TD 23 : ESPACES VECTORIELS NORMÉS

PSI 1 2023-2024 **vendredi 15 mars 2024**

23.1 <u>Méthode 1</u> : considérons $X = \{t \in [0;1] \mid f(t) \in A\}$. Alors X est une partie non vide ($0 \in X$) et majorée (par 1) de $\mathbb{R}$ donc, à ce titre, admet une borne supérieure qu'on note x. Montrons que $f(x) \in \mathrm{Fr}(A)$.

• Par caractérisation séquentielle de la borne supérieure, il existe $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = x$. Comme f est continue en x, par caractérisation séquentielle de la continuité, il vient $\lim\limits_{n\to+\infty} f(t_n) = f(x)$. Par caractérisation séquentielle des points adhérents, comme $(f(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente de vecteurs de A, on en déduit que $f(x)$ est adhérent à A, c'est-à-dire $f(x) \in \overline{A}$.

• Supposons que $f(x) \in \mathring{A}$: il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que $B(f(x), \varepsilon) \subset A$. Comme $\mathring{A} \subset A$, on a $x < 1$ car $f(1) \notin A$. Mais comme f est continue en x, on aurait un réel $\alpha > 0$ tel que $\forall t \in [0;1],\ |t-x| < \alpha \Longrightarrow ||f(t) - f(x)|| < \varepsilon$. On aurait $\forall t \in [x; x+\alpha[\cap[0;1],\ |t-x| < \alpha$ donc $||f(t) - f(x)|| < \varepsilon \Longrightarrow f(t) \in B(f(x), \varepsilon) \subset A$ donc $f(t) \in A$ ce qui contredit le fait que x soit la borne supérieure de X car ce qui précède montre que $[x; x+\alpha[\cap[0;1] \subset X$. Ce raisonnement par l'absurde nous permet de conclure que $f(x) \notin \mathring{A}$.

Au final, $f(x) \in \overline{A} \cap (\mathring{A})^c = \overline{A} \setminus \mathring{A} = \mathrm{Fr}(A)$.

<u>Méthode 2</u> : $Y = \{t \in [0;1] \mid f(t) \notin A\}$ est une partie non vide ($1 \in X$) et majorée (par 0) de $\mathbb{R}$ donc, à ce titre, admet une borne inférieure qu'on note y. Montrons que $f(y) \in \mathrm{Fr}(A)$.

• Supposons que $f(y) \in \mathring{A}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(f(y), \varepsilon) \subset A$ et, par continuité de f en y, il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall t \in [y; y+\alpha[\cap[0;1],\ ||f(t) - f(y)|| < \varepsilon$ ce qui montre que $f(t) \in B(f(y), \varepsilon) \subset A$ donc $f(t) \in A$. On aurait donc $\forall t \in [y; y+\alpha[\cap[0;1],\ t \notin Y$. Cette condition est incompatible avec la condition $\mathrm{Inf}(Y) = y$. On vient donc de démontrer par l'absurde que $f(y) \notin \mathring{A}$. Comme $\mathring{A} \subset A$ et que $f(0) \in \mathring{A}$, on a forcément $y > 0$.

• Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, le réel $t_n = \left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)y$, alors $0 \leqslant t_n < y$ donc $t_n \notin Y$ ce qui montre que $f(t_n) \in A$.

Puisque $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers y, par caractérisation séquentielle de la continuité, $(f(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $f(y)$, et comme elle est constituée de vecteurs de A, par caractérisation séquentielle des vecteurs adhérents, $f(y) \in \overline{A}$.

Au final, $f(x) \in \overline{A} \cap (\mathring{A})^c = \overline{A} \setminus \mathring{A} = \mathrm{Fr}(A)$.

23.2 **a.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{(n+x)^2} + \dfrac{1}{(n-x)^2}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^*$. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^*$, on a $f_n(x) \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge et la fonction g est donc bien définie sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^*$.

Soit $a \in]0;1[$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [-a;a]$, alors $0 \leqslant f_n(x) \leqslant \dfrac{2}{(n-a)^2}$. Ainsi, $||f_n||_{\infty,[-a;a]} \leqslant \dfrac{2}{(n-a)^2}$. Mais comme $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{2}{(n-a)^2}$ converge par RIEMANN, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur tout segment de $]-1;1[$. Comme toutes les f_n sont continues sur $]-1;1[$, g est continue sur $]-1;1[$ par théorème.

De plus, on a classiquement $g(0) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2}{n^2} = 2\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{3}$.

b. La fonction φ de l'énoncé est bien définie sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ car g l'est et que $\sin$ ne s'annule qu'en les multiples de π. Comme il est donné qu'elle s'annule en tous les entiers, elle est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $g(x+1) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{(n+1+x)^2} + \dfrac{1}{(n-1-x)^2}\right) = \sum\limits_{p=2}^{+\infty} \dfrac{1}{(p+x)^2} + \sum\limits_{q=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(q-x)^2}$ donc il vient $g(x+1) = \left(\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(p+x)^2}\right) - \frac{1}{(1+x)^2} + \left(\sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{(q-x)^2}\right) + \frac{1}{x^2} = g(x) + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2}$ de sorte que $\varphi(x+1) = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi(x+1))} + g(x+1) = \frac{1}{x^2} - \frac{\pi^2}{\sin(\pi x)^2} + g(x) = \varphi(x)$ car $\sin(\theta+\pi) = -\sin(\theta)$. Par conséquent φ est 1-périodique car elle vérifie aussi $\forall n \in \mathbb{Z},\ \varphi(n+1) = \varphi(n) = 0$.

