

# ÉNONCÉS EXERCICES CORRIGÉS 14

## FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

### 14.1 Aspect $C^1$ ou $C^2$ d'une fonction

**14.1** Soit  $f(x, y) = \text{Arcsin} \left( \frac{1 + xy}{\sqrt{(1 + x^2)(1 + y^2)}} \right)$  et  $g(x, y) = \text{Arctan } x - \text{Arctan } y$ .

- Vérifier que  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}^2$ .
- Calculer les dérivées partielles premières de  $f$  et de  $g$ .
- Simplifier  $f$  à l'aide de  $g$ .

### 14.2 Équations aux dérivées partielles

**14.2** *Centrale PSI 2013* Soit les deux parties  $D_1 = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$  et  $D_2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$  de  $\mathbb{R}^2$  et l'application  $\varphi : D_2 \rightarrow D_1$  définie par  $\forall (u, v) \in D_2, \varphi(u, v) = (x, y) = \left( \frac{u^2 + v^2}{2}, \frac{u}{v} \right)$ .

- Montrer que  $\varphi$  est de classe  $C^1$  et bijective.
- Résoudre dans  $D_1$  l'équation (E) :  $2xy \frac{\partial f}{\partial x} + (1 + y^2) \frac{\partial f}{\partial y} = 2xf$  en posant  $x = \frac{u^2 + v^2}{2}$  et  $y = \frac{u}{v}$ .

**14.3** *Centrale PSI 2012* On définit  $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y\}$  et  $V = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u + 2v^2 > 0\}$ .

- Montrer que  $U$  et  $V$  sont des ouverts de  $\mathbb{R}^2$ , puis que  $\varphi : U \rightarrow V$  définie par  $\varphi(x, y) = (x^2 - 2xy - y^2, y)$  est un  $C^1$ -difféomorphisme.
- Rechercher les applications  $F \in C^1(U, \mathbb{R})$  telles que (E) :  $(x + y) \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) + (x - y) \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = (x - y)F(x, y)$ .

**14.4** *Centrale PSI 2012* Résoudre l'équation (E) :  $2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 3 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$  avec  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  en effectuant un changement de variables de la forme  $u = x + ay, v = x + by$ .

### 14.3 Recherche d'extrema

**14.5** *Centrale PSI 2013* Soit  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$  et  $f : (x, y) \mapsto x^2 + 2y^2 - x$ .

Justifier que  $f$  admet un maximum et un minimum sur  $D$ , puis calculer ces valeurs.

**14.6** *Centrale PSI 2013* Soit  $f : [0; 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x, y) = \frac{xy(1-x)(1-y)}{1-xy}$  si  $(x, y) \neq (1, 1)$  et  $f(1, 1) = 0$ .

- Montrer que  $f$  est continue sur  $[0; 1]^2$ .

Indication : on pourra comparer  $(1-x)(1-y)$  et  $(1 - \sqrt{xy})^2$  si  $(x, y) \in [0; 1]^2$ .

- Déterminer la valeur de  $\sup_{(x, y) \in [0; 1]^2} f(x, y)$ .

**14.7** Soit  $\mathbb{R}^n$  muni de son produit scalaire usuel. Soit  $f$  un endomorphisme symétrique de  $\mathbb{R}^n$  dont toutes les valeurs propres sont strictement positives. On note  $A$  la matrice de  $f$  dans la base canonique.

a. Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, (f(x)|x) > 0$ .

b. Soit  $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$  et  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie par  $g(x) = \frac{1}{2}(f(x)|x) - (u|x)$ .

Montrer que  $g$  admet des dérivées partielles en tout vecteur de  $\mathbb{R}^n$  et les expliciter.

c. Montrer que  $g$  admet un unique point critique noté  $z$ .

d. Montrer que  $g$  admet un minimum absolu en  $z$ .

