TD 24 : ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

PSI 1 2023-2024 **vendredi 22 mars 2024**

24.1 **a.** Tout d'abord, $g = \Phi(f)$ est de classe C^∞ si $f \in E$. De plus, la linéarité de Φ est claire par linéarité de la dérivation. Ainsi, Φ est un endomorphisme de E dont on va étudier le spectre.

• Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, cherchons $f \in E$ tel que $\Phi(f) = \lambda f$, c'est-à-dire tel que $\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) + tf(t) = \lambda f(t)$. On sait par Cauchy-Lipschitz que les solutions de $y' + ty = \lambda y \iff y' = (\lambda - t)y$ forment une droite de solutions sur $\mathbb{R}$ engendrée par la fonction $y_\lambda : t \mapsto e^{\lambda t - \frac{t^2}{2}} = e^{\lambda t} e^{\frac{-t^2}{2}}$ car $t \mapsto \lambda t - \dfrac{t^2}{2}$ est une primitive de $t \mapsto \lambda - t$. Ainsi, il existe des fonctions non nulles vérifiant $\Phi(y) = \lambda y$ pour tout complexe λ ce qui prouve que tout $\lambda \in \mathbb{C}$ est dans le spectre de Φ. Ainsi $\mathrm{Sp}(\Phi) = \mathbb{C}$ et $\forall \lambda \in \mathbb{C},\ E_\lambda(\Phi) = \mathrm{Vect}(y_\lambda)$.

b. • Pour le spectre de Φ^2, on peut calculer, pour $f \in E$, $\Phi^2(f) = (f' + tf)' + t(f' + tf) = f'' + 2tf' + (1 + t^2)f$. Encore une fois, si $\lambda \in \mathbb{C}$, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, on sait que l'ensemble $E_\lambda(\Phi^2)$ des fonctions de E qui vérifie $\Phi^2(y) = \lambda y$ est un plan donc λ est une valeur propre de Φ^2. On a donc $\mathrm{Sp}(\Phi^2) = \mathbb{C}$.

• Toujours pour le spectre de Φ^2, soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et μ une racine de λ (il en existe dans $\mathbb{C}$), alors il existe d'après ce qui précède $y \neq 0$ telle que $\Phi(y) = \mu y$ ce qui donne $\Phi^2(y) = \Phi(\Phi(y)) = \Phi(\mu y) = \mu\Phi(y) = \mu^2 y = \lambda y$ et λ est bien une valeur propre de Φ^2 car $y \neq 0$. À nouveau et indépendamment, on en déduit que $\mathrm{Sp}(\Phi^2) = \mathbb{C}$.

• Soit $\lambda = 0$, alors $y \in \mathrm{Ker}\,(\Phi^2) \iff \Phi(y) \in \mathrm{Ker}(\Phi) \iff \left(\exists \alpha \in \mathbb{C},\ y' + ty = \alpha e^{\frac{-t^2}{2}}\right)$ d'après **a.**. Les solutions de l'équation homogène $y' + ty = 0$ sont les fonctions $y : t \mapsto e^{\frac{-t^2}{2}}$. On fait varier la constante en écrivant $y = \lambda e^{\frac{-t^2}{2}}$ avec λ dérivable et, en remplaçant dans $y' + ty = \alpha e^{\frac{-t^2}{2}}$, on obtient $\lambda' = \alpha$ donc $\lambda = \alpha t + \beta$ avec $\beta \in \mathbb{C}$. Par conséquent, $y \in \mathrm{Ker}(\Phi^2) \iff \left(\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2,\ y = (\alpha t + \beta)e^{\frac{-t^2}{2}}\right)$. Alors le plan vectoriel $\mathrm{Ker}(\Phi^2)$ peut s'écrire $\mathrm{Ker}(\Phi^2) = E_0(\Phi^2) = \mathrm{Vect}(t \mapsto e^{\frac{-t^2}{2}}, t \mapsto te^{\frac{-t^2}{2}})$.

• Si $\lambda \in \mathbb{C}^*$, il possède deux racines carrées complexes μ et $-\mu$. Mais si $y \in E_\mu(\Phi)$, alors $\Phi(y) = \mu y$ donc $\Phi^2(y) = \mu^2 y = \lambda y$. Ainsi $E_\mu(\Phi) \subset E_\lambda(\Phi^2)$. De même, $E_{-\mu}(\Phi) \subset E_\lambda(\Phi^2)$. Comme ces deux sous-espaces propres sont en somme directe car $\mu \neq -\mu$, le plan $E_\mu(\Phi) + E_{-\mu}(\Phi)$ est inclus dans le plan $E_\lambda(\Phi^2)$. On en déduit par inclusion et égalité des dimensions que $E_\mu(\Phi) \oplus E_{-\mu}(\Phi) = E_\lambda(\Phi^2)$. Par conséquent, les solutions de $y'' + 2ty' + (1 + t^2)y = \lambda y$ sont les $y : t \mapsto \left(\alpha e^{\mu t} + \beta e^{-\mu t}\right)e^{\frac{-t^2}{2}}$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$. Alors le plan vectoriel $\mathrm{Ker}(\Phi^2 - \lambda \mathrm{id}_E)$ peut s'écrire $\mathrm{Ker}(\Phi^2 - \lambda \mathrm{id}_E) = E_\lambda(\Phi^2) = \mathrm{Vect}(t \mapsto e^{\frac{\mu t - t^2}{2}}, t \mapsto e^{\frac{-\mu t - t^2}{2}})$.

c. $y'' + 2xy' + (x^2 - 1)y = 0 \iff y'' + 2xy' + (1 + x^2)y = 2y \iff y \in E_2(\Phi^2) = E_{\sqrt{2}}(\Phi) \oplus E_{-\sqrt{2}}(\Phi)$ donc les solutions de cette équation (E) sont les $y : t \mapsto \left(\alpha e^{\sqrt{2}t} + \beta e^{-\sqrt{2}t}\right)e^{\frac{-t^2}{2}}$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$.

24.2 **a.** Comme (E) est une équation différentielle linéaire sans second membre, l'ensemble S des solutions contient la fonction nulle et, par linéarité de la dérivation, est stable par combinaison linéaire. De plus, si y est solution de (E), y est au moins deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et, comme $y'' = -qy$ et que q est continue sur $\mathbb{R}$, y'' est continue donc y est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. Ainsi, S est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}$: c'est donc lui-même un espace vectoriel. En considérant par exemple le problème de

CAUCHY en $t = 0$, si $(y_0, y_0') \in \mathbb{R}^2$ est fixé, il existe une unique solution de (E) sur $\mathbb{R}$ qui vérifie de plus $y(0) = y_0$ et $y'(0) = y_0'$. Ainsi, l'application $\varphi : S \to \mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(y) = (y(0), y'(0))$ est linéaire (clair) et bijective, c'est donc un isomorphisme. Par conséquent, $\dim(S) = \dim(\mathbb{R}^2) = 2$.

b. D'après le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ, il existe une unique fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ solution de (E) sur $\mathbb{R}$ qui vérifie cette condition de CAUCHY $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$. En fait, $f = \varphi^{-1}(1, 0)$ (voir **a.**).

Supposons que f s'annule en $x_0 \in \mathbb{R}$. Si on avait $f'(x_0) = 0$, alors la fonction f vérifierait $f'' + qf = 0$ avec $f(x_0) = f'(x_0) = 0$. Or la fonction nulle est aussi solution de (E) et elle vérifie aussi la condition de CAUCHY $0(x_0) = 0'(x_0) = 0$. Par l'unicité au problème de CAUCHY, on aurait donc $f = 0$ qui est contredit par le fait que $f(0) = 1 \neq 0$. Par l'absurde, on a donc établi que $f'(x_0) \neq 0$.

• Prenons par exemple $f'(x_0) > 0$, comme f est C^1 sur $\mathbb{R}$, f' est continue en x_0 donc,si $\varepsilon = \dfrac{f'(x_0)}{2} > 0$, $\exists \beta > 0,\ \forall x \in]x_0 - \beta; x_0 + \beta[,\ \left|f'(x) - f'(x_0)\right| \leqslant \dfrac{f'(x_0)}{2} \iff 0 < \dfrac{f'(x_0)}{2} \leqslant f'(x) \leqslant \dfrac{3f'(x_0)}{2}$ si $\varepsilon = \dfrac{f'(x_0)}{2} > 0$. La fonction f est alors strictement croissante sur l'intervalle $]x_0 - \beta; x_0 + \beta[$, elle y est donc injective, et elle ne s'annule donc qu'en x_0 sur cet intervalle, ce qui est la définition d'un zéro dit isolé.

c. Puisque f est de classe C^2 en tant que solution de (E), on sait que f^2 est convexe si et seulement si $(f^2)'' \geqslant 0$. Or $(f^2)'' = (2ff')' = 2f'^2 + 2ff'' = 2f'^2 - 2qf^2$ car $f'' = -qf$. Or q est négative, ainsi $(f^2)'' \geqslant 0$. On a bien montré que f^2 est convexe sur $\mathbb{R}$.

d. Posons $g = f^2$, alors $g'' \geqslant 0$ d'après la question précédente. Ainsi, la fonction g' est croissante, or $g'(0) = 0$ donc g' est négative sur $\mathbb{R}_-$ et g' est positive sur $\mathbb{R}_+$. Par conséquent, g est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$ ce qui montre, comme $g(0) = 1$, que $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = f^2(x) \geqslant 1 = g(0)$. Comme f ne s'annule pas car $f^2 \geqslant 1$, f garde un signe constant par le théorème des valeurs intermédiaires, or $f(0) = 1$ donc f est positive sur $\mathbb{R}$. On en déduit bien que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{f^2(x)} \geqslant 1$.