Comme g est continue sur $]0;1[$, que $x \mapsto \sin(\pi x)$ l'est aussi et ne s'y annule pas, φ est continue sur $]0;1[$ par opérations. Pour vérifier la continuité de φ sur $\mathbb{R}$, comme elle est 1-périodique, il suffit de vérifier que φ est continue en 0. Comme g est continue en 0 avec $g(0) = \frac{\pi^2}{3}$, on vérifie $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}\right) = -\frac{\pi^2}{3}$.
On a le développement limité $\sin(\pi x) \underset{0}{=} \pi x - \frac{\pi^3 x^3}{6} + o(x^3)$ donc $\sin^2(\pi x) \underset{0}{=} \pi^2 x^2 - \frac{\pi^4 x^4}{3} + o(x^4)$ ce qui donne en inversant $\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)} \underset{0}{=} \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{1 - \frac{\pi^2 x^2}{3} + o(x^2)} \underset{0}{=} \frac{1}{x^2}\left(1 + \frac{\pi^2 x^2}{3} + o(x^2)\right) \underset{0}{=} \frac{1}{x^2} + \frac{\pi^2}{3} + o(1)$. Ainsi, $\varphi(x) \underset{0}{=} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} - \frac{\pi^2}{3} + \frac{\pi^2}{3} + o(1) \underset{0}{=} o(1)$ donc $\lim_{x\to 0} \varphi(x) = \varphi(0) = 0$.
Au final, la fonction φ est bien un élément de E.
c. Soit $f \in E$, la fonction $h : x \mapsto f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et, comme f est 1-périodique, $h(x+1) = f\left(\frac{x+1}{2}\right) + f\left(\frac{x+2}{2}\right) = f\left(\frac{x+1}{2}\right) + f\left(\frac{x}{2}\right) = h(x)$ donc h est elle aussi 1-périodique. De plus, h est continue sur $\mathbb{R}$ par opérations donc $h \in E$. Ainsi, comme la linéarité de L est claire, L est un endomorphisme de E. De plus, pour $f \in E$ et $x \in \mathbb{R}$, $|L(f)(x)| = \left|f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right| \leqslant \left|f\left(\frac{x}{2}\right)\right| + \left|f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right| \leqslant 2||f||_\infty$ ainsi L est 2-lipschitzienne donc continue. L'inégalité précédente montre que $|||L||| = \operatorname{Sup}_{f\in E, f\neq 0} \frac{||L(f)||_\infty}{||f||_\infty} \leqslant 2$. De plus, si on prend $f = 1$ (fonction constante), on a $L(f) = 2 = 2f$ et $f \neq 0$ donc $|||L||| = 2$.
d. Posons $\psi = L(\varphi)$. Pour $x \in]0;1[$, puisque $\sin\left(\frac{\pi(x+1)}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi x}{2}\right) = \cos(\frac{\pi x}{2})$, on obtient $\psi(x) = \varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{4}{x^2} - \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x/2)} + g\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{4}{(x+1)^2} - \frac{\pi^2}{\cos^2(\pi x/2)} + g\left(\frac{x+1}{2}\right)$ qui devient $\psi(x) = \frac{4}{x^2} + \frac{4}{(x+1)^2} - \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x/2)\cos^2(\pi x/2)} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{(2n+x)^2} + \frac{4}{(2n-x)^2} + \frac{4}{(2n+1+x)^2} + \frac{4}{(2n-1-x)^2}$.
Or $\frac{4}{(x+1)^2} = \frac{4}{(2.1-1-x)^2}$ et $\sin^2(\pi x/2)\cos^2(\pi x/2) = \frac{\sin^2(x)}{4}$ donc, en regroupant les termes pairs et impairs dans la même série : $\psi(x) = \frac{4}{x^2} - \frac{4\pi^2}{\sin^2(\pi x)} + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{(n+x)^2} + \frac{1}{(n-x)^2}\right) = 4\varphi(x)$.

De plus, $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = 4 - \pi^2 + g(1/2) = 4 - \pi^2 + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} + 4 + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = -\pi^2 + 8\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = 0$ (classiquement en séparant les termes pairs et impairs et en se ramenant à $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$).

Comme ψ est 1-périodique d'après **c.** et que $\forall n \in \mathbb{Z}, \psi(n) = \psi(0) = \varphi(0) + \varphi\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ d'après ce qui précède, on en déduit que $\psi = 4\varphi$. D'après la question **c.**, on a donc $||\psi||_\infty = 4||\varphi||_\infty = ||L(\varphi)||_\infty \leqslant 2||\varphi||_\infty$ ce qui montre que $||\varphi||_\infty = 0$ donc que φ est la fonction nulle. On en déduit donc que pour tout réel x non entier : $\varphi(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)} + g(x) = \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{(n+x)^2} + \frac{1}{(n-x)^2}\right) - \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)} = 0$ donc que $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}$ en regroupant les deux séries en une seule à indices entiers relatifs.

23.3 **a.** Pour $(t,t') \in \mathbb{R}^2$, $\left|f(t)-f(t')\right| = \Big|\,||a+tb||-||a+t'b||\,\Big| \leqslant ||a+tb-(a+t'b)||$ par la seconde inégalité triangulaire, d'où $\left|f(t)-f(t')\right| \leqslant ||(t-t')b|| = ||b||\,|t-t'|$. Ainsi, f est $||b||$-lipschitzienne donc continue.

b. Comme $tb = (a+tb)-a$, par inégalité triangulaire, on obtient $||tb|| = |t|\,||b|| \leqslant ||a+tb||+||a||$ donc $f(t) = ||a+tb|| \geqslant ||b||\,|t|-||a||$. Comme $\lim\limits_{t\to\pm\infty}(||b||\,|t|-||a||) = +\infty$, par minoration, $\lim\limits_{t\to\pm\infty} f(t) = +\infty$.

c. <u>Intervalle</u> : si $I \neq \emptyset$, soit $(t_1,t_2) \in I^2$ tel que $t_1 < t_2$. On va montrer que $[t_1;t_2] \subset I$, c'est-à-dire que I est un convexe. Soit $t \in [t_1;t_2]$, en faisant un dessin, comme la trajectoire de $t \mapsto a+tb$ est la droite affine passant par le "point" a de vecteur directeur b, on voit que le vecteur $a+tb$ est dans le segment $[a+t_1b;a+t_2b]$, c'est-à-dire qu'il existe un réel $\alpha \in [0;1]$ tel que $a+tb = \alpha(a+t_1b)+(1-\alpha)(a+t_2b)$. Un simple calcul, comme $b \neq 0_E$, montre que $\alpha = \dfrac{t_2-t}{t_2-t_1}$. Par inégalité triangulaire, on a donc $||a+tb|| \leqslant \alpha||a+t_1b||+(1-\alpha)||a+t_2b||$ or, puisque t_1 et t_2 sont dans I, $||a+t_1b|| < 1$ et $||a+t_2b|| < 1$, d'où, puisque $\alpha > 0$ ou $1-\alpha > 0$, on en déduit que $||a+tb|| < 1$. Ainsi, $t \in I$. I est donc un convexe, I est alors un intervalle.