**14.8** *Centrale PSI 2012* Dans le plan euclidien orienté classique, on se donne un point  $O$  et deux cercles  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  tangents extérieurement en  $O$  de rayons respectifs  $R > 0$  et  $R' > 0$ .

a. On se donne deux points  $M \in \mathcal{C}$  et  $M' \in \mathcal{C}'$ , paramétrer ces points par deux angles  $\theta$  et  $\theta'$  dans  $[0; 2\pi]$  de telle manière que pour  $\theta = 0$  ou  $\theta = 2\pi$  (resp.  $\theta' = 0$  ou  $\theta' = 2\pi$ ) on ait  $M = O$  (resp.  $M' = O$ ) et exprimer l'aire du triangle  $OMM'$  en fonction de  $\theta$  et  $\theta'$ .

b. En déduire l'aire maximale de ces triangles  $OMM'$  en fonction de  $R$  et  $R'$ .

**14.9** *Centrale PSI 2012*

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on note les points  $A(0,0)$ ,  $B(1,0)$  et  $C(0,1)$ . Pour tout point  $M$  dans le triangle plein  $ABC$ , on pose  $f(M) = AM + BM + CM$ .

a. Montrer que la fonction  $f$  admet un minimum dans le triangle plein  $ABC$ .

b. Calculer ce minimum de la fonction  $f$  dans le triangle plein  $ABC$ .

**14.10** *Centrale PSI 2012* Pour  $a > 0$ , on définit  $S_a : (\mathbb{R}_+^*)^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  par  $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, S_a(x, y) = xy + \frac{2(x+y)a}{xy}$ .

a. Déterminer en fonction de  $a$  l'unique point critique  $(x_0, y_0)$  de  $S_a$  dans  $(\mathbb{R}_+^*)^2$ . Simplifier  $S_a(x_0, y_0)$ .

On définit la partie  $K = \left\{ (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \mid x \geq \frac{x_0}{3} \text{ et } y \geq \frac{y_0}{3} \text{ et } xy \leq 3x_0y_0 \right\}$  de  $(\mathbb{R}_+^*)^2$ .

b. Point 1 : quelle est la "nature topologique" de  $K$  ? Montrer que :  $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \setminus K, S_a(x, y) > S_a(x_0, y_0)$ .

Point 2 : grâce à la concavité de la fonction  $\ln$ , justifier que  $\forall (\alpha, \beta, \gamma) \in (\mathbb{R}_+^*)^3, \frac{1}{3}(\alpha + \beta + \gamma) \geq \sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}$ .

Avec l'un ou l'autre de ces résultats, établir que  $S_a$  admet en  $(x_0, y_0)$  un minimum absolu.

c. Parmi les boîtes (parallélépipèdes rectangles de base rectangulaire de dimension  $x$  et  $y$ ) sans couvercle (avec seulement le fond et les quatre faces latérales) de volume  $V > 0$  fixé, quelles sont celles de surface minimale ? Vous donnerez la hauteur de la boîte optimale en fonction de la dimension du fond.

**14.11** *Centrale PSI 2012* Soit  $f : (x, y) \mapsto (x - y)^3 + 6xy$ . Prouver que  $f$  admet un minimum et un maximum sur  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq y \leq x \leq 1\}$ . Calculer explicitement ces valeurs.

**14.12** Extrema locaux et globaux de  $f(x, y) = y(x^2 + (\ln y)^2)$ .

## 14.4 Courbes et surfaces

**14.13** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$  et  $S$  la surface définie par :  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = f(r, \theta)$ . Déterminer pour tout point régulier de  $S$ , l'intersection de  $(Oz)$  et du plan tangent en ce point.

**14.14** Déterminer les plans tangents aux points réguliers de la surface  $S : z^3 = xy$  contenant la droite  $D$  déterminée par le système d'équations  $x - 2 = y - 3(z + 1) = 0$ .

**14.15** Soit  $S$  la surface d'équation  $x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz = 1$ .

- Quels sont les points singuliers de  $S$  ?
- Déterminer l'intersection de  $S$  et du plan d'équation  $z = 0$ . Trouver une équation du plan tangent à  $S$  en chaque point de cette intersection.

**14.16** Déterminer les plans tangents à  $S : x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$  qui sont orthogonaux à la droite  $D : x = \frac{y}{3} = -\frac{z}{2}$ .

**14.17** Soit  $S$  la surface d'équation  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ .

Déterminer les plans tangents à  $S$  et parallèles au plan  $P$  d'équation  $x + 4y + 6z = 0$ .

**14.18** TPE PSI 2015

Déterminer les plans tangents à  $S : z^2 = xy$  et contenant la droite d'équations  $D : x = y = z$ .