24.3 **a.** • Si n est impair, $\det(A) = \det(A^T) = \det(-A) = (-1)^n \det(A) = -\det(A)$ donc $\det(A) = 0$. Comme A n'est pas inversible, il existe un vecteur non nul X_0 dans $\mathrm{Ker}(A)$. Si on pose $X : t \mapsto X_0$, alors X est constante et, comme $\forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = 0 = AX(t) = AX_0 = 0$, $X = X_0$ est solution constante non nulle de (S) sur $\mathbb{R}$.

• Pour suivre l'indication de l'énoncé, changeons de base. Comme $X_0 \neq 0$, en posant $e_n = X_0$, on peut compléter (e_n) en une base orthogonale $(e_1, \cdots, e_{n-1}, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$. En écrivant $X : t \mapsto \sum\limits_{k=1}^{n} x_k(t) e_k$, alors $X' = AX \iff \left(\forall k \in [\![1; n]\!],\ x_k'(t) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}(t) x_j(t)\right)$. Or $AX \in \mathrm{Im}(A)$ et $\mathrm{Ker}(A) \perp \mathrm{Im}(A)$; en effet, si $AV = 0$ et $W = AZ \in \mathrm{Im}(A)$, alors $(V|W) = (V|AZ) = V^T(AZ) = (A^T V)^T Z = (-AV)^T Z = -(AV|Z) = 0$. Ainsi, comme $X'(t) = AX(t) \in \mathrm{Im}(A)$ n'a pas de composante selon le vecteur $e_n \in \mathrm{Ker}(A)$, on en déduit que $x_n'(t) = 0$ donc, comme $\mathbb{R}$ est un intervalle : x_n est constante sur $\mathbb{R}$. Mais plus simplement :

• Si X est une solution de (S), alors $((X|X_0))' = (X'|X_0) + (X|X_0') = (AX|X_0) = X^T A^T X_0 = -X^T A X_0 = 0$ car $X_0 \in \mathrm{Ker}(A)$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R},\ (X|X_0) = \lambda = \lambda \dfrac{(X_0|X_0)}{||X_0||^2} \iff \left(X(t) - \dfrac{\lambda}{||X_0||^2} X_0 \middle| X_0\right) = 0$. Ainsi, $\forall t \in \mathbb{R},\ X(t) \in H_\lambda$ où H_λ est l'hyperplan affine $\dfrac{\lambda}{||X_0||^2} X_0 + (\mathrm{Vect}(X_0))^\perp$.

• Mais plus généralement (si A est seulement non inversible et pas forcément antisymétrique) :

Comme A n'est pas inversible, $\dim(\mathrm{Ker}(A)) \geqslant 1$ donc $\dim(\mathrm{Im}\,(A)) \leqslant n-1$ par la formule du rang. Soit donc H un hyperplan qui contient $\mathrm{Im}\,(A)$ (il y en a une infinité si $\mathrm{rang}\,(A) \leqslant n-2$). Soit un vecteur non nul N normal à H. Soit X une solution de (S) sur $\mathbb{R}$si $\varepsilon = \dfrac{f'(x_0)}{2} > 0$, $\exists \beta > 0$, $\forall x \in]x_0-\beta; x_0+\beta[$, $\left|f'(x)-f'(x_0)\right| \leqslant \dfrac{f'(x_0)}{2} \Longleftrightarrow 0 < \dfrac{f'(x_0)}{2} \leqslant f'(x) \leqslant \dfrac{3f'(x_0)}{2}$, considérons l'application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = (X(t)|N) = \sum\limits_{k=1}^{n} n_k x_k(t)$ (avec des notations évidentes). On dérive φ car X est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on obtient $\varphi'(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} n_k x_k'(t) = (X'(t)|N) = (AX(t)|N) = 0$ car $AX(t) \in \mathrm{Im}\,(A)$ et $N \in \mathrm{Im}\,(A)^{\perp}$. Ainsi, φ est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}$, $(X(t)|N) = \lambda$ ce qui revient à $\forall t \in \mathbb{R}$, $\sum\limits_{k=1}^{n} n_k x_k(t) = \lambda$. Ainsi, $\forall t \in \mathbb{R}$, $X(t)$ appartient à l'hyperplan affine d'équation $\sum\limits_{k=1}^{n} n_k x_k = \lambda$.

b. Soit X et Y des solutions de (E), on définit $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $\psi(t) = X(t)^T Y(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k(t) y_k(t)$. On dérive car X et Y sont dérivables et on obtient $\psi'(t) = (X'(t))^T Y(t) + X(t)^T Y'(t) = X(t)^T A^T Y(t) + X(t)^T A Y(t) = 0$ car $A^T + A = 0$. Ainsi, ψ est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$. Soit X une solution de (S), alors $X^T X = ||X||^2$ est constante d'après ce qui précède en prenant $Y = X$. Ainsi, X est de norme constante donc bornée.

24.4 On résout cette équation sur les trois intervalles $I_1 =]-\infty; -1[$, $I_2 =]-1; 0[$ et $I_3 =]0; +\infty[= \mathbb{R}_+^*$. Les solutions de (E_0) : $2t(1+t)y' + (1+t)y = 0 \Longleftrightarrow y' + \dfrac{1}{2t} y = 0$ sur chacun de ces intervalles sont, puisqu'une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{2t}$ est $t \mapsto \dfrac{\ln(|t|)}{2}$, les fonctions $y : t \mapsto \lambda e^{\frac{-\ln(|t|)}{2}} = \dfrac{\lambda}{\sqrt{|t|}}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

<u>Méthode 1</u> pour trouver une solution particulière :

<u>Sur I_3</u>, par variation de la constante, on obtient $2t(1+t)\dfrac{\lambda'}{\sqrt{t}} = 1 \Longleftrightarrow \lambda' = \dfrac{1}{2\sqrt{t}(1+t)}$. On peut prendre $\lambda = \mathrm{Arctan}(\sqrt{t})$. Les solutions de (E) sur I_3 sont donc les $y : t \mapsto \dfrac{\mathrm{Arctan}(\sqrt{t}) + \lambda}{\sqrt{t}}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

<u>Sur I_1, I_2</u>, avec la même méthode, $2t(1+t)\dfrac{\lambda'}{\sqrt{-t}} = 1$ donc $\lambda' = -\dfrac{1}{2\sqrt{-t}(1+t)} = -\dfrac{1}{2\sqrt{-t}(1-(\sqrt{-t})^2)}$ et on peut prendre par $\lambda = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+\sqrt{-t}}{1-\sqrt{-t}}\right|$ (il vaut mieux connaître la fonction Argth). Ainsi, les solutions de (E) sur I_1 ou I_2 sont les fonctions $y : t \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{-t}}\left(\ln\left|\dfrac{1+\sqrt{-t}}{1-\sqrt{-t}}\right| + \lambda\right)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

<u>Méthode 2</u> : on pouvait aussi chercher une solution particulière y sur $\mathbb{R}$ qui soit développable en série entière, c'est-à-dire $\forall t \in]-r; r[$, $y(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ avec $r \leqslant 1$ (car -1 est exclu de I_1, I_2, I_3). On dérive terme à terme et on remplace dans (E), ce qui donne $2t\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1} + 2t^2 \sum\limits_{n=2}^{+\infty}(n-1)a_{n-1}t^{n-2} + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n t^n + t\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}t^{n-1} = 1$ ou encore, en mettant tout en t^n : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} 2n a_n t^n + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2(n-1)a_{n-1}t^n + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n t^n + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}t^n = 1$ puis, en regroupant les termes : $a_0 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(2n a_n + 2(n-1)a_{n-1} + a_n + a_{n-1})t^n = 1$. Ainsi, puisque $r > 0$ par hypothèse, on identifie et on a $a_0 = 1$ puis, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(2n+1)a_n + (2n-1)a_{n-1} = 0$. On montre par une récurrence simple que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ donc $y(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n t^n}{2n+1}$. Puisque le rayon de cette série entière vaut clairement 1 (par D'ALEMBERT par exemple), les calculs précédents se remontent et prouvent que y est bien solution de (E) sur $]-1; 1[$. Comme $y(0) = 1$, il reste à exprimer y avec les fonctions usuelles

pour $t \in]-1;1[\setminus\{0\}$ et on distingue deux cas selon que $t<0$ ou $t>0$:

si $t \in]0;1[$, $\quad y(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(\sqrt{t})^{2n+1}}{2n+1} = \frac{\text{Arctan}(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}$.

si $t \in I_2$, $\quad y(t) = \dfrac{1}{\sqrt{-t}} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{-t})^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2\sqrt{-t}}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(\sqrt{-t})^n}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(\sqrt{-t})^n}{n}\Big) = \frac{\ln\Big(\dfrac{1+\sqrt{-t}}{1-\sqrt{-t}}\Big)}{2\sqrt{-t}}$.

