DEVOIR 23 : CALCUL DIFFÉRENTIEL

PSI 1 2023-2024 **lundi 25 mars 2024**

QCM

1 *Équations linéaires avec second membre ($\lambda \in \mathbb{R}$ puis $(A, B) \in \mathbb{R}^2$)*

1.1 Les solutions réelles sur $\mathbb{R}$ de (E) : $y' + y = x + 1$ sont $y = \lambda e^{-x} + x$

1.2 Les solutions réelles sur $\mathbb{R}_+^*$ de (E) : $xy' - y = -\ln(x)$ sont $y = \lambda x + \ln(x)$

1.3 Les solutions réelles sur $\mathbb{R}$ de (E) : $y'' - y = 1$ sont $y = A\,\mathrm{sh}(x) + B\,\mathrm{ch}(x) - 1$

1.4 Les solutions réelles sur $\mathbb{R}$ de (E) : $y'' + y' + y = 0$ sont $y = e^{\frac{-x}{2}}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$

2 *Existence de solutions : soit (E) : $ay'' + by' + cy = 0$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ quelconques mais avec $a \neq 0$. On note S_E l'ensemble des solutions de E sur $\mathbb{R}$ et $\Delta = b^2 - 4ac$*

2.1 $\Delta < 0 \Longrightarrow S_E = \emptyset$

2.2 $\exists! y \in S_E,\ y(0) = 1$

2.3 $\exists! y \in S_E,\ y(0) = 1$ et $y(1) = 3$

2.4 $\exists! y \in S_E,\ y(0) = 1$ et $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$

3 *Régularité : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Pour 3 et 4, en cas d'existence de la limite, l'expression de la dérivée partielle est...*

3.1 Les dérivées partielles de f existent $\Longrightarrow f$ continue

3.2 Les dérivées partielles de f sont continues $\Longrightarrow f$ continue

3.3 $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(1 - h, 2) - f(1, 2)}{h}$

3.4 $\frac{\partial f}{\partial y}(2, 1) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(2, 1 + h) - f(2, 1)}{h}$

4 *Changement de coordonnées : Soit U et V des ouverts de $\mathbb{R}^2$, $f : V \to \mathbb{R}$ et $x, y : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 vérifiant $\forall (u, v) \in U,\ \big(x(u, v), y(u, v)\big) \in V$. Soit $g : U \to \mathbb{R}$ définie par $g(u, v) = f\big(x(u, v), y(u, v)\big)$*

4.1 f est C^1 sur $V \Longrightarrow g$ est C^1 sur U

4.2 g est C^1 sur $U \Longrightarrow f$ est C^1 sur V

4.3 si f C^1 : $\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial x}{\partial u}(u, v)\frac{\partial f}{\partial x}\big(x(u, v), y(u, v)\big) + \frac{\partial y}{\partial v}(u, v)\frac{\partial f}{\partial y}(., .)$

4.4 si f C^1 : $\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial x}{\partial v}(u, v)\frac{\partial f}{\partial x}\big(x(u, v), y(u, v)\big) + \frac{\partial y}{\partial v}(u, v)\frac{\partial f}{\partial y}(., .)$

Énoncé Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1.
Donner le développement limité d'ordre 1 de f au voisinage de $a \in U$.

Preuve Soit les ouverts $U = \mathbb{R}_+^* \times]-\pi/2; \pi/2[$ et $P = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ (demi-plan $x > 0$). Si $f : P \to \mathbb{R}$ est de classe C^2, on pose $g : U \to \mathbb{R}$ telle que $\forall (r, \theta) \in U,\ g(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = f(x, y)$ en posant $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$. Déterminer $\frac{\partial g}{\partial r}$, $\frac{\partial g}{\partial \theta}$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}$.

Exercice 1 Soit l'équation différentielle (E) : $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0$. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ en posant $z(t) = y(e^t)$. Quelles sont les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$? Et sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$. En déduire que f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

DEVOIR 23 NOM : PRÉNOM :

QCM Répondre dans le tableau ci-dessous au QCM : mettre une croix dans la case de la ligne i colonne j revient à déclarer la question $i.j$ vraie. Ne rien mettre revient à la déclarer fausse.