<u>Borné</u> si $I \neq \emptyset$, par définition des limites de **b.**, en prenant $\varepsilon = 1$, il existe t_0 tel que $\forall t \geqslant t_0,\ f(t) \geqslant 1$ donc $[t_0;+\infty[\cap I = \emptyset$. On peut donc conclure que I est majoré par t_0. Le même raisonnement avec $\lim\limits_{t\to-\infty} f(t) = +\infty$ montre que I est aussi minoré par un réel t'_0. Alors, I est un intervalle borné.

On pouvait aussi reprendre l'inégalité $||a+tb|| \geqslant ||b||\,|t|-||a||$ qui montre que si $t \in I$, on a $||a+tb|| < 1$ donc $||b||\,|t|-||a|| < 1$ d'où $|t| < \dfrac{1+||a||}{||b||}$ donc I est borné.

<u>Ouvert</u> : supposons $I \neq \emptyset$, on va montrer que I est ouvert de trois manières différentes.

• Le plus simple, par définition de $I = \{t \in \mathbb{R} \mid ||a+tb|| = f(t) < 1\}$, on a $I = f^{-1}(\,]-1;1[\,) = f^{-1}(\,]-\infty;1[\,)$ donc I est l'image directe d'un ouvert par une fonction continue donc c'est un ouvert.

• Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (I^c)^{\mathbb{N}}$ une suite convergente (vers t) d'éléments de I^c. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N},\ ||a+t_nb|| = f(t_n) \geqslant 1$ par définition de I. Par caractérisation séquentielle de la continuité, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(t_n) = f(t)$. Or $\forall n \in \mathbb{N},\ f(y_n) \geqslant 1$ donc, à la limite, $f(t) \geqslant 1$ ce qui prouve que $t \in I^c$. Ainsi, I^c est fermé par caractérisation séquentielle des fermés donc I est ouvert.

• Soit $t \in I$, par définition $v = a+tb \in B(0_E,1)$ qui est une boule ouverte donc il existe $r > 0$ tel que $B(v,r) \subset B(0_E,1)$; on peut prendre par exemple $r = 1-||v|| > 0$. Or f est continue en t donc il existe $\eta > 0$ tel que $\forall t' \in \mathbb{R},\ |t-t'| < \eta \Longrightarrow |f(t)-f(t')| < r \Longrightarrow f(t') < f(t)+r = 1$ car $f(t) = ||v||$. Ainsi, si $t' \in]t-\eta;t+\eta[$, on a $f(t') = ||a+t'b|| < 1$ donc $t' \in I$ et I est bien ouvert.

Par conséquent, $I = \{t \in \mathbb{R} \mid a+tb \in B(0_E,1)\}$ est un intervalle borné et ouvert ou I est vide.

23.4 **a.** S n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ car la matrice nulle ne vérifie pas $0^2 = I_3$ par exemple.

b. S n'est pas stable par produit car, par exemple, si on prend $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a bien $A^2 = B^2 = I_3$ mais $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ vérifie $(AB)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \neq I_3$.

c. Soit $(A_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de matrices de S qui converge vers $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. L'application produit définie par

$P : (\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))^2 \to \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $P(A,B) = AB$ est bilinéaire en dimension finie donc elle est continue. L'application $D : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \to (\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))^2$ définie par $D(A) = (A,A)$ est linéaire en dimension finie donc elle est continue. Ainsi, par composée, l'application carré $C = P \circ D : A \mapsto A^2$ est continue sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Ainsi, comme $\lim_{n\to+\infty} A_n = A$, par caractérisation séquentielle de la continuité, $\lim_{n\to+\infty} C(A_n) = \lim_{n\to+\infty} A_n^2 = A^2$. Mais la suite $(A_n^2)_{n\geqslant 0}$ est constante égale à I_3. Par unicité de la limite, $A^2 = I_3$. L'ensemble S est donc fermé.

d. S n'est pas borné car les matrices $M_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$ sont dans S quel que soit $a > 0$ alors que $\forall a > 1,\ ||M_a||_\infty = a$ donc $\lim_{a\to+\infty} ||M_a||_\infty = +\infty$.

23.5 **a.** Soit $f \in E$, on a $f \leqslant |f|$ donc $g = |f| - f \geqslant 0$ ce qui donne, par hypothèse, $u(g) = u(|f|) - u(f) \geqslant 0$ par linéarité de u. De même, $-f \leqslant |f|$ donc $h = |f| + f \geqslant 0$ et, à nouveau $u(h) = u(|f|) + u(f) \geqslant 0$ donc $-u(|f|) \leqslant u(f) \leqslant u(|f|)$ ce qui garantit bien que $|u(f)| \leqslant u(|f|)$.

b. Pour $f \in E$, comme f est continue sur le segment I, elle y est bornée par le théorème des bornes atteintes donc $|f| \leqslant ||f||_{\infty,I} e$. On pose cette fois $a = ||f||_{\infty,I} e - f \geqslant 0$ donc $u(a) \geqslant 0$ ce qui donne une nouvelle fois par linéarité de u, $||f||_{\infty,I} u(e) - u(|f|) \geqslant 0$. On a donc, d'après **a.**, $|u(f)| \leqslant u(|f|) \leqslant ||f||_{\infty,I} u(e)$ donc on a bien $\forall f \in E,\ |u(f)| \leqslant C||f||_{\infty,I}$ en posant $C = u(e) \geqslant 0$ car e est positive sur I.

c. D'après la question précédente, $\forall f \in E\backslash\{0\},\ \dfrac{|u(f)|}{||f||_{\infty,I}} \leqslant u(e)$. La partie $A = \left\{ \dfrac{|u(f)|}{||f||_{\infty,I}} \;\middle|\; f \in E\backslash\{0\} \right\} \subset \mathbb{R}$ est non vide (car il existe des fonctions non nulles sur I) et majorée par $u(e)$ ce qui montre que la borne supérieure de l'énoncé existe et que $\mathrm{Sup}(A) \leqslant u(e)$. De plus, en prenant $f = e$, on a $e \in E \setminus \{0\}$ et $\dfrac{|u(f)|}{||f||_{\infty,I}} = u(e)$ donc $u(e) \in A$ ce qui montre que cette borne supérieure est un maximum (atteint en e) et que $\underset{\substack{f\in E \\ f\neq 0}}{\mathrm{Sup}} \dfrac{|u(f)|}{||f||_{\infty,I}} = u(e)$.