Méthode 3 : on pouvait enfin, sur I_3 par exemple, associer à $y : I_3 \to \mathbb{R}$ dérivable, la fonction $z : I_3 \to \mathbb{R}$ définie par $z(u) = uy(u^2)$ ou $\dfrac{z(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} = y(t)$. z est aussi dérivable sur I_3 et $\forall t>0,\ y'(t) = \dfrac{z'(\sqrt{t})}{2t} - \dfrac{z(\sqrt{t})}{2t\sqrt{t}}$. Ainsi, y solution de (E) sur I_3 équivaut à $\forall t>0,\ t(1+t)\Big(\dfrac{z'(\sqrt{t})}{t} - \dfrac{z(\sqrt{t})}{t\sqrt{t}}\Big) + (1+t)\dfrac{z(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} = 1$ c'est-à-dire à $z'(\sqrt{t}) = \dfrac{1}{1+t}$ ou $\forall u \in I_3,\ z'(u) = \dfrac{1}{1+u^2} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall u>0,\ z(u) = \text{Arctan}(u) + \lambda$. On conclut en remplaçant que $\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ y(t) = \dfrac{z(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} = \dfrac{\text{Arctan}(\sqrt{t})+\lambda}{\sqrt{t}}$.

Raccords : on va traiter les raccords en 0 et en -1.

En 0 : soit $y :]-1;+\infty[\to \mathbb{R}$ solution de (E), alors $y(0)=1$ en prenant $t=0$ dans (E) et il existe d'après ce qui précède des constantes λ et μ réelles telles que $\forall t>0,\ y(t) = \dfrac{\text{Arctan}(\sqrt{t})+\lambda}{\sqrt{t}}$ et $\forall t \in]-1;0[,\ y(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{-t}}\Big(\ln\Big|\dfrac{1+\sqrt{-t}}{1-\sqrt{-t}}\Big| + \mu\Big)$. Comme y est continue en 0 et que si si $\lambda \neq 0$ et $\mu \neq 0$ on a $\displaystyle\lim_{t\to 0^+}\frac{\lambda}{\sqrt{t}} = \lim_{t \to 0^-}\frac{\mu}{\sqrt{t}} = \pm\infty$, on ne peut avoir que $\lambda = \mu = 0$. Ainsi, $y :]-1;+\infty[\to \mathbb{R}$ est définie par $y(0)=1$, $\forall t>0,\ y(t) = \dfrac{\text{Arctan}(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}$ et $\forall t \in]-1;0[,\ y(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{-t}}\Big(\ln\Big|\dfrac{1+\sqrt{-t}}{1-\sqrt{-t}}\Big|\Big)$. Réciproquement, cette fonction est solution de (E) sur $]-1;+\infty[$ et elle est développable en série entière sur $]-1;1[$ donc elle y est de classe C^∞. Comme elle est aussi de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations, elle est de classe C^∞ sur $]-1;+\infty[$ donc l'unique solution de (E) sur $]-1;+\infty[$.

En -1 : soit $y : \mathbb{R}_-^* \to \mathbb{R}$ solution de (E), alors en prenant $t=-1$ dans (E), on obtient $0=1$ qui est absurde.Ainsi, il n'y a aucune solution de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$.

Il n'y a donc aucune solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

24.5 **a.** La fonction $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\forall u \in \mathbb{R},\ z(u) = y(e^u)e^{-u/2}$ est bien définie car $\forall u \in \mathbb{R},\ e^u \in \mathbb{R}_+^*$ et, en posant $u = \ln(t)$ si $t>0$, on a $\forall t>0,\ z(\ln(t)) = \dfrac{y(t)}{\sqrt{t}}$ de sorte que $y(t) = z(\ln(t))\sqrt{t}$.

b. On reporte dans (E) et, puisque $y'(t) = \dfrac{z(\ln(t))}{2\sqrt{t}} + \dfrac{z'(\ln(t))}{\sqrt{t}}$ et $y''(t) = -\dfrac{z(\ln(t))}{4t\sqrt{t}} + \dfrac{z''(\ln(t))}{t\sqrt{t}}$, on trouve que $\forall t>0,\ t^2\Big(-\dfrac{z(\ln(t))}{4t\sqrt{t}} + \dfrac{z''(\ln(t))}{t\sqrt{t}}\Big) + z(\ln(t))\sqrt{t} = 0$ ce qui se simplifie en $\forall t>0,\ z''(\ln(t)) + \dfrac{z(\ln(t))}{4} = 0$.
Mais comme $t \mapsto \ln(t)$ est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, on a donc (E') : $\forall u \in \mathbb{R},\ z''(u) + \dfrac{z(u)}{4} = 0$.

c. Les solutions de (E') sont les $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par $z(u) = A\cos\Big(\dfrac{u}{2}\Big) + B\sin\Big(\dfrac{u}{2}\Big)$ avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$.
Les solutions de (E) sont donc de la forme $y : t \mapsto \sqrt{t}\Big(A\cos\Big(\dfrac{\ln(t)}{2}\Big) + B\sin\Big(\dfrac{\ln(t)}{2}\Big)\Big)$ avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$. Réciproquement, si y est l'une de ces fonctions, en remontant les calculs ou en dérivant deux fois et en remplaçant, on vérifie que y est bien solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont toutes les fonctions de la forme $y : t \mapsto \sqrt{t}\Big(A\cos\Big(\dfrac{\ln(t)}{2}\Big) + B\sin\Big(\dfrac{\ln(t)}{2}\Big)\Big)$ avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$.

24.6 **a.** Le domaine de définition de $f : t \mapsto \dfrac{\ln(1+t)}{\sqrt{t}}$ est $\mathbb{R}_+^*$ et f est continue sur cet intervalle $\mathbb{R}_+^*$. De plus, $f(t) \underset{0}{\sim} \sqrt{t}$ car $\ln(1+t) \underset{0}{\sim} t$ donc f se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$. Ainsi, f est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ donc, d'après le théorème fondamental de l'intégration, la fonction F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$: c'est la primitive de f qui s'annule en 0. Alors, le domaine de définition de F est $\mathbb{R}_+$.

b. Comme $f(t) \underset{0}{\sim} \sqrt{t}$, on s'attend à avoir l'équivalent $F(x) \underset{0}{\sim} \int_0^x \sqrt{t}dt = \left[\frac{2}{3}t^{3/2}\right]_0^x = \frac{2}{3}x^{3/2}$, ce qui équivaut à $F(x) - \frac{2}{3}x^{3/2} \underset{0}{=} o\left(x^{3/2}\right)$. Or, pour $x \geqslant 0$, $F(x) - \frac{2}{3}x^{3/2} = \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{\sqrt{t}}dt - \int_0^x \sqrt{t}dt = \int_0^x \left(\frac{\ln(1+t)}{\sqrt{t}} - \sqrt{t}\right)dt$. Ainsi, $F(x) - \frac{2}{3}x^{3/2} = \int_0^x \frac{\ln(1+t)-t}{\sqrt{t}}dt$. Définissons $g : t \mapsto \dfrac{\ln(1+t)-t}{\sqrt{t}} = f(t) - \sqrt{t}$ sur $[0;1]$. Comme $\ln(1+t) \underset{0}{=} t - \dfrac{t^2}{2} + o(t^2)$, on a $g(t) \underset{0}{\sim} -\dfrac{t^{3/2}}{2}$ donc $h : t \mapsto \dfrac{g(t)}{t^{3/2}}$ est continue sur le segment $[0;1]$ en posant $h(0) = -\dfrac{1}{2}$ donc h est bornée sur le segment $[0;1]$ par le théorème des bornes atteintes. Ainsi, on a l'existence d'un réel $M \geqslant 0$ tel que $\forall x \in [0;1],\ |h(t)| \leqslant M$. Par conséquent, pour tout réel $x \in [0;1]$, on a la majoration $\left|F(x) - \frac{2}{3}x^{3/2}\right| \leqslant \int_0^x |g(t)|dt = \int_0^x t^{3/2}|h(t)|dt \leqslant M\int_0^x t^{3/2}dt = \frac{2M}{5}x^{5/2}$. On en déduit donc que $F(x) - \frac{2}{3}x^{3/2} \underset{0}{=} o\left(x^{3/2}\right)$ (car $5/2 > 3/2$) et on a bien $F(x) \underset{0}{\sim} \frac{2}{3}x^{3/2}$.

