les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$.

d. Trouver toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

13.6 Officiel de la Taupe

13.73 *OdlT 2012/2013 X-Cachan PSI planche 75*

Soit $I =]a; b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. Soit $f_1, \cdots, f_n : I \to \mathbb{R}$ n fois dérivables.

On appelle wronskien la fonction définie sur I par $W(f_1, \cdots, f_n)(t) = \begin{vmatrix} f_1(t) & \cdots & \cdots & f_n(t) \\ f_1'(t) & \cdots & \cdots & f_n'(t) \\ \vdots & & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(t) & \cdots & \cdots & f_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$.

Montrer que si $(f_1, \cdots, f_n)$ est liée, la fonction $W(f_1, \cdots, f_n)$ est identiquement nulle.
Montrer que si $W(f_1, \cdots, f_n) = 0$ et $f_1, \cdots, f_n$ solutions de $(E)\ :\ y^{(n)} + p_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + p_0(t)y = 0$ où les p_i sont continues de I dans $\mathbb{R}$, alors la famille $(f_1, \cdots, f_n)$ est liée.
On choisit $I = \mathbb{R}$, $f_1(t) = t^2$ et $f_2(t) = t|t|$. Montrer que $W(f_1, f_2) = 0$ mais que (f_1, f_2) est libre.
On se propose de montrer que si $W(f_1, \cdots, f_n) = 0$ alors $(f_1, \cdots, f_n)$ est liée sur un segment $J = [\alpha; \beta] \subset I$.
Soit g une fonction $n-1$ fois dérivable sur I. Montrer que $W(f_1 g, \cdots, f_n g) = g^n W(f_1, \cdots, f_n)$.
On suppose que f_1 ne s'annule pas sur I. Montrer que $W(f_1, \cdots, f_n) = f_1^n W\left(\left(\frac{f_2}{f_1}\right)', \cdots, \left(\frac{f_n}{f_1}\right)'\right)$.
Démontrer le résultat attendu. Que dire si $f_1, \cdots, f_n$ sont des fonctions polynomiales ?

13.74 *OdlT 2012/2013 X-Cachan PSI planche 76*

Soit a, b deux réels strictement positifs. Montrer que le système différentiel $\begin{cases} x' &= -ax \\ y' &= ax - by \\ z' &= by \end{cases}$ avec les conditions $x(0) = 1$ et $y(0) = z(0) = 0$ admet une unique solution (x, y, z).
Montrer que : $\forall t > 0$, $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ sont strictement positifs. Montrer que : $\forall t > 0$, $x(t) + y(t) + z(t) = 1$.
En déduire que $x(t)$ et $y(t)$ tendent vers 0 quand t tend vers $+\infty$ et que $z(t)$ tend vers 1. Résoudre le système.
À a et t fixés, on fait tendre b vers $+\infty$. Montrer que $x(t)$ est indépendant de b, que $y(t)$ tend vers 0 et que $z(t)$ tend vers $1 - x(t)$. Que se passe-t-il si l'on fait tendre a vers $+\infty$ à b et t fixés. Et si a tend vers 0 ?

13.75 *OdlT 2012/2013 Centrale PSI planche 129*

On donne l'équation différentielle $(E)\ :\ 2x(1+x)y' + (1+x)y = f(x)$.
On suppose que $f = 1$, résoudre l'équation sur $]0; +\infty[$ et $]-1; 0[$. Donner les solutions sur $]-1; +\infty[$.
On suppose que f est développable en série entière au voisinage de 0 avec un rayon de convergence $R \geqslant 1$.
Montrer qu'il existe une solution de (E) développable en série entière et exprimer ses coefficients en fonction de ceux de f. Montrer que le rayon de convergence de y est au moins égal à 1.

13.76 *OdlT 2012/2013 Mines PSI planche 172 II*

Résoudre l'équation $(E)\ :\ y'' - y = e^{-x}\left(x \ln|x| - \frac{1}{4x}\right)$.

13.77 *OdlT 2012/2013 Mines PSI planche 173 I*

Trouver les fonctions f de classe C^2 telles que $f + f'' \geqslant 0$ et montrer qu'elles vérifient $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + f(x+\pi) \geqslant 0$.

13.78 *OdlT 2012/2013 CCP PSI planche 214 II*

Trouver les solutions développables en série entière de $(E)\ :\ 2xy'' + y' - y = 0$.
Les exprimer à l'aide de fonctions usuelles.

13.79 *OdlT 2012/2013 ENSIIE PSI planche 251 II*

Déterminer toutes les fonctions f, continues sur $\mathbb{R}$, qui vérifient $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x + \int_0^x (x-t)f(t)dt$ (on pourra montrer que f vérifie une équation différentielle du second ordre).