23.6 **a.** p_2 est bien définie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}_+$. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

- si $p_2(A) = 0$, on a $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2 = 0$ ce qui montre, comme une somme de quantités positives ne peut être nulle que si tous ses termes sont nuls, que $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ a_{i,j} = 0$ donc que $A = 0$ (séparation).
- si $\lambda \in \mathbb{R}$, $p_2(\lambda A) = \sqrt{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (\lambda a_{i,j})^2} = \sqrt{\lambda^2} \times \sqrt{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2} = |\lambda| p_2(A)$ (homogénéité).
- $p_2(A+B)^2 = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (a_{i,j} + b_{i,j})^2 = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2 + 2 \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j} b_{i,j} + \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} b_{i,j}^2$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^{n^2}$, on a $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j} b_{i,j} \leqslant \sqrt{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2} \sqrt{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} b_{i,j}^2}$ donc on obtient $p_2(A+B)^2 \leqslant p_2(A)^2 + 2p_2(A)p_2(B) + p_2(B)^2$ ce qui, en passant à la racine, donne bien la majoration $p_2(A+B) \leqslant p_2(A) + p_2(B)$ (inégalité triangulaire).

Par conséquent, p_2 est bien une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. La norme p_2 définie par l'énoncé est, d'après le cours, la norme euclidienne associée au produit scalaire canonique $(\,.\,|\,.\,) : (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2 \to \mathbb{R}$ défini par $(A|B) = \mathrm{Tr}\,(A^T B) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j} b_{i,j}$.

c. Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $X^T = (x_1 \ \cdots \ x_n)$, en notant $L_i(M)$ la ligne i de la matrice M vue comme un vecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $(MX)^T = \left(\sum_{j=1}^n m_{1,j} x_j \ \cdots \ \sum_{j=1}^n m_{n,j} x_j \right) = \big((L_1(M)|X) \ \cdots \ (L_n(M)|X) \big)$. Ainsi, $||MX||_2^2 = \sum_{i=1}^n (L_i(M)|X)^2$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $(L_i(M)|X)^2 \leqslant ||L_i(M)||_2^2 ||X||_2^2$ donc

$||MX||_2^2 \leqslant \Big(\sum\limits_{i=1}^{n} ||L_i(M)||_2^2\Big)||X||_2^2 = p_2(M)^2||X||_2^2$. En passant à la racine, on a bien $||MX||_2 \leqslant p_2(M)||X||_2$.

Pour trouver $X \neq 0$ tel que $||MX||_2 = p_2(M)||X||_2$, il faut que toutes les inégalités précédentes soient des égalités, c'est-à-dire que X et $L_i(M)$ soient colinéaires pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, donc que toutes les lignes de M soient proportionnelles, ou encore que M soit de rang 1. Ce n'est donc pas la meilleure constante cherchée dans le cas général.

d. Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $||MX||_2^2 = (MX|MX) = X^TM^TMX$. La matrice M^TM est symétrique réelle, elle est donc diagonalisable par le théorème spectral. De plus, si λ est une valeur propre de M^TM, il existe $X \neq 0$ tel que $M^TMX = \lambda X$ ce qui donne $X^TM^TMX = \lambda X^TX$ ou encore $||MX||_2^2 = \lambda||X||_2^2$ donc $\lambda \geqslant 0$ car $||X||_2^2 > 0$ puisque $X \neq 0$. On dit que M^TM est symétrique positive. Il existe donc $P \in O(n)$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale avec des termes positifs sur la diagonale (les valeurs propres de M^TM), plus précisément $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ avec $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ telles que $M^TM = PDP^T$.

Si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $||MX||_2^2 = X^TM^TMX = X^TPDP^TX = Y^TDY$ en posant $Y = P^TX$. Si on note $Y^T = (y_1 \ \cdots \ y_n)$, on calcule $Y^TDY = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2 \leqslant \lambda_n \sum\limits_{k=1}^{n} y_k^2 = \lambda_n||Y||_2^2$. Or $||Y||_2^2 = Y^TY = X^TPP^TX = X^TX = ||X||_2^2$ car $PP^T = I_n$. Ainsi, $||MX||_2^2 \leqslant \lambda_n||X||_2^2$ d'où, en passant à la racine, $||MX||_2 \leqslant \sqrt{\lambda_n}||X||_2$ donc $\dfrac{||MX||_2}{||X||_2} \leqslant \sqrt{\lambda_n}$. Si X_n est un vecteur propre unitaire de M^TM associé à la valeur propre λ_n, on a $\dfrac{||MX_n||_2^2}{||X_n||_2^2} = X_n^TM^TMX_n = \lambda_nX_n^TX_n = \lambda_n$ donc $\dfrac{||MX_n||_2}{||X_n||_2} = \sqrt{\lambda_n}$. Par conséquent, $\sqrt{\lambda_n}$ majore $\left\{\dfrac{||MX||_2}{||X||_2} \ \middle| \ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ et } X \neq 0\right\}$ et fait partie de cet ensemble, ceci prouve que $\underset{\substack{X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\\ X\neq 0}}{\mathrm{Sup}} \dfrac{||MX||_2}{||X||_2} = \underset{\substack{X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\\ X\neq 0}}{\mathrm{Max}} \dfrac{||MX||_2}{||X||_2} = \sqrt{\lambda_n}$.