**14.19** Saint-Cyr PSI 2016 Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x, y, z) = \frac{\text{Arctan}(xyz)}{1 + (xyz)^2} - \frac{\pi}{8}$ .

Donner l'équation du plan tangent en  $(1, 1, 1)$  à la surface  $S$  définie par  $f(x, y, z) = 0$ .

## 14.5 Exercices aux oraux des étudiants de PSI1

**14.20** Cachan PSI 2015 Guillaume Soustrade

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $f : (\mathbb{R}_+^*)^n \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n x_k \ln(x_k)$ .

Soit  $\lambda > 0$  et  $A_\lambda = \{(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n \mid \forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, x_1 + \dots + x_n = n\lambda\}$ ,  $M_\lambda = \text{Sup}_{A_\lambda} f$  et  $m_\lambda = \text{Inf}_{A_\lambda} f$ .

- Déterminer  $M_\lambda$  et  $m_\lambda$  pour  $n = 2$  puis pour  $n = 3$ .
- Déterminer alors  $M_\lambda$  et  $m_\lambda$  pour  $n$  quelconque.

**14.21** Centrale Maths1 PSI 2015 Alberto Alonso

**a.** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  et  $a > 0$  tels que  $\forall t \geq 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(tx, ty) = t^a f(x, y)$ .

Montrer que  $f$  vérifie l'équation aux dérivées partielles :  $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = af$ .

**b.** Réciproquement, soit  $f$  vérifiant pour un réel  $a > 0$  l'équation  $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = af$  sur  $\mathbb{R}^2$ , montrer que  $\forall t \geq 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(tx, ty) = t^a f(x, y)$ .

**c.** Trouver les fonctions de classe  $C^1$  sur  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  vérifiant (E) :  $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^4 + y^4}$ .

**14.22** Mines PSI 2015 Alberto Alonso

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x, y) = y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right)$  si  $y \neq 0$  et  $f(x, 0) = 0$ .

- Étudier la continuité de  $f$  sur  $\mathbb{R}^2$ .
- Donner les dérivées partielles de  $f$  lorsque c'est possible.
- Étudier la continuité des dérivées partielles.

**14.23** *E3A PSI 2015* Florie Montpezat

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x, y) = (x^2 + y^2)^x$  si  $(x, y) \neq (0, 0)$  et  $f(0, 0) = 1$ .

- a.  $f$  est-elle de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  ?
- b.  $f$  admet-elle un extremum au point  $(0, 0)$  ?
- c.  $f$  admet-elle des extrema sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  ?

**14.24** *Petites Mines PSI 2015* Patxi Teillagorry

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ . On définit  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  par  $g(x, x) = f(x)$  et  $g(x, y) = \frac{1}{y-x} \int_x^y f(t) dt$  si  $x \neq y$ .

On pose  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y\}$ .

- a. Exemple, prendre  $f(x) = x^2$ . Montrer que  $g$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .
- b. Montrer que  $g$  est de classe  $C^1$  sur  $D$  et calculer  $\frac{\partial g}{\partial x}$  et  $\frac{\partial g}{\partial y}$ .
- c. Soit  $a \in \mathbb{R}$ , montrer que  $g$  admet une dérivée partielle en  $(a, a)$  selon  $x$  et selon  $y$ . Les calculer.
- d. Montrer que  $g$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

**14.25** *ENS Cachan PSI 2016* Samuel Cailleaux

Soit  $A, B$  deux évènements d'un univers probabilisé  $\Omega$  et l'inégalité  $|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| \leq \frac{1}{4}$  (1).

- a. Démontrer (1) dans le cas où  $A \cup B = \Omega$  et  $A$  et  $B$  incompatibles.
- b. Démontrer (1) si  $A$  et  $B$  sont incompatibles uniquement.

Soit  $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $h(x, y, z) = x(1 - x - y - z) - yz$ , la partie  $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}_+^3 \mid x + y + z \leq 1\}$  et  $F$  la frontière de  $K$ .

- c. Dessiner  $F$ . Encadrer de façon optimale  $h$  sur  $F$ .
- d. Prouver que  $|h(x, y, z)| \leq \frac{1}{4}$  pour  $(x, y, z) \in K$ .
- e. Démontrer (1) dans le cas général.