13.80 *OdlT 2013/2014 CCP PSI planche 247 II*

Montrer que $y(x) = x$ est solution de $(E_0)\ :\ (1+x^2)y'' + xy' - y = 0$. Dériver $\phi(x) = -\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$. En déduire les solutions de $(E)\ :\ (1+x^2)y'' + xy' - y = x\sqrt{1+x^2}$. Déterminer les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

13.81 *OdlT 2013/2014 ENTPE/EIVP PSI planche 292 I*

Résoudre $(E)\ :\ x^2y'' - xy' + y = 0$ sur $\mathbb{R}$.

13.82 *OdlT 2014/2015 Mines PSI planche 154 I*

a. Trouver la (ou les) solution(s) y de $(E)\ :\ xy''(x) + y'(x) + y(x) = 0$, DSE, telle(s) que $y(0) = 1$.

b. Montrer que la (ou les) solution(s) ne s'annule(nt) qu'une fois sur $]0;2[$.

13.83 *OdlT 2014/2015 Mines PSI planche 159 II*

Trouver les solutions de $(E)\ :\ (1+x^2)y''(x) + 4xy'(x) + 2y(x) = 1$.

13.84 *OdlT 2014/2015 Mines PSI planche 160 II*

Soit $q : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue et $(E)\ :\ y'' + q(x)y = 0$. On suppose que $y(0) = 0$, $y'(0) > 0$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} q(x) = \ell$. Montrer que y' s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}_+$.

13.85 *OdlT 2014/2015 Mines PSI planche 163 I*

Montrer que l'application T défini par $T(f)(x) = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{Min}(x,t)f(t)dt$ est un endomorphisme de l'espace E des fonctions continues sur $[0;1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Trouver ses valeurs propres et vecteurs propres.

13.86 *OdlT 2014/2015 Mines PSI planche 171 I*

Soit le système différentiel $X'(t) = AX(t)$ avec $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ antisymétrique.

a. Montrer que $||X(t)||$ ne dépend pas de t.

b. Montrer, pour $Y \in \mathrm{Ker}(A)$, que $(X(t)|Y)$ ne dépend pas de t.

c. Montrer que $X(t)$ est sur un cercle de $\mathbb{R}^3$.

13.87 *OdlT 2014/2015 Mines PSI planche 172 I*

Résoudre $4(1-t^2)y''(t) - 4ty'(t) + y(t) = 0$.

13.88 *OdlT 2014/2015 CCP PSI planche 276 I*

On note $E = C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et Φ l'application de E dans E qui à f associe g définie par $g(x) = f'(x) - xf(x)$.

a. Φ est-elle linéaire ?

b. Donner ses valeurs propres. Donner $\mathrm{Ker}(\Phi^2)$.

13.89 *OdlT 2014/2015 CCP PSI planche 278 I*

Résoudre $(E)\ :\ t(t^2-1)y'(t) + 2y(t) = t^2$ sur un intervalle à préciser.

13.90 *OdlT 2014/2015 CCP PSI planche 281 I*

a. Parité de $f(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \displaystyle\int_0^x e^{\frac{-t^2}{2}} dt$?

b. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et qu'elle vérifie une équation différentielle à déterminer.

c. Montrer que f est développable en série entière et déterminer ce développement.

13.91 *OdlT 2014/2015 ENSEA-ENSIIE PSI planche 326 I*

Trouver une solution DSE, dont on donnera le rayon, de $(E) \ : \ t^2y''(t)+4ty'(t)+2y(t)=\ln(1+t)$.

13.92 *OdlT 2014/2015 Télécom Sud Paris PSI planche 330 I*

Soit a_1 et a_2 continues sur $\mathbb{R}$.
On note y_1 une solution de $(E_1) \ : \ y''+a_1y=0$ et y_2 une solution de $(E_2) \ : \ y''+a_2y=0$. On suppose que $\forall x \in \mathbb{R}, \ a_1(x) > a_2(x)$ et qu'il existe deux réels a et b tels que $\forall x \in]a;b[, \ y_1(x)>0$ et $y_1(a)=y_1(b)=0$.
Montrer que $\exists c \in]a;b[, \ y_2(c)=0$ (on pourra raisonner par l'absurde et étudier $\frac{y_1}{y_2}$).

13.93 *OdlT 2015/2016 X-Cachan PSI planche 39*

On donne $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\forall j \in [\![1;n]\!]$, $\begin{cases} X_j'(t) & = & AX_j(t) \\ X_j(0) & = & e_j \end{cases}$ où e_j est le j-ième vecteur de la base canonique. On note $X_{i,j}(t)$ la i-ième coordonnée du vecteur $X_j(t)$ et $X(t)=\big(X_{i,j}(t)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.
Montrer que $\forall j \in [\![1;n]\!]$, $X_j(t)$ est bien défini sur $\mathbb{R}$.
Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}, \ \det(X(t)) \neq 0$ et trouver une équation différentielle vérifiée par $\det(X(t))$; en déduire que si $\mathrm{Tr}\,(A)=0$, alors $\forall t \in \mathbb{R}, \ \det(X(t))=1$.