c. L'équation homogène (E_0) associée à (E) est $(E_0)\ :\ 2xy' + y = 0$ dont les solutions réelles sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions $x \mapsto \dfrac{\lambda}{\sqrt{x}}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ car une primitive de $x \mapsto -\dfrac{1}{2x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \mapsto -\dfrac{\ln(x)}{2}$. On fait varier la constante pour avoir une solution particulière ce qui amène l'équation $2\sqrt{x}\,\lambda' = \ln(1+x)$ et on peut prendre $\lambda = \frac{F}{2}$. Ainsi, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions $y_\lambda : x \mapsto \dfrac{\lambda}{\sqrt{x}} + \dfrac{F(x)}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\left(2\lambda + \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{\sqrt{t}}dt\right)$. Si y est une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+$, elle l'est à fortiori sur $\mathbb{R}_+^*$ donc de la forme ci-dessus et il existe $a = 2\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x > 0,\ y(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\left(a + \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{\sqrt{t}}dt\right)$. De plus, $0.y'(0) + y(0) = \ln(1+0) = 0$ donc $y(0) = 0$. D'après la question **b.**, $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\left(2\lambda + \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{\sqrt{t}}dt\right) = 0$ car $3/2 > 1/2$. De plus, si $a \neq 0$, $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{a}{2\sqrt{x}} = \pm\infty$. Ainsi, par continuité de y en 0, on a forcément $a = 0$ et $y : x \mapsto \dfrac{F(x)}{2\sqrt{x}}$. Comme $F(x) \underset{0}{\sim} \frac{2}{3}x^{3/2}$, on a $y(x) \underset{0}{\sim} \frac{2}{3}x$ donc $y(x) \underset{0}{=} \frac{2}{3}x + o(x)$ ce qui garantit qu'on a $y'(0) = \frac{2}{3}$ une fois prolongée la fonction par continuité en posant $y(0) = 0$. La fonction $y : x \mapsto \dfrac{F(x)}{2\sqrt{x}}$ étant dérivable sur $\mathbb{R}_+$, elle est l'unique solution de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}_+$.

d. $\forall t \in]0;1],\ f(t) = \dfrac{\ln(1+t)}{\sqrt{t}} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}t^{n-\frac{1}{2}}}{n}$ et cette relation est vraie aussi pour $t = 0$ car $f(0) = 0$.

Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(t) = \dfrac{(-1)^{n+1}t^{n-\frac{1}{2}}}{n}$. Soit $x \in]0;1]$ fixé.

- (H_1) $\sum\limits_{n \geqslant 1} f_n$ converge simplement vers f sur $[0;x]$ (on en vient).
- (H_2) Les fonctions f_n sont continues sur $[0;x]$ donc y sont intégrables.
- (H_3) f est continue sur $[0;x]$ (déjà vu).
- (H_4) Pour $n \geqslant 1$, $\int_0^x |f_n(t)|dt = \int_0^x \dfrac{t^{n-\frac{1}{2}}}{n}dt = \dfrac{2x^{n-\frac{1}{2}}}{n(2n+1)}$ et la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{2x^{n-\frac{1}{2}}}{n(2n+1)}$ converge par comparaison aux séries de RIEMANN car $\dfrac{2x^{n-\frac{1}{2}}}{n(2n+1)} \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Par le théorème d'intégration terme à terme, $\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^x f_n(t)dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n x^{n-\frac{1}{2}}}{n(2n+1)}$. Alors, la fonction y de la question précédente vérifie $\forall x \in [0;1],\ y(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n x^{n-\frac{1}{2}}}{n(2n+1)}$ qui s'écrit aussi $y(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{n-1}}{n(2n+1)}$ et y est bien développable en série entière sur $[0;1]$.

24.7 **a.** $(E)\ :\ y'' = ay' + by$ est sous forme normalisée, d'ordre 2 avec $a : x \mapsto \frac{x}{2}$ et $b : x \mapsto \frac{1}{2}$ continues sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et on impose les valeurs de $y(0)$ et de $y'(0)$. D'après le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ, il y a existence et unicité d'une fonction y vérifiant $-2y'' + xy' + y = 0$ sur $\mathbb{R}$ avec $y(0) = \sqrt{\pi}$ et $y'(0) = 0$.

b. Analyse : supposons que cette unique $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est développable en série entière sur $]-r;r[$ avec $r > 0$, alors $\forall x \in]-r;r[,\ y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On peut dériver terme à terme dans l'intervalle ouvert de convergence et $y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1}$ donc $xy'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} na_n x^n$ et $y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$.

En reportant dans (E), on a $\forall x \in]-r;r[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} (-2(n+2)(n+1)a_{n+2} + na_n + a_n)x^n = 0$ donc, par unicité, $\forall n \in \mathbb{N},\ -2(n+2)(n+1)a_{n+2} + na_n + a_n = 0$ d'où $a_{n+2} = \frac{1}{2(n+2)}a_n$. Comme on impose $a_0 = y(0) = \sqrt{\pi}$ et $a_1 = y'(0) = 0$, la relation précédente montre, par récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n+1} = 0$ et $a_{2n} = \frac{1}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$.

On a donc $y(x) = \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x^2/4)^n}{n!} = \sqrt{\pi}\, e^{\frac{x^2}{4}}$.

Synthèse : $y : x \mapsto \sqrt{\pi}\, e^{\frac{x^2}{4}}$ est bien C^∞ sur $\mathbb{R}$ avec $y'(x) = \frac{\sqrt{\pi}x}{2} e^{\frac{x^2}{4}}$ et $y''(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\frac{x^2}{4}} + \frac{\sqrt{\pi}x^2}{4} e^{\frac{x^2}{4}}$ donc $-2y''(x) + xy'(x) + y(x) = e^{\frac{x^2}{4}}\Big(-\sqrt{\pi} - \frac{\sqrt{\pi}x^2}{2} + \frac{\sqrt{\pi}x^2}{2} + \sqrt{\pi}\Big) = 0$ avec $y(0) = \sqrt{\pi}$ et $y'(0) = 0$.

Ainsi, l'unique solution du problème de CAUCHY de la question **a.** est la fonction $y : x \mapsto \sqrt{\pi}\, e^{\frac{x^2}{4}}$.

c. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,t) = e^{tx-t^2}$ de sorte que $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x,t)dt$.

(H_1) Pour $t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto g(x,t)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

(H_2) Pour $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto g(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$ car $e^{tx-t^2} \underset{\pm\infty}{=} o(e^{-t^2/2}) \underset{\pm\infty}{=} o\Big(\frac{1}{t^2}\Big)$ par croissances comparées. La fonction $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = te^{tx-t^2}$ est aussi continue et intégrable sur $\mathbb{R}$ car on a encore $te^{tx-t^2} \underset{\pm\infty}{=} o(e^{-t^2/2}) \underset{\pm\infty}{=} o\Big(\frac{1}{t^2}\Big)$. Enfin, $t \mapsto \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t) = t^2 e^{tx-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

(H_3) Pour $a > 0$, $x \in [-a;a]$ et $t \in \mathbb{R}$, $\Big|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\Big| \leqslant t^2 e^{a|t|-t^2} = \varphi_a(t)$ avec φ_a qui est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$ par croissances comparées comme avant.

Par théorème de dérivation sous le signe somme, f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} te^{tx-t^2}dt$ et $f''(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{tx-t^2}dt$. On a bien $f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$ (intégrale de GAUSS classique) et aussi $f'(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2}dt = 0$ par imparité ou car $f'(0) = \Big[-\frac{e^{-t^2}}{2}\Big]_{-\infty}^{+\infty} = 0$. De plus, par croissances comparées, $-2f''(x) + xf'(x) + f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(-2t^2e^{tx-t^2} + xte^{tx-t^2} + e^{tx-t^2}\Big)dt = \big[te^{tx-t^2}\big]_{-\infty}^{+\infty} = 0$ donc f vérifie (E).

D'après les questions précédentes, on peut conclure que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{\pi}\, e^{\frac{x^2}{4}}$.

Une dernière méthode consistait à écrire $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n t^n e^{-t^2}}{n!}\Big)dt$ et à intervertir terme à terme en

calculant par récurrence, grâce à une intégration par parties, les intégrales $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$.
Ce n'est pas demandé mais on pouvait trouver toutes les solutions de (E) par la méthode de LAGRANGE en posant, pour une fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, la fonction $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $z(x) = y(x)e^{\frac{-x^2}{4}}$. La fonction z est aussi de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et $y(x) = z(x)e^{\frac{x^2}{4}}$ donc, en calculant $y'(x) = \Big(\frac{xz(x)}{2} + z'(x)\Big)e^{\frac{x^2}{4}}$ et $y''(x) = \Big(\frac{z(x)}{2} + xz'(x) + z''(x) + \frac{x^2 z(x)}{4}\Big)e^{\frac{x^2}{4}}$ et en reportant dans (E), on a l'équivalence (les $z(x)$ s'éliminent) :
$(y$ solution de (E) sur $\mathbb{R}) \iff \Big(\forall x \in \mathbb{R},\ -2\Big(\frac{z(x)}{2} + xz'(x) + z''(x) + \frac{x^2 z(x)}{4}\Big) + \frac{x^2 z(x)}{2} + xz'(x) + z(x) = 0\Big)$.
Ainsi, $(y$ solution de (E) sur $\mathbb{R}) \iff (z$ est solution de (F) sur $\mathbb{R})$ où $(F)\ :\ 2z'' + xz' = 0)$. On résout facilement (F), et $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ z(x) = \lambda + \mu \int_0^x e^{\frac{-t^2}{4}} dt$.