**14.26** *Centrale Maths1 PSI 2016* Samy Essabar

a. Soit  $f \in C^1((\mathbb{R}_+^*)^2, \mathbb{R})$  et  $(x_0, y_0) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$  tels que  $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ .

Montrer que  $(x_0, y_0)$  est un point critique de  $f$ .

Pour  $a > 0$ , on définit  $S_a : (\mathbb{R}_+^*)^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  par  $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, S_a(x, y) = xy + \frac{2(x+y)a}{xy}$ .

b. Montrer que  $S_a$  admet un unique point critique noté  $(x_0, y_0)$ .

Soit  $K = \left\{ (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \mid x \geq \frac{x_0}{3} \text{ et } y \geq \frac{y_0}{3} \text{ et } xy \leq 3x_0y_0 \right\}$ .

- c. Représenter  $K$ . Montrer que  $S_a$  admet un minimum sur  $K$ . Montrer que c'est un minimum sur  $(\mathbb{R}_+^*)^2$ .
- d. Parmi les boîtes (parallélépipèdes rectangles de base rectangulaire de dimension  $x$  et  $y$ ) sans couvercle (avec seulement le fond et les quatre faces latérales) de volume  $V > 0$  fixé, quelles sont celles de surface minimale ? Vous donnerez la hauteur de la boîte optimale en fonction de la dimension du fond.

**14.27** *Mines PSI 2016* Sylvain Bielle I

On note  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ . Soit  $p \in \mathbb{R}$  et  $g \in C^2(U, \mathbb{R})$ .

Trouver les fonctions  $f \in C^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$  telles que  $\forall (x,y) \in U$ ,  $g(x,y) = f(x^2 + y^2)$  sachant que l'on suppose  $\forall (x,y) \in U$ ,  $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = (x^2 + y^2)^p$ .

**14.28** *Mines PSI 2016* Alexandre Janot I

Soit  $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ , on définit  $f : (\mathbb{R}_+^*)^2 \rightarrow \mathbb{R}$  par  $f(x,y) = \frac{ax}{y} + \frac{by}{x}$ . Étudier les extrema de  $f$ .

**14.29** *CCP PSI 2016* Arthur Robbe I

Soit  $\Sigma$  la surface définie par  $xyz = 1$ .

a. Montrer que  $\Sigma$  est une surface régulière.

b. Montrer que les trois intersections I, J, K d'un plan tangent à  $\Sigma$  avec les droites de coordonnées  $(Ox)$ ,  $(Oy)$  et  $(Oz)$  délimite un tétraèdre OIJK de volume constant. Indication : on rappelle le volume d'un tétraèdre ABCD vaut  $V = \frac{1}{6} \left| \det(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) \right|$ .

**14.30** *ENS Cachan PSI 2017* Thomas Laborde

Soit  $u \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  telle que  $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} \frac{|u(x)|}{\|x\|} = +\infty$ . On pose  $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < r\}$  pour  $r > 0$ .

a. Cas  $n = 1$  :  $\nabla u$  est-il surjectif ?

Pour la suite, on prend  $n = 2$  et on suppose que  $\nabla u$  n'est pas surjectif.

b. Montrer qu'il existe  $v \in \mathbb{R}^2$  tel que la fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = u(x) - (x|v)$  soit de classe  $C^1$ , que  $\nabla f$  ne s'annule pas, et que  $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = +\infty$ .

c. Soit  $r > 0$  et  $(a,b) \in (\mathbb{R}^2 \setminus B_r)^2$ , montrer qu'il existe  $\gamma : [0; 1] \rightarrow (\mathbb{R}^2 \setminus B_r)$  telle que  $\gamma(0) = a$ ,  $\gamma(1) = b$ . En déduire que  $f(\mathbb{R}^2 \setminus B_r)$  est un intervalle.

d. Conclure.

**14.31** *Centrale Maths1 PSI 2017* Corentin Gatellier et Valentin Gorce

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$ . On pose  $A = [-2; 2]^2$ .

a. La fonction  $f$  admet-elle des extrema sur  $A$  ?

b. Quels sont les points susceptibles d'être des extrema locaux de  $f$  sur  $A$  ?

c. Comparer  $f(x,x)$  et  $f(x,-x)$ . Conclure quant à l'un des trois points.

d. Les autres peuvent-ils être des maxima ? Des minima ?

e. Trouver les extrema de  $f$  sur  $A$  (coordonnées et valeurs).