23.7 **a.** C est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ donc, par la propriété fondamentale des réels, elle admet une borne supérieure. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Sup}(C)$ est un majorant de C mais $\mathrm{Sup}(C) - \dfrac{1}{2^n}$ n'en est pas un car $\mathrm{Sup}(C)$ est le plus grand des majorants. Ainsi, il existe un réel $x_n \in C$ tel que $\mathrm{Sup}(C) - \dfrac{1}{2^n} < x_n \leqslant \mathrm{Sup}(C)$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\mathrm{Sup}(C) - \dfrac{1}{2^n}\right) = \mathrm{Sup}(C)$, par le théorème d'encadrement, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \mathrm{Sup}(C)$. Par conséquent, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de C qui converge vers $\mathrm{Sup}(C)$. Bien sûr, il existe aussi une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de C qui converge vers $\mathrm{Inf}(C)$.

b. Comme C est non vide, X ne l'est pas non plus car si $c \in C$, alors $|c - c| = 0 \in X$. De plus, comme C est non vide et bornée, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in C,\ |x| \leqslant M$. Ainsi, $\forall (x,y) \in \mathbb{C}^2,\ |x - y| \leqslant |x| + |y| \leqslant 2M$ par inégalité triangulaire donc C est non vide, minoré par 0 et majoré par $2M$ donc X admet une borne inférieure et une borne supérieure toujours par la propriété fondamentale des réels. Mieux, si $(x,y) \in C^2$, en supposant que $x \geqslant y$ (l'autre cas est symétrique), on a $|x - y| = x - y \leqslant \mathrm{Sup}(C) - \mathrm{Inf}(C)$ car $x_n \leqslant \mathrm{Sup}(C)$ et $y_n \geqslant \mathrm{Inf}(C)$ donc $\mathrm{Sup}(C) - \mathrm{Inf}(C)$ est un majorant de C.

- 0 minore X et $0 \in X$ donc $0 = \mathrm{Min}(C) = \mathrm{Inf}(X)$.
- D'après **a.**, il existe des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de C qui convergent respectivement vers $\mathrm{Sup}(C)$ et $\mathrm{Inf}(C)$. Il existe un rang n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0,\ x_n \geqslant y_n$ (et ceci même si $C = \{c\}$ car

alors $x_n = y_n = c$). Alors $\forall n \geqslant n_0,\ x_n - y_n = |x_n - y_n| \in C$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n - y_n) = \mathrm{Sup}(C) - \mathrm{Inf}(C)$. Comme $\mathrm{Sup}(C)-\mathrm{Inf}(C)$ est un majorant de X et qu'il existe une suite d'éléments de X qui converge vers $\mathrm{Sup}(C) - \mathrm{Inf}(C)$, par la caractérisation séquentielle de la borne supérieure, $\mathrm{Sup}(X) = \mathrm{Sup}(C) - \mathrm{Inf}(C)$.

23.8 **a.** Soit un couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall t \in \mathbb{R},\ at^2 + bt \geqslant 0$. traitons deux cas :

Si $a = 0$, pour avoir $bt \geqslant 0$ pour tout réel t, on doit clairement avoir $b = 0$.

Si $a \neq 0$, $f : t \mapsto at^2 + bt$ est polynomiale de degré 2 et son discriminant $\Delta = b^2$ doit être négatif car sinon f s'annulerait deux fois et changerait de signe au passage des racines. Ainsi, $0 \leqslant b^2 \leqslant 0$ donc $b = 0$.

Dans les deux cas, on a forcément $b = 0$ si $\forall t \in \mathbb{R},\ at^2 + bt \geqslant 0$.

b. Méthode 1 : pour se servir de la question précédente, pour $x \in \mathbb{R}^n$, on pose $f : t \mapsto < B(x_0 + tx), x_0 + tx >$. Par bilinéarité du produit scalaire, $f(t) = < Bx_0, x_0 > + (< Bx_0, x > + < Bx, x_0 >)t + < Bx, x > t^2$. Or la matrice B est symétrique donc $< Bx_0, x > = x_0^T B^T x = x_0^T Bx = < x_0, Bx > = < Bx, x_0 >$. Ainsi, par hypothèse, $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = 2 < Bx_0, x > t + < Bx, x > t^2 \geqslant 0$. La question précédente montre alors que $< Bx_0, x > = 0$. Ceci étant vrai pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$, on a $Bx_0 \in (\mathbb{R}^n)^\perp = \{0\}$ donc $Bx_0 = 0$.

Méthode 2 : d'après le théorème spectral, il existe $P \in O(n)$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que $B = PDP^T$. Comme B est positive par hypothèse, on peut écrire $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ avec les valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ positives de B. Alors $< Bx_0, x_0 > = x_0^T Bx_0 = x_0^T PDP^T x_0 = y_0^T Dy_0$ en posant $y_0 = P^T x_0$. Si on pose $y_0 = (y_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et , on a $< Bx_0, x_0 > = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 = 0$ donc $\forall i \in [\![1; n]\!],\ \lambda_i y_i^2 = 0$ donc $\lambda_i y_i = 0$ ce qui montre que $Dy_0 = 0$ d'où $Bx_0 = PDP^T Py_0 = PDy_0 = 0$ car $P^T P = I_n$.

c. En notant $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $x = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, on a $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ F(x) = \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j} x_i x_j$ donc F est polynomiale en les coordonnées de x ce qui prouve que F est continue. On pouvait aussi écrire $F = G \circ H$ où $H : \mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n)^2$ et $G : (\mathbb{R}^n)^2 \to \mathbb{R}$ sont définies par $H(x) = < Ax, x >$ et $G(x, y) = < x, y >$ puis, comme G et H sont continues car respectivement bilinéaire et linéaire en dimension finie, F est continue par composition. La sphère unité S est clairement bornée. De plus, en notant $N : x \mapsto ||x||$ la fonction norme qui est continue car 1-lipschitzienne d'après le cours, on a $S = N^{-1}(\{1\})$ et $\{1\}$ est fermé donc S est aussi fermée comme image réciproque d'un fermé par une application continue. F étant continue sur un fermé borné en dimension finie, on sait d'après le théorème des bornes atteintes que F est bornée sur S et y atteint ses bornes, d'où l'existence de $\mathrm{Inf}_{x\in S} F(x) = \mathrm{Min}_{x\in S} F(x) = \lambda_1 = F(e_1)$ avec $e_1 \in S$ d'après l'énoncé de la question **d.**.