13.94 *OdlT 2015/2016 Mines PSI planche 129I*

Résoudre $4(1-t^2)y''-4ty'+y=0$ sur $]-1;1[$.

13.95 *OdlT 2015/2016 Centrale PSI planche 181*

Si a, de classe C^1 de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ est intégrable, a-t-on $\lim\limits_{x\to+\infty} a(x)=0$?
On pose $g(x)=f(x)+\displaystyle\int_0^x \sin(x-t)a(t)f(t)dt$ où f est solution sur $\mathbb{R}_+$ de $y''(x)+(1+a(x))y(x)=0$; montrer que g est C^2 sur $\mathbb{R}_+$ puis que $g''+g=0$.
Montrer que $\exists c \in \mathbb{R}_+, \ \forall x \geqslant 0, \ |f(x)| \leqslant c + \displaystyle\int_0^x |a(t)|\,|f(t)|dt$.
Montrer que toutes les solutions de $y''(x)+(1+a(x))y(x)=0$ sont bornées sur $\mathbb{R}_+$.

13.96 *OdlT 2015/2016 Centrale PSI planche 182*

On note E l'ensemble des f de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, vérifiant $f'(x)=\alpha f(x)+f(\lambda x)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in]-1;1[$.
Montrer que les fonctions de E sont C^∞.
Déterminer celles qui sont développables en série entière et sont non nulles.
Montrer que si $f(0)=0$, alors f est nulle.
Déterminer complètement E.

13.97 *OdlT 2015/2016 Centrale PSI planche 186II*

Donner la méthode de résolution de $X'(t)=AX(t)$ où A est réelle, diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

13.98 *OdlT 2015/2016 CCP PSI planche 234II*

Trouver une solution polynomiale de $x^2y''+xy'-y=0$. En déduire les solutions de l'équation sur $\mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{R}_-^*$.
On suppose que $\sum b_nx^n$ est solution de $x^2y''+xy'-y=\sum a_nx^n$; exprimer les a_n en fonction des b_n puis donner une condition sur les b_n pour qu'une telle solution existe.

13.99 *OdlT 2015/2016 CCP PSI planche 239I*

On donne l'équation différentielle : $x^{(3)} - 5x'' + 7x' - 3x = 0$. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle qu'avec $X = \begin{pmatrix} x \\ x' \\ x'' \end{pmatrix}$, on ait $X' = AX$. Montrer que A est semblable à $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Résoudre l'équation.

13.100 *OdlT 2015/2016 ENSAM PSI planche 269I*

a. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{n!}{1 \times 3 \times \cdots \times (2n+1)} x^{2n+1}$.

Soit $f :]-R; R[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{n!}{1 \times 3 \times \cdots \times (2n+1)} x^{2n+1}$.

b. Montrer que f est solution de $(E)\ :\ (x^2-2)y' + xy + 2 = 0$.

c. En déduire une expression de $f(x)$ avec des fonctions usuelles.

13.101 *OdlT 2016/2017 Centrale PSI planche 163 abordable dès la 1$^{\text{ère}}$ année*

On cherche à résoudre $(E)\ :\ 2xy'(x) - 2y(-x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

Montrer que toute fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ se décompose de manière unique en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. Montrer que le problème, sous certaines conditions supplémentaires que l'on précisera, se ramène à deux équations différentielles d'ordre 1 et résoudre.

13.102 *OdlT 2016/2017 CCP PSI planche 215I*

Donner les éléments propres de $A(t) = \begin{pmatrix} 1-3t & 4t \\ -2t & 1+3t \end{pmatrix}$. Si $A(t)$ est diagonalisable, donner la matrice de passage P. Résoudre le système différentiel $Y'(t) = A(t)Y(t)$.

13.103 *OdlT 2016/2017 EIVP PSI planche 246I abordable dès la 1$^{\text{ère}}$ année*

Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $(E_c)\ :\ x(x+1)y' - (3x+c)y = 0$ avec $c \in \mathbb{R}$.
Éléments propres de ϕ défini sur $\mathbb{R}_3[X]$ par $\phi(P)(X) = X(X+1)P'(X) - 3XP(X)$.

13.104 *OdlT 2016/2017 Mines-Télécom PSI planche 247I*

a. Trouver les fonctions développables en séries entières solutions de $(E)\ :\ x^2y'' + 6xy' + (6-x^2)y = -1$.

b. Exprimer les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ à l'aide de fonctions usuelles.

c. Déterminer les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

13.105 *Compléments OdlT 2017/2018 CCP PSI planche 460II*

Montrer que $f(x) = \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{Arcsin}\,x$ est C^1 sur un intervalle à préciser et chercher trois polynômes a, b, c tels que $a(x)f'(x) + b(x)f(x) = c(x)$.
Chercher une solution impaire de cette équation sous forme de série entière.