**14.32** *Mines PSI 2017* Vincent Bouget III et Vincent Meslier II

Soit  $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $H(x,y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$  si  $(x,y) \neq (0,0)$  et  $H(0,0) = 0$ .

La fonction  $H$  est-elle de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$  ?

**14.33** *X PSI 2018* Victor Bourdeaud'hui

Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $g$  dérivable sur  $[0; T]$  telle que  $\forall t \in [0; T], g'(t) \leq \lambda g(t)$ .

a. Majorer  $g(t)$  pour  $t \in [0; T]$ .

Soit  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  telle que  $\det(A) > 0$  et  $\text{Tr}(A)^2 > 4\det(A)$ .

b. On admet que si  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|Y(t)\| = +\infty$  et  $P$  inversible, alors  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|X(t)\| = +\infty$  si  $X(t) = PY(t)$ .

Comportement quand  $t$  tend vers  $+\infty$  des solutions de l'équation différentielle  $X' = AX$  ?

Soit  $f_1$  et  $f_2$  deux fonctions de classe  $C^1$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  et  $f = (f_1, f_2)$  telle que  $f(0,0) = (0,0)$ . On pose

$$J(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(0,0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(0,0) \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(0,0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ (jacobienne de } f \text{ en } (0,0)).$$

c. Soit  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  de classe  $C^1$  telle que  $y' = f(y)$ . Montrer que si  $y(0)$  est assez petit (en norme bien sûr), alors  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = (0,0)$  (on dit que  $(0,0)$  est un point fixe attractif pour ce système différentiel).

**14.34** *Mines PSI 2018* Alexandre Morisse II

Pour des fonctions  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$ , résoudre les équations suivantes :

$$(1) : \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad (2) : \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad (3) : \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0.$$

**14.35** *CCP PSI 2018* Charlotte Nivelles I

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x,y) = x^2y + \ln(4+y^2)$ .

a. Montrer que  $f$  admet un unique point critique sur  $\mathbb{R}^2$ .

b. On définit  $e(x) = f(x, x^3) - f(0,0)$  pour  $x \in \mathbb{R}$ . Trouver un équivalent simple de  $e(x)$  en 0.

c.  $f$  admet-elle des extrema locaux sur  $\mathbb{R}^2$  ?

**14.36** *E3A PSI 2018* Marion Lebrun

On note  $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \pi \text{ et } 0 \leq y \leq \pi\}$  et  $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < y < \pi\}$ .

a. Dessiner  $K$  et  $T$ .

Soit  $F : K \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $F(x,y) = y(\pi - x)$  si  $0 \leq y \leq x \leq \pi$  et  $F(x,y) = x(\pi - y)$  si  $0 \leq x \leq y \leq \pi$ .

b. Montrer que  $F$  est continue sur  $K$ .

c.  $F$  admet-elle des extrema locaux sur  $T$ , si oui lesquels ?

d.  $F$  admet-elle un minimum sur  $K$  ? Un maximum ? Si oui, déterminer leurs valeurs.

**14.37** *Centrale Maths1 PSI 2019* Victor Margueritte

Dans  $\mathbb{R}^2$ , soit  $D$  le disque fermé de centre  $O$  et de rayon 1 (disque fermé unité). On définit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  par  $f(x,y) = -(x^2 + y^2)^2 + \frac{3}{2}(x^2 + y^2) + 1$  et  $F : D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $F(x,y,z) = f(x,y) - z$ .

a. Calculer le gradient de  $F$ .

b. Soit  $S = \{(x,y,z) \in D \times \mathbb{R} \mid z = f(x,y)\}$  la surface représentative de  $f$ . Déterminer les points  $(x,y) \in D$  où le plan tangent à  $S$  en  $(x,y,z)$  est normal au vecteur  $\vec{v} = (0,1,-1)$ .

c. Soit  $\gamma : t \mapsto (t,t)$  et  $g = f \circ \gamma$ . Donner l'ensemble de définition de  $g$ , calculer  $g'$  par la règle de la chaîne.

En déduire les extrema de la fonction  $g$  sur son ensemble de définition.