d. Soit $x \in \mathbb{R}^n$, si $x = 0$, alors $< (A - \lambda_1 I_n)x, x > = 0 \geqslant 0$. Si $x \neq 0$, on pose $y = \dfrac{x}{||x||} \in S$ donc $F(y) \geqslant \lambda_1$ d'après la question précédente, ce qui s'écrit $< Ay, y > = \dfrac{1}{||x||^2} < Ax, x > \geqslant \lambda_1$ par bilinéarité du produit scalaire et on a donc $< Ax, x > \geqslant \lambda_1 < x, x >$ ou encore $< (A - \lambda_1 I_n)x, x > \geqslant 0$.

e. Comme $A - \lambda_1 I_n$ est symétrique, que $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ < (A - \lambda_1 I_n)x, x > \geqslant 0$ et que, d'après ce qui précède, on a aussi $< (A - \lambda_1 I_n)e_1, e_1 > = F(e_1) - \lambda_1 = 0$, on a $(A - \lambda_1 I_n)e_1 = 0$ d'après la question **b.**. Ainsi, λ_1 est une valeur propre de A et e_1 un vecteur propre unitaire de A associé à la valeur propre λ_1.

Soit λ une valeur propre de A et $e \in S$ un vecteur propre de A associé à λ_1, alors on a $Ae = \lambda e$ donc $F(e) = < \lambda e, e > = \lambda ||e||^2 = \lambda \geqslant \lambda_1$ par construction de λ_1. Ainsi, λ_1 est la plus petite valeur propre de A.

23.9 **a.** Si $n = 1$, $M \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ donc M est diagonalisable.

Si $n \geqslant 2$, M n'est pas forcément diagonalisable. En effet, si $M_k = \text{diag}\left(\frac{1}{k+1}, \cdots, \frac{1}{k+n}\right) + E_{1,2}$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, alors M_k est triangulaire supérieure avec des termes tous différents sur la diagonale donc $\chi_{M_k} = \prod_{i=1}^{n}\left(X - \frac{1}{k+i}\right)$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ donc M_k est diagonalisable. Clairement, en regardant les suites coordonnées (case par case), $\lim\limits_{k\to+\infty} M_k = E_{1,2}$ et $\chi_{E_{1,2}} = X^n$ alors que $\dim \text{Ker}(E_{1,2}) = n-1$ avec la formule du rang car rang $(E_{1,2}) = 1$. Ainsi, M n'est pas diagonalisable (les deux ordres de multiplicité de 0 ne sont pas égaux) même en étant limite d'une suite de matrices toutes diagonalisables.

b. ($\Longrightarrow$) Supposons P unitaire et scindé dans $\mathbb{R}[X]$, alors $P = \prod_{k=1}^{r}(X - \alpha_k)^{m_k}$ avec $r \geqslant 1$, $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ les racines réelles distinctes de P et $m_1, \cdots, m_r$ les ordres de multiplicité associés. Pour $z \in \mathbb{C}$, on a $P(z) = \prod_{k=1}^{r}(z - \alpha_k)^{m_k}$ donc $|P(z)|^2 = \prod_{k=1}^{r}|z-\alpha_k|^{2m_k}$. Or, pour $k \in [\![1; r]\!]$, $|z - \alpha_k|^2 = (\text{Re}\,(z) - \alpha_k)^2 + (\text{Im}\,(z))^2 \geqslant |\text{Im}\,(z)|^2$ et on a donc $|P(z)|^2 \geqslant \prod_{k=1}^{r}|\text{Im}\,(z)|^{2m_k}$. Comme $\deg(P) = n = \sum_{k=1}^{r} m_k$, on a $|P(z)|^2 \geqslant |\text{Im}\,(z)|^{2n}$ ce qui donne bien $|P(z)| \geqslant |\text{Im}\,(z)|^n$ en passant à la racine.
($\Longleftarrow$) On sait d'après le théorème de D'ALEMBERT-GAUSS que P est scindé dans $\mathbb{C}[X]$. Soit λ une racine complexe de P, comme $|P(z)| = 0 \geqslant |\text{Im}\,(z)|^n$, on a $|\text{Im}\,(z)| = 0$ donc z est réelle. Ainsi, P est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ car toutes les racines de P sont réelles.

Par double implication, on a montré que (P est scindé dans $\mathbb{R}[X]$) $\Longleftrightarrow$ ($\forall z \in \mathbb{C},\ |P(z)| \geqslant |\text{Im}\,(z)|^n$).

c. Soit $z \in \mathbb{C}$ fixé, la suite $(M_k)_{k\geqslant 0}$ converge vers M, donc $(zI_n - M_k)_{k\geqslant 0}$ converge vers $zI_n - M$. Comme la fonction $\det$ est polynomiale donc continue dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de dimension finie, par caractérisation séquentielle de la continuité, $\big(\det(zI_n - M_k)\big)_{k\geqslant 0}$ converge vers $\det(zI_n - M)$. Ainsi, $(\chi_{M_k}(z))_{k\geqslant 0}$ converge vers $\chi_M(z)$. Comme toutes les matrices M_k sont trigonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les polynômes χ_{M_k} sont scindés sur $\mathbb{R}$, ce qui montre avec la question **b.** que $|\chi_{M_k}(z)| \geqslant |\text{Im}\,(z)|$. En passant à la limite dans cette inégalité, on obtient donc $|\chi_M(z)| \geqslant |\text{Im}\,(z)|$, ce qui montre avec l'autre sens de la question précédente que χ_M est scindé sur $\mathbb{R}$ car χ_M est unitaire de degré n. Ainsi, par théorème, M est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