Par conséquent, les solutions de (E) sont de la forme $y : x \mapsto \lambda e^{\frac{x^2}{4}} + \mu e^{\frac{x^2}{4}} \int_0^x e^{\frac{-t^2}{4}} dt$, elles forment un plan (on le savait) engendré par les deux fonctions développables en séries entières sur $\mathbb{R}$ (ce qui fait que toutes les solutions de (E) le sont) $y_1 : x \mapsto e^{\frac{x^2}{4}}$ (paire) et $y_2 : x \mapsto e^{\frac{x^2}{4}} \int_0^x e^{\frac{-t^2}{4}} dt$ (impaire).

24.8 **a.** Analyse : soit $r > 0$ et une fonction $f :]-r; r[\to \mathbb{R}$ solution de (E) telle que $\forall x \in]-r; r[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
Ainsi, il vient $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n$ et $xf'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n$ alors que l'on a $x^2 f''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n$ et $xf''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)n a_{n+1} x^n$ donc, en remplaçant dans $(E)\ :\ x^2 f''(x) - xf''(x) + 4f'(x) + xf'(x) - f(x) = 0$, on obtient $\forall x \in]-r; r[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} (n(n-1)a_n - (n+1)na_{n+1} + 4(n+1)a_{n+1} + na_n - a_n)x^n = 0$. Par unicité du développement en série entière, $\forall n \in \mathbb{N},\ n(n-1)a_n - (n+1)na_{n+1} + 4(n+1)a_{n+1} + na_n - a_n = 0$ donc, en simplifiant, $(n+1)((n-4)a_{n+1} - (n-1)a_n) = 0$. Pour $n = 0$, on a $a_0 = 4a_1$. Pour $n = 1$, il vient $3a_2 = 0$. Pour $n = 2$, $2a_3 + a_2 = 0$ donc $a_3 = 0$. Pour $n = 3$, $a_4 + 2a_3 = 0$ donc $a_4 = 0$. Ainsi, $a_2 = a_3 = a_4 = 0$. Comme $n+1 \neq 0$, il vient $\forall n \geqslant 5,\ (n-4)a_{n+1} = (n-1)a_n$ donc $(n-2)(n-3)(n-4)a_{n+1} = (n-1)(n-2)(n-3)a_n$ ce qui montre que la suite $\Big(\frac{a_n}{(n-2)(n-3)(n-4)}\Big)_{n \geqslant 5}$ est constante. On en déduit donc, pour tout entier $n \geqslant 5$, on a $a_n = \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{6} a_5 = \binom{n-2}{3} a_5$. Comme a_n est polynomiale en n, le rayon de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$ vaut $R = +\infty$ si $a_5 = 0$ (c'est même un polynôme) et $R = 1$ si $a_5 \neq 0$. Par conséquent, $\forall x \in]-1; 1[$ (au moins), on a $f(x) = a_1(x+4) + a_5 \sum_{n=5}^{+\infty} \binom{n-2}{3} x^n = a_1(x+4) + a_5 x^5 \sum_{n=5}^{+\infty} \binom{n-2}{3} x^{n-5}$. Or pour $x \in]-1; 1[,\ \sum_{n=5}^{+\infty} \binom{n-2}{3} x^{n-5} = \frac{1}{6} \sum_{p=3}^{+\infty} p(p-1)(p-2)x^{p-3}$ en posant $p = n-2$. On reconnaît la dérivée troisième $\Big(\frac{1}{1-x}\Big)''' = \Big(\sum_{p=0}^{+\infty} x^p\Big)''' = \sum_{p=3}^{+\infty} p(p-1)(p-2)x^{p-3} = \frac{6}{(1-x)^4}$ donc $f(x) = a_1(x+4) + a_5 \frac{x^5}{(1-x)^4}$.
Synthèse : réciproquement, si f est définie sur $]-1; 1[$ par $f(x) = a_1(x+4) + a_5 \frac{x^5}{(1-x)^4}$, alors f est développable en série entière sur $]-1; 1[$ et, en remontant les calculs, f est solution de (E).
Ainsi, les solutions de (E) développables en série entière sur $]-1; 1[$ forment le plan $\text{Vect}(f_1, f_2)$ avec les fonctions f_1 et f_2 définies sur $]-1; 1[$ par $f_1(x) = x + 4$ et $f_2(x) = \frac{x^5}{(1-x)^4}$.

- Ces fonctions f_1 et f_2 respectivement polynomiale et rationnelle sont de classe C^∞ sur tout intervalle

I qui ne contient pas 1. La fonction f_1 est clairement solution de (E) sur $\mathbb{R}$ car $f_1'' = 0$ et elle vérifie donc l'équation $\forall x \in \mathbb{R},\ (x^2-x)f_1''(x)+(x+4)f_1'(x)-f_1(x) = x+4-(x+4)=0$. Si I ne contient pas 1, on a $f_2'(x) = \dfrac{(5-x)x^4}{(1-x)^5}$ et $f_2''(x) = \dfrac{20x^3}{(1-x)^6}$ donc f_2 est solution de (E) car elle vérifie l'équation $\forall x \in I,\ (x^2-x)f_2''(x)+(x+4)f_2'(x)-f_2(x) = \dfrac{-20x^4+(x+4)(5-x)x^4-x^5(1-x)}{(1-x)^5} = 0$.
Ainsi, si $I_1 =]-\infty;0[$, $I_2 =]0;1[$ et $I_3 =]1;+\infty[$, d'après le cours, comme (E) est normalisée sur I_k ($k \in [\![1;3]\!]$), l'ensemble des solutions de (E) sur I_k est un plan engendré par les fonctions f_1 et f_2 (restreintes à I_k).

b. Pour répondre à cette question, cherchons à raccorder les solutions en 0.

Analyse : soit $y :]-\infty;1[\to \mathbb{R}$ une solution de (E). D'après ce qui précède, il existe quatre constantes réelles $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ telles que $\forall x \in]-\infty;0[,\ y(x) = \lambda_1(x+4)+\lambda_2\dfrac{x^5}{(1-x)^4}$ et $\forall x \in]0;1[,\ y(x) = \lambda_3(x+4)+\lambda_4\dfrac{x^5}{(1-x)^4}$.
Par continuité de y en 0, on a forcément $4\lambda_1 = y(0) = 4\lambda_3$ donc $\lambda_1 = \lambda_3$. Grâce au x^5 en facteur, aucune condition n'est imposée à λ_1, λ_3 et λ_4 en ce qui concerne l'aspect dérivable et deux fois dérivable de y en 0.

Synthèse : réciproquement, soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et la fonction $y_{a,b,c} :]-\infty;1[\to \mathbb{R}$ définie par la relation $y(x) = a(x+4)+b\dfrac{x^5}{(1-x)^4}$ pour $x \in]-\infty;0[$, $y(x) = a(x+4)+c\dfrac{x^5}{(1-x)^4}$ pour $x \in]0;1[$ et $y(0) = 4a$.
Alors, y est C^∞ sur $]-\infty;0[$ et $]0;1[$ par opérations et, comme $\lim\limits_{x\to 0^-} y'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} y'(x) = a$ (calcul), on en déduit que y est de classe C^1 sur $]-\infty;1[$ avec $y'(0) = a$ par le théorème de prolongement C^1. De même, $\lim\limits_{x\to 0^-} y''(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} y''(x) = 0$ donc y est de classe C^2 sur $]-\infty;1[$ avec $y''(0) = 0$.
Par conséquent, les fonctions y solutions de (E) sur $]-\infty;1[$ forment l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}(g_1,g_2,g_3)$ avec $g_1(x) = x+4$, $g_2(x) = \dfrac{x^5}{(1-x)^4}$ si $x \in]-\infty;0[$ et $g_2(x) = 0$ si $x \in]0;1[$ et $g_3(x) = 0$ si $x \in]-\infty;0[$ et $g_3(x) = \dfrac{x^5}{(1-x)^4}$ si $x \in]0;1[$ (car la fonction y ci-dessus s'écrit $y = ag_1+bg_2+cg_3$).

Pour répondre à la question posée, il existe des solutions de (E) non développables en série entière sur $]-1;1[$, ce sont les fonctions $y = ag_1+bg_2+cg_3$ avec $b \neq c$ car les ba_n diffèrent des ca_n dès que $n \geqslant 5$ dans ce cas (y est alors développable en série entière sur $]-1;0]$ et sur $[0;1[$ mais avec des coefficients différentes de part et d'autre de 0).
Pour être complet, l'espace vectoriel des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}$ est la droite engendré par la fonction g_1 car aucune fonction avec du $\dfrac{x^5}{(1-x)^4}$ ne peut "passer" 1.