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1					
2					
3					
4					

Énoncé

Preuve

Exercice 1

Exercice 2

DEVOIR 23	NOM : COCO	PRÉNOM : SINUS

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1	X		X	X	
2					
3		X		X	
4	X			X	

1.1 Vrai : $x \mapsto \lambda e^{-x}$ solutions de (E_0) et $x \mapsto x$ solution de (E) **1.2** Faux : $x \mapsto \ln(x)$ n'est pas solution de (E) **1.3** Vrai : $(\mathrm{sh}, \mathrm{ch})$ est une famille libre de solutions de (E_0) et $x \mapsto -1$ solution de (E) **1.4** Vrai : j et j^2 sont les solutions de (E_c) : $z^2 + z + 1 = 0$ et $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

2.1 Faux : (E) a un plan de solutions réelles **2.2** Faux : il faut aussi imposer $y'(0)$ pour avoir unicité **2.3** Faux : par exemple (E) : $y'' + \pi^2 y/4 = 0$ car les solutions sont alors les $y = a\cos(\pi t/2) + b\sin(\pi t/2)$, $y(0) = 1 \iff a = 1$ et $y'(1) = 3 \iff -a\pi = 6$ **2.4** Faux : par exemple (E) : $y'' + y = 0$. **3.1** Faux : on a vu un contre-exemple dans le cours **3.2** Vrai : f est de classe C^1 donc continue **3.3** Faux : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h,2) - f(1,2)}{h}$ **3.4** Vrai : définition.

4.1 Vrai : par composée **4.2** Faux : $U = V = \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x^{1/3}, y^{1/3})$, $x(u,v) = u^3$, $y(u,v) = v^3$ alors $g(u,v) = (u,v)$ **4.3** Faux : $\dfrac{\partial y}{\partial u}$ à la place de $\dfrac{\partial y}{\partial v}$ **4.4** Vrai : cours.

Énoncé Sous ces conditions, on a $f(a+h) \underset{0}{=} f(a) + h_1 \dfrac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2 \dfrac{\partial f}{\partial y}(a) + o(||h||)$ où $h = (h_1, h_2)$.

Preuve Par un théorème du cours : $\dfrac{\partial g}{\partial r} = \dfrac{\partial x}{\partial r}\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial r}\dfrac{\partial f}{\partial y} = \cos(\theta)\dfrac{\partial f}{\partial x} + \sin(\theta)\dfrac{\partial f}{\partial y}$. De même en dérivant par rapport à θ, $\dfrac{\partial g}{\partial \theta} = \dfrac{\partial x}{\partial \theta}\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial \theta}\dfrac{\partial f}{\partial y} = -r\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}$. On continue en dérivant la première relation par rapport à r, et on trouve $\dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2} = \cos(\theta)\Big(\cos(\theta)\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \sin(\theta)\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Big) + \sin(\theta)\Big(\cos(\theta)\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \sin(\theta)\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big)$ ce qui donne avec le théorème de SCHWARZ : $\dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2} = \cos^2(\theta)\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\sin(\theta)\cos(\theta)\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \sin^2(\theta)\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

Exercice 1 Soit $y : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, on lui associe $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $z(t) = y(e^t)$. Alors y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^* \iff z$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, $z'(t) = e^t y'(e^t)$, $z''(t) = e^t y'(e^t) + e^{2t} y''(e^t)$. Ainsi, y est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^* \iff \forall t \in \mathbb{R}$, $e^{2t}y''(e^t) + 2e^t y'(e^t) - 6y(e^t) = 0 \iff (F)$: $z''(t) + z'(t) - 6z(t) = 0$. On résout facilement : $z(t) = \alpha e^{2t} + \beta e^{-3t}$ car l'équation caractéristique de (F) est $x^2 + x - 6 = 0$ ou $(x-2)(x+3) = 0$. Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont donc les fonctions $y : t \mapsto \alpha t^2 + \dfrac{\beta}{t^3}$.

Comme les fonctions $t \mapsto t^2$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t^3}$ sont solutions de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$ et sont indépendantes, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$ sont aussi les $y : t \mapsto \alpha t^2 + \dfrac{\beta}{t^3}$. On prolonge en 0, la continuité impose $\beta_1 = \beta_2 = 0$, et, comme y est deux fois dérivable en 0, $\alpha_1 = \alpha_2$. Ainsi, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $y : t \mapsto \alpha t^2$.

Exercice 2 Par opérations, f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (fraction rationnelle). De plus, en prenant la norme 2, on a $|x|, |y| \leqslant \sqrt{x^2+y^2} = ||(x,y)||_2$ donc $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $|f(x,y)| \leqslant \dfrac{||(x,y)||_2^3}{||(x,y)||_2^2} = ||(x,y)||_2$ donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ et f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = 0$. Si $(x,y) \neq (0,0)$, on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{y^2(y^2 - x^2)}{(x^2+y^2)^2}$. Or $\lim\limits_{t\to 0^+} (0,t) = (0,0)$ et pourtant $\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,t) = 1 \neq 0 = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$. $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas partiellement continue en $(0,0)$ donc pas continue du tout. f n'est donc pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.