23.10 **a.** Pour $f \in E$, la fonction $g : t \mapsto tf(t)$ est continue sur le segment $[0; 1]$ donc $\int_0^x tf(t)dt$ est bien défini pour tout $x \in [0; 1]$. Ceci justifie que φ est bien définie. De plus, $\phi(f)$ étant la primitive de g qui s'annule en 0, $\phi(f)$ est de classe C^1 donc a fortiori continue : ϕ va donc bien de E dans E. La linéarité de ϕ découle très naturellement de la linéarité de l'intégrale. Par conséquent, ϕ définit un endomorphisme de E.

b. Pour une fonction $f \in E$ et un réel $x \in [0; 1]$, par inégalité triangulaire sur les intégrales, on obtient la majoration $|\phi(f)(x)| = \left|\int_0^x tf(t)dt\right| \leqslant \int_0^x t|f(t)|dt \leqslant \int_0^x t||f||_\infty dt = ||f||_\infty\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x = \frac{||f||_\infty x^2}{2}$. Ainsi, il vient $||\phi(f)||_1 = \int_0^1 |\phi(f)(x)|dx \leqslant \int_0^1 \frac{||f||_\infty x^2}{2}dx = ||f||_\infty\left[\frac{x^3}{6}\right]_0^1 = \frac{||f||_\infty}{6}$. Si on prend $f = 1$, alors $\phi(f) : x \mapsto \frac{x^2}{2}$ donc $||\phi(f)||_1 = \frac{1}{6}$ alors que $||f||_\infty = 1$. Ceci justifie que $K_1 = \frac{1}{6}$ est le plus petit réel tel que $\forall f \in E,\ ||\phi(f)||_1 \leqslant K_1||f||_\infty$. En effet, s'il existait $k < \frac{1}{6}$ tel que $\forall f \in E,\ ||\phi(f)||_1 \leqslant k||f||_\infty$, en prenant $f = 1$, on aurait $||f||_\infty = 1$, $\phi(f) : x \mapsto \dfrac{x^2}{2}$ donc $||\phi(f)||_1 = \dfrac{1}{6}$ et $\dfrac{1}{6} \leqslant k$ ce qui est contradictoire.

c. Pour une fonction $f \in E$ et un réel $x \in [0;1]$, posons la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x t|f(t)|dt$ de sorte que l'on a $||\phi(f)||_1 = \displaystyle\int_0^1 |\phi(f)(x)|dx \leqslant \int_0^1 \Big(\int_0^x t|f(t)|dt\Big)dx = \int_0^1 F(x)dx$ par inégalité triangulaire sur les intégrales. Ainsi, comme F est de classe C^1 sur $[0;1]$ d'après le théorème fondamental de l'intégration car $t \mapsto t|f(t)|$ est continue sur $[0;1]$, en posant $u = F$ et $v' : x \mapsto x - 1$, par intégration par parties, on obtient la relation $\displaystyle\int_0^1 F(x)dx = \int_0^1 v'(x)u(x)dx = [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x)dx = \int_0^1 x(1-x)|f(x)|dx$ car $u(0) = v(1) = 0$. Alors, comme $\forall x \in [0;1],\ x(1-x) \leqslant \dfrac{1}{4}$, on a $||\phi(f)||_1 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{|f(x)|}{4}dx = \frac{||f||_1}{4}$.

Si on trouvait une fonction non nulle $f \in E$ telle que $||\phi(f)||_1 = \dfrac{||f||_1}{4}$, on montrerait comme à la question précédente que $K_2 = \dfrac{1}{4}$. Supposons l'existence d'une telle fonction. Alors $\displaystyle\int_0^1 x(1-x)|f(x)|dx = \frac{1}{4}\int_0^1 |f(x)|dx$ ce qui donne, en soustrayant et par linéarité de l'intégrale, la relation $\displaystyle\int_0^1 \Big(\frac{1}{4} - x(1-x)\Big)|f(x)|dx = 0$. Or $x \mapsto \Big(\dfrac{1}{4} - x(1-x)\Big)|f(x)|$ est continue et positive sur le segment $[0;1]$. on en déduit par théorème que $x \in [0;1]$, $\Big(\dfrac{1}{4} - x(1-x)\Big)|f(x)| = 0$ donc que $\forall x \in [0;1] \setminus \Big\{\dfrac{1}{2}\Big\}$, $f(x) = 0$. Par continuité de f, on en déduit que $\forall x \in [0;1],\ f(x) = 0$, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse initiale. Ainsi, il n'existe aucune fonction non nulle f telle que $||\phi(f)||_1 = \dfrac{||f||_1}{4}$ mais on peut essayer avec les suites de fonctions.

Il faut que l'intégrale se condense autour de $\dfrac{1}{2}$, un peu comme une fonction de Dirac, là où $x(1-x)$ est maximal. On peut donc prendre, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto (x(1-x))^n = x^n(1-x)^n$. Posons $I_n = ||f_n||_1$ et, pour $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, $J(p,q) = \displaystyle\int_0^1 x^p(1-x)^q dx > 0$. Par le changement de variables $x = 1-t$ on trouve facilement $J(p,q) = J(q,p)$ et par intégration par parties, en posant $u : x \mapsto (1-x)^{q+1}$ et $v : x \mapsto \dfrac{x^{p+1}}{p+1}$, on obtient $J(p,q+1) = \dfrac{q+1}{p+1}J(p+1,q)$. Ainsi, comme $J(p,0) = \Big[\dfrac{t^{p+1}}{p+1}\Big]_0^1 = \dfrac{1}{p+1}$, on a par télescopage $J(p,q) = \Big(\displaystyle\prod_{k=0}^{q} \frac{J(p+k,q-k)}{J(p+k+1,q-k-1)}\Big) \times J(p+q,0) = \Big(\prod_{k=0}^{q-1} \frac{q-k}{p+k+1}\Big) \times \frac{1}{p+q+1} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$. Ainsi, $I_n = J(n,n) = \dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!}$. Soit $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall f \in E,\ ||\phi(f)||_1 \leqslant k||f||_1$, en prenant $f = f_n \neq 0$, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{||\phi(f_n)||_1}{||f_n||_1} = \dfrac{I_{n+1}}{I_n} = \dfrac{(n+1)^2}{(2n+3)(2n+2)} = \dfrac{n+1}{2(2n+3)} \leqslant k$ ce qui donne, en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, $k \geqslant \dfrac{1}{4}$. Comme on a vu que $\forall f \in E,\ ||\phi(f)||_1 \leqslant \dfrac{||f||_1}{4}$, ceci justifie que $K_2 = \dfrac{1}{4}$ est le plus petit réel tel que $\forall f \in E,\ ||\phi(f)||_1 \leqslant K_2||f||_1$.