24.9 **a.** Comme $\mathrm{Tr}\,(A) = 2$ et $\det(A) = 1$, on a $\chi_A = X^2-2X+1 = (X-1)^2$ donc $\mathrm{Sp}(A) = \{1\}$. Si A était diagonalisable, A serait semblable à I_2 donc égale à I_2 ce qui n'est pas. Ainsi, A n'est pas diagonalisable.
On peut aussi dire que rang $(A-I_2) = 1$ car $A-I_2 = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{Ker}(A)$ est de dimension 1 avec la formule du rang et cette dimension n'est pas égale à l'ordre de multiplicité de 1 dans χ_A.

b. Comme χ_A est scindé dans $\mathbb{R}$, A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Comme $A-I_2 = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, le sous-espace $\mathrm{Ker}(A)$ est la droite engendrée par le vecteur $v_1 = (2,-1)$ (on le voit ou on résout $AX = X$). On prend par exemple $v_2 = (1,0)$ et $Av_2 = (-1,1) = v_2 - v_1$. La famille $\mathcal{B} = (v_1,v_2)$ est clairement une base de $\mathbb{R}^2$ et, comme $Av_1 = v_1$ et $Av_2 = -v_1+v_2$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = T$ est bien triangulaire supérieure.

c. Le système (S) s'écrit $X' = AX$. Comme, par formule de changement de base, $A = PTP^{-1}$ en notant

$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ à $\mathcal{B}$, en notant $Y = P^{-1}X$, on a l'équivalence $(S)\ :\ X' = AX \Longleftrightarrow X' = PTP^{-1}X \Longleftrightarrow P^{-1}X' = (P^{-1}X)' = T(P^{-1}X) \Longleftrightarrow Y' = TY$. Or, en notant $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, a et b sont dérivables et $Y' = TY \Longleftrightarrow \begin{cases} a' = & a - b \\ b' = & b \end{cases}$. Or $b' = b \Longleftrightarrow (\exists \beta \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R}, b(t) = \beta e^t)$ et $a' = a - \beta e^t \Longleftrightarrow (\exists \alpha \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R},\ a(t) = \alpha e^t - \beta t e^t)$ (par variation de la constante). Par l'équivalence qui précède, comme $X = PY$, on en déduit que les solutions du système (S) sont, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, les fonctions $t \mapsto (x(t), y(t)) = (2a(t) + b(t), -a(t)) = (2(\alpha e^t - \beta t e^t) + \beta e^t, -(\alpha e^t - \beta t e^t))$.

24.10 **a.** Comme $f(a) = 0$, si on avait aussi $f'(a) = 0$, la fonction f et la fonction nulle seraient toutes les deux solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ avec les mêmes conditions de CAUCHY en a : c'est absurde d'après le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ qui s'applique ici puisque les fonctions p et q sont continues sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $f'(a) \neq 0$. Puisque f' est continue car f est au moins deux fois dérivable donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ en tant que solution de (E), il existe un réel $\eta > 0$ tel que $\forall x \in [a - \eta\,;a + \eta],\ f'(x) \neq 0$. Soit $x \in [a - \eta\,;a + \eta] \setminus \{a\}$, par le théorème des accroissements finis, il existe $c \in \widetilde{]a;x[} \subset [a - \eta\,;a + \eta]$ tel que $f(x) - f(a) = (x - a)f'(c) = (x - a)f(c) \neq 0$ d'après ce qui précède. On a bien établi que $\forall x \in [a - \eta\,;a + \eta] \setminus \{a\},\ f(x) \neq 0$.

b. Comme f et g sont deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, par opérations, W est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a, pour $t \in \mathbb{R}$, $W'(t) = f'(t)g'(t) + f(t)g''(t) - f'(t)g'(t) - f''(t)g(t) = f(t)(-p(t)g'(t) - q(t)g(t)) - (-p(t)f'(t) - q'(t)f(t))g(t)$ donc $W'(t) = -p(t)(f(t)g'(t) - f'(t)g(t)) = -p(t)W(t)$. Ainsi, W est solution sur $\mathbb{R}$ de $(F)\ :\ y' + py = 0$. Pour $t_0 \in \mathbb{R}$, notons $P : t \mapsto \int_{t_0}^{t} p(u)du$ la primitive de p qui s'annule en t_0, on sait que les solutions sur $\mathbb{R}$ de (F) sont les fonctions $y : t \mapsto \lambda e^{-P(t)}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. En évaluant en t_0, on a bien sûr $\lambda = W(t_0)$ car $P(t_0) = 0$ donc $\forall t \in \mathbb{R},\ W(t) = W(t_0)e^{-P(t)}$.

c. Supposons qu'il existe un réel t_1 tel que $W(t_1) = \begin{vmatrix} f(t_1) & g(t_1) \\ f'(t_1) & g'(t_1) \end{vmatrix} = 0$. Alors les colonnes de cette matrice sont liées ce qui montre l'existence de $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ tel que $\lambda \begin{pmatrix} f(t_1) \\ f'(t_1) \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} g(t_1) \\ g'(t_1) \end{pmatrix} = 0$. Posons $h = \lambda f + \mu g$, comme l'ensemble des solutions de (E) est un espace vectoriel puisque (E) est linéaire et homogène, la fonction h est solution de (E) sur $\mathbb{R}$. De plus, $h(t_1) = h'(t_1) = 0$. L'unicité de la solution à un problème de CAUCHY montre que $h = 0$. Ainsi, comme $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ et $\lambda f + \mu g = 0$, la famille (f, g) est liée contrairement à l'hypothèse de l'énoncé. Par l'absurde, on en déduit que W ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

d. Comme f est continue sur $]a;b[$ et qu'elle ne s'y annule pas, elle y garde un signe constant, supposons par exemple que f est strictement positive sur $]a;b[$. Ainsi, $f'(a) = \lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \geqslant 0$ car $f(x) - f(a) = f(x) > 0$ et $x - a > 0$ si $x \in]a;b[$. De même, $f'(b) \leqslant 0$. Si on avait $f'(a) = 0$, comme en **a.**, f serait la fonction nulle ce qui n'est pas le cas. Plus précisément, on a donc $f'(a) > 0$ et $f'(b) < 0$.

Comme W ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, par continuité, W garde aussi un signe constant. Ainsi, $W(a) = -f'(a)g(a)$ et $W(b) = -f'(b)g(b)$ sont de même signe, ce qui impose à $g(a)$ et $g(b)$ d'être de signes différents. Par le théorème des valeurs intermédiaires, puisque g est continue, il existe $c \in]a;b[$ tel que $g(c) = 0$.

Supposons que g s'annule au moins deux fois sur $]a;b[$, en c et en e et supposons par exemple que $e > c$.

Posons $d = \mathrm{Inf}(A)$ avec $A = \{x \in]c;e] \mid g(x) = 0\}$; d existe car A est non vide puisque $e \in A$ et A est minorée par c. Par caractérisation séquentielle de la borne inférieure, il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = d$. Comme $\forall n \in \mathbb{N},\ g(a_n) = 0$, par continuité de g, on a donc $g(d) = 0$ par passage à la limite et caractérisation séquentielle de la continuité. Ainsi, $d = \mathrm{Inf}(A) = \mathrm{Min}(A)$. D'après la question **a.** appliquée à g, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in [c-\eta\,;c+\eta] \setminus \{c\},\ g(x) \neq 0$ donc $A \subset [c+\eta;e]$ ce qui prouve que $d \geqslant c+\eta > c$. Par construction, $g(c) = g(d) = 0$ et g ne peut pas s'annuler sur $]c;d[$. Par symétrie des rôles joués par f et g, on a prouvé précédemment que f s'annulait alors sur $]c;d[\subset]a;b[$, ce qui contredit l'hypothèse faite initialement sur f.

Par l'absurde, on a donc montré que g s'annulait une fois et une seule sur $]a;b[$.

24.11 **a.** Pour $f \in E$, par CHASLES, $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = e^x \int_0^{+\infty} e^{-t}f(t)dt - e^x \int_0^x e^{-t}f(t)dt$. Comme $g : t \mapsto e^{-t}f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$, par le théorème fondamental de l'intégration, la fonction $G : x \mapsto \int_0^x e^{-t}f(t)dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ en tant que primitive de g qui s'annule en 0. En notant $I = \int_0^{+\infty} e^{-t}f(t)dt$, on a $F(x) = I\,e^x - e^x G(x)$ donc F est de classe C^1 par opérations.