**14.38** *CCP PSI 2019* Jon Biran I et Mathis Chénet I

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(0,0) = 0$  et  $f(x,y) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$  si  $(x,y) \neq (0,0)$ .

- a. La fonction  $f$  est-elle continue sur  $\mathbb{R}^2$  ?
- b. La fonction  $f$  est-elle de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  ?
- c. Est-ce que  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  existe sur  $\mathbb{R}^2$  ?

**14.39** *CCP PSI 2019* Perrine Hoffmann et Quentin Vacher I

Soit  $f : (x,y) \mapsto x^3 y^2 (1 - x - y)$ .

- a. Trouver les points critiques de  $f$ .
- b. Étudier les extrema locaux de  $f$ . Admet-elle des extrema absolus ?

**14.40** *ENS Cachan PSI 2021* Julien Gombert et Quentin Granier

Soit  $(a,b) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $a < b$ ,  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^3$ , une fonction  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  et une fonction  $\varphi : [a;b] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  telle que  $\forall x \in [a;b], v(x) = (x, \varphi(x), \varphi'(x)) \in U$ . Soit aussi une fonction  $g : [a;b] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  telle que  $g(a) = g(b) = 0$ . On pose, pour un réel  $t$  et  $x \in [a;b]$ ,  $\varphi_t(x) = \varphi(x) + t g(x)$  et  $v_t(x) = (x, \varphi_t(x), \varphi_t'(x))$ . On pose aussi  $I_{\varphi_t} = \int_a^b f(v_t(x)) dx$ .

- a. Montrer qu'il existe  $\alpha > 0$  tel que  $\forall t \in [-\alpha; \alpha], v_t(x) \in U$ .
- b. Montrer que  $h : t \mapsto I_{\varphi_t}$  est dérivable en 0 et que  $h'(0) = \int_a^b \left[ \frac{\partial f}{\partial y}(v(x)) - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial z}(v(x)) \right) \right] g(x) dx$ .
- c. On suppose que pour toute  $g : [a;b] \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant les hypothèses précédentes, l'application  $h : t \mapsto I_{\varphi_t}$  admet un extremum local en 0. Montrer que  $\varphi$  est solution d'une équation différentielle à déterminer.

**14.41** *Centrale Maths1 PSI 2021* Julie Coheleach

Soit  $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  la base orthonormée directe canonique dans  $\mathbb{R}^3$  euclidien orienté canonique.

Soit  $S$  la surface d'équation  $z = g(x,y)$  avec  $g \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ .

On considère aussi l'équation aux dérivées partielles (E) :  $2 \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = 0$ .

On dit que  $g \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  vérifie la propriété (P) si, au niveau des points réguliers de  $S$ , la normale à la surface  $S$  est orthogonale au vecteur  $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j}$ .

- a. Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $g$  pour qu'elle vérifie la propriété (P).
- b. Montrer que  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $\varphi(x,y) = (x - 2y, y)$  est inversible et donner son inverse  $\psi$ .
- c. Pour  $g \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ , on pose  $h = g \circ \varphi$ . Montrer que  $h$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  et calculer ses dérivées partielles.
- d. Résoudre (E).

**14.42** *Mines PSI 2021* Antoine Faivre-Duboz I

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  et  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $g(x,y) = \frac{1}{y-x} \int_x^y f(t) dt$  si  $x \neq y$  et  $g(x,x) = f(x)$ .

On définit aussi la partie  $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y\}$  de  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $a \in \mathbb{R}$ .

- a. Montrer que  $g$  est de classe  $C^1$  sur  $D$  et donner ses dérivées partielles.
- b. Montrer que  $g$  admet des dérivées partielles d'ordre 1 au point  $(a,a)$  et que  $\frac{\partial g}{\partial x}(a,a) = \frac{\partial g}{\partial y}(a,a) = \frac{f'(a)}{2}$ .
- c. Montrer que  $\forall (x,y) \in D, \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial g}{\partial y}(a,a) = \frac{1}{(y-x)^2} \int_x^y (y-t)(f'(t) - f'(a)) dt$ .
- d. En déduire que  $g$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

**14.43** *Mines PSI 2021* Baptiste Pozzobon II

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$  si  $(x, y) \neq (0, 0)$  et  $f(0, 0) = 0$ .

- Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .
- Montrer que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .
- Calculer les dérivées partielles seconde de  $f$  en  $(0, 0)$ .
- Qu'en déduire sur la fonction  $f$  ?

**14.44** *ENS Cachan PSI 2022* Olivier Baesen et Thibault Le Gal et Antoine Prévost

Soit un entier  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice symétrique inversible ( $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ ).

On définit  $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  par  $\Phi(M) = M^T A M$ .

- Montrer que  $\Phi$ , vue comme une application de  $\mathbb{R}^{n^2}$  dans  $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ , est de classe  $C^1$ .
- Rappeler la définition de la différentielle.
- Soit  $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on note  $d_{I_n} \Phi$  la différentielle de  $\Phi$  en  $I_n$ .
  - Montrer que  $\Phi(I_n + H) - \Phi(I_n) = H^T A + A H + H^T A H$ .
  - En déduire que  $d_{I_n} \Phi(H) = H^T A + A H$ .
  - Déterminer le noyau et l'image de  $d_{I_n} \Phi$ .
- Montrer que  $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})\}$  et  $\text{Ker}(d_{I_n} \Phi)$  sont supplémentaires.
- Montrer qu'il existe un ouvert  $U$  contenant  $I_n$  tel que  $U \subset \text{GL}_n(\mathbb{R})$ .

**14.45** *Centrale Maths1 PSI 2022* Maxence Rossignol

Soit la fonction  $K : [0; 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $K(x, y) = x(1 - y)$  si  $x \leq y$  et  $K(x, y) = y(1 - x)$  sinon.

- Montrer que  $K$  est continue sur  $[0; 1]^2$  et à valeurs dans  $\left[0; \frac{1}{4}\right]$ .
- Si  $(x_0, y_0) \in [0; 1]^2$  et  $x_0 < y_0$ , déterminer une équation du plan tangent  $P$  à la surface  $S$  d'équation  $z = K(x, y)$  en le point  $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ . Donner aussi un vecteur non nul normal à  $P$ .

**14.46** *Mines PSI 2022* Jimmy Guertin I

Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$ .

On définit la fonction  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  par  $F(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (t - x)^2 (t - y)^2 e^{-t^2} dt$ .

- Montrer l'existence de  $I_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
- Trouver une relation entre  $I_{n+2}$  et  $I_n$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .
- Pour  $p \in \mathbb{N}$ , calculer  $I_{2p+1}$  et  $I_{2p}$  en admettant que  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$ .
- Calculer  $F(x, y)$ . Montrer que  $F$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^2$ .
- Déterminer les points critiques de  $F$ , puis ses éventuels extrema.

## 14.6 Officiel de la Taupe

**14.47** *OdIT 2012/2013 Mines PSI planche 177 II*

Extrema éventuels de  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + (1 - y)^2} + \sqrt{y^2 + (1 - x)^2}$ . Peut-on généraliser ?

**14.48** *OdIT 2012/2013 ENTPE/EIVP PSI planche 247 I*

Montrer que  $f(x, y) = \left( \sqrt{x^2 + y^2}, \frac{y}{x} \right)$  est un  $C^1$ -difféomorphisme de  $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$  et déterminer  $f^{-1}$ .

**14.49** *OdIT 2013/2014 X-Cachan PSI planche 71*

Soit  $h(x, y, z) = xyz + xy + zy$  ; à quelles conditions sur  $x, y, z$ , la matrice hessienne associée à  $h$  a-t-elle des valeurs propres positives ? Montrer que la matrice hessienne de  $f$ , de classe  $C^2$  de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}$ , ayant un minimum local en  $X_0 = (x, y, z)$ , a ses valeurs propres positives. Montrer que  $h$  n'a pas de minimum local.

**14.50** *OdIT 2013/2014 Mines PSI planche 195 I*

Résoudre l'équation  $x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - f(x, y) = -(x^2 + y^2)$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ .

Indication : on pourra passer en coordonnées polaires.

**14.51** *OdIT 2013/2014 Mines PSI planche 195 I*

Résoudre l'équation (E) :  $x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - f(x, y) = -(x^2 + y^2)$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ .

Indication : on pourra passer en coordonnées polaires.

**14.52** *OdIT 2014/2015 Mines PSI planche 174 I*

Extrema de  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$ .