23.11 **a.** Comme $N^{k-1} \neq 0$, il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $N^{k-1}X \neq 0$. Soit $(\lambda_0,\cdots,\lambda_{k-1}) \neq (0,\cdots,0) \in \mathbb{C}^k$ tel que $\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i N^i X = 0$, posons $r = \mathrm{Min}(\{i \in [\![0;k-1]\!] \mid \lambda_i \neq 0\}) \leqslant k-1$, alors $\displaystyle\sum_{i=r} \lambda_i N^i X = 0$ donc $N^{k-r-1}\displaystyle\sum_{i=r} \lambda_i N^i X = 0 = \lambda_r N^{k-1}X$ ce qui est absurde car $\lambda_r \neq 0$ et $N^{k-1}X \neq 0$. Par l'absurde, on a montré que $(\lambda_0,\cdots,\lambda_{k-1}) = (0,\cdots,0)$ si $\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i N^i X = 0$. Ainsi, $(X, NX, \cdots, N^{k-1}X)$ est libre dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Comme une famille libre a moins de vecteurs que la dimension de l'espace qu'elle occupe, on a donc $k \leqslant n$.

b. D'après **a.**, il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $\mathcal{B} = (X, NX, \cdots, N^{n-1}X)$ est libre donc c'est une base de

$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ car $\dim(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})) = n$. La famille $\mathcal{B}' = (N^{n-1}X, \cdots, NX, X)$ est aussi une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et, en notant u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à N, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = J_n$ par construction. En notant P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^n$ à la base $\mathcal{B}'$, on a $N = PJ_nP^{-1}$ par formule de changement de base. Ainsi, N est semblable à J_n.

c. D'après **a.**, il existe $k \leqslant n$ tel que $A^k = 0$ donc $A^n = 0$. De même, $B^n = 0$. Ainsi, d'après le binôme car A et B commutent, $(A+B)^{2n} = \sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j} A^j B^{2n-j}$. Pour $j \in [\![0; 2n]\!]$, si $j \geqslant n$, on a $A^j = A^n A^{j-n} = 0$ et si $j \leqslant n$, $B^{2n-j} = B^n B^{n-j} = 0$. Ainsi, $(A+B)^{2n} = 0$ donc $A+B$ est nilpotente (et même $(A+B)^n = 0$ avec **a.**). De plus, $(I_n + A)\Big(\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j A^j\Big) = \Big(\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j A^j\Big) - \Big(\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j A^{j+1}\Big) = I_n + (-1)^n A^n = I_n$ par télescopage donc $I_n + A$ est inversible et $(I_n + A)^{-1} = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j A^j$.

d. Posons $A = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{J_n^k}{k!}$ de sorte que $e^{J_n} = I_n + A$. Comme $A = J_n \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{J_n^{k-1}}{k!}$, en posant $K_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{J_n^{k-1}}{k!}$, on a $A = J_nK_n = K_nJ_n$ donc $A^n = J_n^n K_n^n = 0$ car $J_n^n = 0$. D'après la question **c.**, $e^{J_n} = I_n + A$ est inversible.

e. Comme $J_n e^{J_n} = e^{J_n} J_n$, on a $(J_n e^{J_n})^n = J_n^n (e^{J_n})^n = 0$ donc J_n est nilpotente d'indice inférieur ou égal à n. En prenant $X = E_1$, par définition de J_n, on a $J_nE_1 = E_2$, puis $J_n^2 E_1 = J_nE_2 = E_3$ et, par une récurrence facile, $\forall k \in [\![0; n-1]\!]$, $J_n^k E_1 = E_{k+1}$. Ainsi, $J_n^{n-1} \neq 0$ donc J_n est nilpotente d'indice n. Comme on a $(J_n e^{J_n})^k = J_n^k (e^{J_n})^k$ pour $k < n$, que $(e^{J_n})^k$ est inversible d'après la question **d** et que $J_n^k \neq 0$, on a $(J_n e^{J_n})^k \neq 0$ donc $J_n e^{J_n}$ est nilpotente d'indice n.

f. Si $L_n = PJ_nP^{-1}$ et $S_m(L_n) = \sum_{k=0}^{m} \frac{L_n^k}{k!}$ et $S_m(J_n) = \sum_{k=0}^{m} \frac{J_n^k}{k!}$, on a classiquement $S_m(L_n) = PS_m(J_n)P^{-1}$. Comme $f : M \mapsto PMP^{-1}$ est linéaire en dimension finie donc continue, par caractérisation séquentielle de la continuité, on a $e^{L_n} = \lim_{m\to+\infty} S_m(L_n) = \lim_{m\to+\infty} f\big(S_m(J_n)\big) = f\big(\lim_{m\to+\infty} S_m(J_n)\big) = f(e^{J_n}) = Pe^{J_n}P^{-1}$.

g. Comme $J_n e^{J_n}$ est nilpotente d'ordre n d'après la question **e.**, il existe une matrice inversible Q telle que $J_n e^{J_n} = Q^{-1} J_n Q$ d'après **b.**. Ainsi, $J_n = Q^{-1}(J_n e^{J_n})Q$. Si on note $P = Q^{-1}$, on a $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et $J_n = PJ_nP^{-1}Pe^{J_n}P^{-1} = PJ_nP^{-1}e^{PJ_nP^{-1}}$ d'après **f.**. En posant $\tilde{N} = PJ_nP^{-1}$, on a donc $\tilde{N} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $J_n = \tilde{N}e^{\tilde{N}}$ et $\tilde{N}$ est nilpotente d'indice n.