De plus, pour $x \in \mathbb{R}$, on a $F'(x) = I\,e^x - e^x G(x) - e^x G'(x) = F(x) - e^x g(x) = F(x) - e^x e^{-x} f(x) = F(x) - f(x)$ et on a bien la relation $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = F'(x) + f(x)$.

b. Soit par exemple $f : t \mapsto |t|$, alors $f \in E$ car $g : t \mapsto |t|e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $g(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc g est intégrable sur tout intervalle $[x;+\infty[$. D'après la question **a.**, on ne peut pas avoir $f = \varphi(h)$ pour $h \in E$ car f n'est pas de classe C^1 et $\varphi(h)$ l'est. Par conséquent, φ n'est pas surjective car $\mathrm{Im}\,(\varphi) \subset C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

c. <u>Analyse</u> : soit $f \in E$ un vecteur propre de φ associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Si $\lambda = 0$, on a $\varphi(f) = 0.f = 0$ donc, avec la question **a.**, $f = F' - F = 0$ ce qui est impossible pour un vecteur propre. Ainsi, 0 n'est pas valeur propre de φ ce qui montre que φ est injective.
- Si $\lambda \neq 0$, alors $\varphi(f) = \lambda f$ donc, avec la question **a.**, on a $\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda f(x) = \lambda f'(x) + f(x)$ donc f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $E_\lambda\ :\ y' = \frac{\lambda-1}{\lambda}y$ donc $\exists \alpha \in \mathbb{R}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \alpha\, e^{\frac{(\lambda-1)x}{\lambda}}$ (car $f \neq 0$). Mais comme $f \in E$, $\int_x^{+\infty} e^{-t}f(t)dt$ converge pour tout x, or $e^{-t}f(t) = \alpha e^{\frac{-t}{\lambda}}$ ce qui impose $\lambda > 0$.

<u>Synthèse</u> : soit $\lambda > 0$, la fonction $f : x \mapsto e^{\frac{(\lambda-1)x}{\lambda}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $e^{-t}f(t) = e^{\frac{-t}{\lambda}}$ donc $t \mapsto e^{-t}f(t)$ est intégrable sur $[x;+\infty[$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ car $\lambda > 0$ donc $\int_x^{+\infty} e^{-t}f(t)dt$ converge. Ainsi, $f \in E \setminus \{0\}$ et, pour $x \in \mathbb{R}$, on a $\varphi(f)(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{\frac{-t}{\lambda}}dt = e^x\big[-\lambda e^{\frac{-t}{\lambda}}\big]_x^{+\infty} = e^x \lambda e^{\frac{-x}{\lambda}} = \lambda f(x)$ donc f est un vecteur propre de φ associé à la valeur propre λ.

Ainsi, $\mathrm{Sp}(\varphi) = \mathbb{R}_+^*$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*,\ E_\lambda(\varphi) = \mathrm{Vect}(f_\lambda)$ avec $f_\lambda : t \mapsto e^{\frac{(\lambda-1)t}{\lambda}}$.

d. Pour $x \in \mathbb{R}$, la nature de $\int_x^{+\infty} e^{-t}f'(t)dt$ est la même que celle de $\int_x^{+\infty} e^{-t}f(t)dt$ par intégration par parties car les fonctions $u = f$ et $v : t \mapsto e^{-t}$ sont de classe C^1 sur $[x;+\infty[$ et que $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$ car f est bornée sur $\mathbb{R}$. Mais comme $f \in E$, l'intégrale $\int_x^{+\infty} e^{-t}f(t)dt$ converge donc $\int_x^{+\infty} e^{-t}f'(t)dt$ converge aussi et, comme f' est continue, ceci assure que $f' \in E$. De plus, par l'intégration par parties précédente, en notant $F = \varphi(f)$ comme avant, $\varphi(f')(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t}f'(t)dt = e^x\Big(\big[e^{-t}f(t)\big]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} (-e^{-t})f(t)dt\Big)$ d'où

$\varphi(f')(x) = -e^x e^{-x} f(x) + e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t)dt = -f(x) + F(x) = F'(x)$ d'après **a.**. On a donc bien $\big(\varphi(f)\big)' = \varphi(f')$.

e. Par intersection de sous-espaces vectoriels, F est un sous-espace vectoriel de E car l'ensemble des fonctions bornées en est un et celui des fonctions de classe C^1 aussi. Soit $f \in F$, on sait d'après la question **a.** que $\varphi(f)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Comme $f \in F$, f est bornée sur $\mathbb{R}$ et on peut définir $||f||_{\infty,\mathbb{R}} \in \mathbb{R}_+$. Pour $x \in \mathbb{R}$, par inégalité triangulaire sur les intégrales, $|\varphi(f)(x)| = |F(x)| \leqslant e^x \int_x^{+\infty} e^{-t}|f(t)|dt$ donc on a la majoration $|F(x)| \leqslant e^x \int_x^{+\infty} e^{-t}||f||_{\infty,\mathbb{R}}dt = ||f||_{\infty,\mathbb{R}} e^x[-e^{-t}]_x^{+\infty} = ||f||_{\infty,\mathbb{R}} e^x e^{-x} = ||f||_{\infty,\mathbb{R}}$. Ainsi, $\varphi(f) \in F$ ce qui justifie que F est stable par φ. Comme les vecteurs propres de φ_F sont a fortiori des vecteurs propres de φ, et que la fonction f_λ n'est bornée sur $\mathbb{R}$ que si $\lambda = 1$ car f_1 est la fonction constante égale à 1, on en déduit que $Sp(\varphi_F) = \{1\}$. On peut dire aussi que φ_F est 1-lipschitzienne (pour $||\,.\,||_{\infty,\mathbb{R}}$) donc continue.

24.12 **a.** $\forall t \in I,\ w(t) = \begin{vmatrix} \varphi(t) & \psi(t) \\ \varphi'(t) & \psi'(t) \end{vmatrix} = \varphi(t)\psi'(t) - \varphi'(t)\psi(t)$. Comme φ et ψ sont deux fois dérivables sur I par hypothèse, w est dérivable sur I et on a $\forall t \in I,\ w'(t) = \varphi'(t)\psi'(t) - \varphi''(t)\psi(t) + \varphi(t)\psi''(t) - \varphi'(t)\psi'(t)$ donc $w'(t) = -\big(a(t)\varphi'(t) + b(t)\varphi(t)\big)\psi(t) + \varphi(t)\big(a(t)\psi'(t) + b(t)\psi(t)\big) = a(t)w(t)$. Ainsi, la fonction w est solution sur I de l'équation $(F)\ :\ y' = ay$.

b. Si φ ne s'annule pas sur I, la fonction $\dfrac{\psi}{\varphi}$ est bien définie et dérivable sur I et on a $\left(\dfrac{\psi}{\varphi}\right)' = \dfrac{\psi'\varphi - \psi\varphi'}{\varphi^2} = \dfrac{w}{\varphi^2}$.

c. Supposons qu'il existe une fonction y développable en série entière qui soit solution de l'équation (E), alors $\exists R > 0,\ \forall t \in]-R;R[,\ y(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$. Alors, par théorème, $\forall t \in]-R;R[,\ y'(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}t^n$ et $\forall t \in]-R;R[,\ y''(t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (n+1)na_{n+1}t^{n-1}$ donc $ty''(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n+1)na_{n+1}t^n$.

Ainsi, $\forall t \in]-R;R[,\ \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \big(2(n+1)na_{n+1} + (n+1)a_{n+1} - a_n\big)t^n = 0$ et par unicité des coefficients (comme $R > 0$), on parvient à la relation $\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)(2n+1)a_{n+1} = a_n$.

Réciproquement, si $a_0 \in \mathbb{R}^*$ et si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie cette propriété, le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n t^n$ est infini par D'ALEMBERT car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 0$, et les calculs précédents montrent que $\forall t \in \mathbb{R},\ 2ty''(t) + y'(t) - y(t) = 0$ donc y ainsi définie est bien solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E).

Pour $n \in \mathbb{N},\ a_n = \dfrac{a_{n-1}}{n(2n-1)} = \dfrac{a_{n-1}}{n(2n-1)} \times \dfrac{a_{n-2}}{(n-1)(2n-3)} = \cdots = \dfrac{a_0}{n(2n-1)(n-1)(2n-3)\cdots 1.1}$. En rajoutant au dénominateur les termes pairs qui manquent $a_n = \dfrac{(2n)(2n-2)\cdots 2.a_0}{n!(2n)!} = \dfrac{2^n}{(2n)!}a_0$.

Ainsi, les fonctions solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) et développables en série entière sont proportionnelles à la fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = a_0 \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{2^n t^n}{(2n)!}$. Il existe donc une unique fonction φ solution de (E), développable en série entière et vérifiant $\varphi(0) = 1$, il s'agit de $\varphi : t \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{2^n t^n}{(2n)!}$.

On distingue selon le signe de t :

- si $t \geqslant 0$, on a $\varphi(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{2^n(\sqrt{t})^{2n}}{(2n)!} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(\sqrt{2t})^{2n}}{(2n)!} = \mathrm{ch}\,(\sqrt{2t})$.
- si $t \leqslant 0$, on a $\varphi(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n 2^n(\sqrt{-t})^{2n}}{(2n)!} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n(\sqrt{-2t})^{2n}}{(2n)!} = \cos(\sqrt{-2t})$.

On vient de voir que l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) et qui sont développables en série entière constitue la droite $\mathrm{Vect}(\varphi)$.

d. Comme (E) est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 sous forme normalisée sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$\mathbb{R}_-^*$, on sait que l'ensemble de ses solutions sur chacun de ces deux intervalles est un plan. On se sert du wronskien pour trouver une autre solution non proportionnelle à φ.