**14.53** *OdIT 2014/2015 Centrale PSI planche 238 I*

Soit  $a, b, c$  trois réels positifs tels que  $a + b + c = \frac{\pi}{2}$ . Montrer que  $\sin(a) \sin(b) \sin(c) \leq \frac{1}{8}$ .

**14.54** *OdIT 2014/2015 CCP PSI planche 284 II*

La fonction  $f : (x, y) \mapsto xy + \frac{4}{x} + \frac{2}{y}$  admet-elle des extrema locaux sur  $(\mathbb{R}_+^*)^2$  ?

**14.55** *OdIT 2015/2016 Mines PSI planche 132III*

On pose  $H(0, 0) = 0$  et  $H(x, y) = \frac{x^4 y}{x^2 + y^2}$  pour  $(x, y) \neq (0, 0)$  ;  $H$  est-elle  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  ?

**14.56** *OdIT 2015/2016 CCP PSI planche 240I*

Trouver l'extremum de  $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 5x - y$ .

**14.57** *OdIT 2015/2016 CCP PSI planche 241I*

Extrema globaux puis locaux de  $f(x, y) = x^4 y^3 + \ln(1 + y^4)$  sur  $[-1; 1]^2$ .

**14.58** *OdIT 2015/2016 ENSAM PSI planche 271II*

Prouver que  $f(x, y) = x \ln y - y \ln x$  admet un point critique et le calculer.

**14.59** *OdIT 2015/2016 ENTPE-EIVP planche 278II*

Extrema de  $f(x, y) = xy\sqrt{1-x-y}$  sur  $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid 1-x-y \geq 0\}$ .

**14.60** *OdIT 2016/2017 X/Cachan PSI planche 34*

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  vérifiant  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, f(tx, ty) = t^k f(x, y)$  où  $k \in \mathbb{N}^*$  et aussi  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$ . Montrer que  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = kf(x, y)$ .

Montrer aussi que  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = k(k-1)f(x, y)$ .

On pose  $h(\theta) = f(\cos \theta, \sin \theta)$  ; montrer que  $h'' + k^2 h = 0$  et en déduire que  $f$  est polynomiale en  $x$  et  $y$ . Trouver toutes les fonctions  $f$  dans le cas où  $k \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$  et  $k \geq 1$ .

**14.61** *OdIT 2016/2017 Mines PSI planche 106I*

On note  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . On donne  $p \in \mathbb{R}$  et  $g \in C^2(U, \mathbb{R})$ . Trouver les fonctions  $f \in C^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$  vérifiant  $\forall (x, y) \in U, g(x, y) = f(x^2 + y^2)$ , sachant que  $\forall (x, y) \in U, \Delta g(x, y) = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) = (x^2 + y^2)^p$ .

**14.62** *OdIT 2016/2017 Mines PSI planche 119II*

$H$ , définie par  $H(0, 0) = 0$  et  $H(x, y) = \frac{x^4 y}{(x^4 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}$  pour  $(x, y) \neq (0, 0)$  est-elle continue sur  $\mathbb{R}^2$  ?

**14.63** *OdIT 2016/2017 Centrale PSI planche 169*

Montrer que la série de fonctions  $u_n(t) = \frac{1}{n^2} e^{-nt}$  converge simplement ; on note  $S$  sa somme.

Montrer que  $f(x, y) = S(x^2 + y^2)$  est continue et qu'elle admet des dérivées partielles d'ordre 1.

Montrer que  $f$  est  $C^1$  et que son gradient est colinéaire à  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  ; interpréter géométriquement cette propriété.

Soit  $\gamma$  un arc régulier  $C^1$  et 1-périodique ; montrer que la restriction de  $f$  à  $K = \gamma(\mathbb{R})$  atteint son minimum.

**14.64** *OdIT 2017/2018 CCP PSI planche 212I et compléments CCP PSI planche 446I*

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x, y) = x^2 y + \ln(4 + y^2)$ .

a. Montrer que  $f$  admet un unique point critique sur  $\mathbb{R}^2$ .

b. On définit  $e(x) = f(x, x^3) - f(0, 0)$  pour  $x \in \mathbb{R}$ . Trouver un équivalent simple de  $e(x)$  en 0.

c.  $f$  admet-elle des extrema locaux sur  $\mathbb{R}^2$  ?