Sur $\mathbb{R}_+^*$: soit $\psi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$, comme φ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$, on sait d'après la question **b.** que $\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)' = \frac{w}{\varphi^2}$. Ici, $w' = -\frac{w}{2t}$ donc $w : t \mapsto \frac{\lambda}{\sqrt{t}}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Ainsi, $\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)' = \frac{\lambda}{\sqrt{t}(\mathrm{ch}\,(\sqrt{2t})^2}$. On reconnaît, comme $\mathbb{R}_+^*$ est un intervalle, $\frac{\psi}{\varphi} = \sqrt{2}\lambda\mathrm{th}\,(\sqrt{2t}) + \mu$ avec $\mu \in \mathbb{R}$. Comme on veut ψ non proportionnelle à φ, on peut prendre $\mu = 0$ et $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$ pour avoir $\psi(t) = \mathrm{th}\,(\sqrt{2t})\varphi(t) = \mathrm{sh}\,(\sqrt{2t})$. Par théorème de structure, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les $t \mapsto a\mathrm{ch}\,(\sqrt{2t}) + b\mathrm{sh}\,(\sqrt{2t})$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Pour $y : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable, soit $z : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $z(u) = y\left(\frac{u^2}{2}\right)$ d'où $y(t) = z(\sqrt{2t})$. Par composition, z est aussi deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a $z'(u) = uy'\left(\frac{u^2}{2}\right)$ et $z''(u) = y'\left(\frac{u^2}{2}\right) + u^2y\left(\frac{u^2}{2}\right)$. Ainsi, y est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ équivaut à $\forall t > 0,\ 2ty''(t) + y'(t) - y(t) = 0$ ou, en changeant de variable, à $\forall u > 0,\ u^2y''\left(\frac{u^2}{2}\right) + y'\left(\frac{u^2}{2}\right) - y\left(\frac{u^2}{2}\right) = z''(u) - z(u) = 0$. Or $z'' = z$ si et seulement si z est combinaison linéaire de ch et sh et on retrouve bien les solutions ci-dessus.

Sur $\mathbb{R}_-^*$: $y : \mathbb{R}_-^* \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable, soit $z : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $z(u) = y\left(-\frac{u^2}{2}\right)$ ce qui revient à $y(t) = z(\sqrt{-2t})$. Par composition, z est aussi deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a $z'(u) = -uy'\left(-\frac{u^2}{2}\right)$ et $z''(u) = -y'\left(\frac{u^2}{2}\right) + u^2y\left(\frac{u^2}{2}\right)$. Ainsi, y est solution de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$ équivaut à $\forall t < 0,\ 2ty''(t) + y'(t) - y(t) = 0$ ou, en changeant de variable, à $\forall u > 0,\ -u^2y''\left(-\frac{u^2}{2}\right) + y'\left(-\frac{u^2}{2}\right) - y\left(-\frac{u^2}{2}\right) = -z''(u) - z(u) = 0$. Or $z'' + z = 0$ si et seulement si z est combinaison linéaire de $\cos$ et $\sin$ et les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$ sont les $t \mapsto a\cos(\sqrt{-2t}) + b\sin(\sqrt{-2t})$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

e. Analyse : soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ solution de (E). D'après la question précédente, il existe $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\forall t > 0,\ y(t) = a\mathrm{ch}\,(\sqrt{2t}) + b\mathrm{sh}\,(\sqrt{2t})$ et $\forall t < 0,\ y(t) = c\cos(\sqrt{-2t}) + d\sin(\sqrt{-2t})$. La continuité de y en 0 prouve que $a = c$ avec $y(0) = a = c$. La dérivabilité de y en 0 impose $b = d = 0$ car, par exemple, si $t > 0$, $\frac{y(t) - y(0)}{t} = \frac{a(\mathrm{ch}\,(\sqrt{2t}) + b\mathrm{sh}\,(\sqrt{2t})}{t} \underset{0}{\sim} \frac{b\sqrt{2}}{\sqrt{t}}$ qui tend vers $\pm\infty$ quand t tend vers 0^+. Ainsi, $y = a\varphi$.

Synthèse : si on pose $y = a\varphi$, on a vu en question **c.** que y est bien solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Conclusion : on en déduit que les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions proportionnelles à φ.

24.13 **a.** Clairement, $y : x \mapsto x^2$ est une solution polynomiale de (E_0). Si on ne la voit pas, en notant n le degré d'une solution polynomiale $y : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ de (E_0) avec $a_n \neq 0$, en identifiant les termes en x^n dans (E_0), on a $n(n-1)a_n - 2a_n = 0$ donc, comme $a_n \neq 0$, il vient $n(n-1) - 2 = n^2 - n - 2 = (n-2)(n+1) = 0$ donc $n = 2$ car $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, s'il existe une solution polynomiale de (E_0), elle est forcément de degré 2. Ensuite, en notant $y(x) = ax^2 + bx + c$ et en reportant dans (E_0), il reste $\forall x \in \mathbb{R},\ 2ax^2 - 2(ax^2 + bx + c) = -2bx - c = 0$ donc $b = c = 0$ et on a bien $y(x) = ax^2$.

b. C'est la méthode de Lagrange. Si on se donne une fonction v de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$, en posant $z(x) = \frac{v(x)}{x^2}$, la fonction z est aussi de classe C^2 et $v(x) = x^2z(x)$ donc $v'(x) = 2xz(x) + x^2z'(x)$ puis $v''(x) = 2z(x) + 4xz'(x) + x^2z''(x)$. Ainsi, v est solution de (E_0) sur $I = \mathbb{R}_+^*$ ou $I = \mathbb{R}_-^*$ si et seulement si

$\forall x \in I,\ 2x^2z(x) + 4x^3z'(x) + x^4z''(x) - 2x^2z(x) = 0$ ou encore $(F)\ :\ xz''(x) + 4z'(x) = 0$. Classiquement, z' vérifie $(G)\ : xw' + 4w = 0$ sur I si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I,\ z'(x) = \dfrac{\lambda}{x^4}$ et les solutions de (F) sont donc les fonctions $z : x \mapsto \dfrac{\alpha}{x^3} + \beta$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. En prenant $\alpha = 1$ et $\beta = 0$, on trouve donc $z(x) = \dfrac{1}{x^3}$ donc $v : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est une solution de (E_0) sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ et elle est bien indépendante de u.

c. Comme (E_0) est linéaire d'ordre 2, homogène et normalisée , d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, l'espace vectoriel de ses solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ est de dimension 2, il est donc engendré par u et v d'après les deux questions précédentes. Les solutions de (E_0) sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ sont donc toutes les fonctions $y : x \mapsto \dfrac{\alpha}{x} + \beta x^2$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

On constate, comme en **a.**, que $y_p : x \mapsto \dfrac{x^3}{4}$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Par structure affine des solutions, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ sont toutes les fonctions $y : x \mapsto \dfrac{\alpha}{x} + \beta x^2 + \dfrac{x^3}{4}$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

d. <u>Analyse</u> : soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution de (E) sur $\mathbb{R}$, ainsi y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Les restrictions de y à $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ sont les solutions vues en **c.** donc il existe $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\forall x < 0,\ y(x) = \dfrac{\alpha_1}{x} + \beta_1 x^2 + \dfrac{x^3}{4}$ et $\forall x > 0,\ y(x) = \dfrac{\alpha_2}{x} + \beta_2 x^2 + \dfrac{x^3}{4}$. En prenant $x = 0$ dans (E), on a $y(0) = 0$. La continuité de y en 0 implique que $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Alors on a $y'(0) = 0$ (par taux d'accroissements par exemple) et $\forall x < 0,\ y'(x) = 2\beta_1 x + \dfrac{3x^2}{4}$ et $\forall x > 0,\ y'(x) = 2\beta_2 x + \dfrac{3x^2}{4}$. Comme y est deux fois dérivable en 0, on a $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{y'(x) - y'(0)}{x - 0} = 2\beta_1 = 2\beta_2 = \lim_{x \to 0^+} \frac{y'(x) - y'(0)}{x - 0} = y''(0)$ donc $\beta_1 = \beta_2$.

<u>Synthèse</u> : Soit $\beta \in \mathbb{R}$ et $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $y(x) = \beta x^2 + \dfrac{x^3}{4}$, alors y est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et y est bien solution de (E) sur $\mathbb{R}$ car $y''(x) = 2\beta + \dfrac{3}{2}x$ donc $x^2y''(x) - y(x) = 2\beta x^2 + \dfrac{3}{2}x^3 - 2\beta x^2 - \dfrac{x^3}{2} = x^3$.

<u>Conclusion</u> : les solutions réelles sur $\mathbb{R}$ de (E) sont les $y : x \mapsto \beta x^2 + \dfrac{x^3}{4}$ avec $\beta \in \mathbb{R}$. C'est un sous-espace affine de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, écrit $S = y_p + \mathrm{Vect}(y_0)$ avec $y_p : x \mapsto \dfrac{x^3}{4}$ et $y_0 : x \mapsto x^2$. S est une droite affine.