ÉNONCÉS EXERCICES CORRIGÉS 15 FONCTIONS VECTORIELLES ET COURBES

15.1 Révision de sup. sur la dérivation

15.1 *Centrale PSI 2012* On appelle S l'ensemble des couples $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tels que $x < y$ et $x^y = y^x$.

Par exemple $(2,4) \in S$ car $2^4 = 4^2 = 16$ et $2 < 4$.
On définit aussi les trois fonctions $\varphi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x > 0,\ \varphi(x) = \frac{\ln(x)}{x} \text{ et } \forall t > 0,\ f(t) = \Big(1 + \frac{1}{t}\Big)^t \text{ et } g(t) = \Big(1 + \frac{1}{t}\Big)^{t+1}.$$

a. Étudier rapidement φ et tracer son graphe. En déduire que $(x,y) \in S \Longrightarrow 1 < x < e < y$.
b. Déterminer un intervalle I tel que g réalise une bijection entre $\mathbb{R}_+^*$ et I.
On admettra, le travail est similaire, que f réalise une bijection strictement croissante entre $\mathbb{R}_+^*$ et $]1\,;e[$.
c. Prouver alors que $t \mapsto \big(f(t), g(t)\big)$ constitue un paramétrage de S (pour $t \in \mathbb{R}_+^*$).
d. Étudier les deux extrémités de cette courbe $x = f(t)$, $y = g(t)$: quand $t \to 0+$ et quand $t \to +\infty$.

15.2 *Centrale PSI 2012* Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 et a, b et c trois réels distincts deux à deux.

a. Justifier : $\exists! P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(a) = f(a)$, $P(b) = f(b)$ et $P(c) = f(c)$ et donner son expression.
b. En déduire qu'il existe $d \in \mathbb{R}$ tel que $\dfrac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{f(b)}{(b-c)(b-a)} + \dfrac{f(c)}{(c-a)(c-b)} = \dfrac{1}{2} f''(d)$.

15.3 Soit la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall x > 0,\ f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.

a. Étudier rapidement f et tracer son graphe.
b. En déduire qu'il existe un unique couple d'entiers $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $a < b$ et $a^b = b^a$.

15.2 Courbes du plan en coordonnées cartésiennes

15.4 *Centrale PSI 2012* Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on se donne la courbe $\mathcal{C}$ paramétrée par $x = \dfrac{1}{t^2} + \dfrac{1}{t} - 1 - t$, $y = \dfrac{1}{t} - 1 - t$.

a. Tracer cette courbe $\mathcal{C}$: droite asymptote et position de la courbe par rapport à celle-ci, courbe asymptote.
b. Déterminer les coordonnées de l'unique point double A.

15.5 **a.** Étudier et représenter la courbe définie par $\Gamma\ :\ x = 4t^3,\ y = 3t^4$.

b. Former une équation de la tangente au point de paramètre $t \in \mathbb{R}$.
c. Déterminer un paramétrage du lieu $\mathcal{L}$ des points d'où l'on peut mener deux tangentes orthogonales à Γ (c'est-à-dire l'orthoptique de Γ) et tracer cette courbe.

15.6 Trouver une CNS sur $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ pour que la courbe $x = 2t + \dfrac{a}{t^2}$, $y = t^2 + \dfrac{2b}{t}$ admette un point de rebroussement. Étudier alors le lieu de ces points lorsque les paramètres varient.

15.7 *Astroïde* Tracer l'arc paramétré par : $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$.

En un point régulier M_{t_0} la tangente coupe (Ox) en A et (Oy) en B. Calculer AB.

15.8 Tracer l'arc $x = \dfrac{2t}{t^2-1}$, $y = \dfrac{t^2}{t^2-1}$ en déterminer les branches infinies et les points multiples.

15.9 Tracer l'arc : $x = (t+2)e^{1/t},\ y = (t-2)e^{1/t}$.

15.10 Tracer la courbe Γ paramétrée par $x = 3t^2$, $y = 2t^3$. Trouver une droite à la fois tangente et normale à Γ.

15.11 Construire la courbe $x = \dfrac{t}{t^2-1}$, $y = \dfrac{t^2}{t-1}$ avec ses branches infinies.
Déterminer les coordonnées du point double et vérifier que les tangentes en ce point sont orthogonales.

15.12 Tracer la courbe $\mathcal{C}$ définie par $x = \dfrac{t^2}{2} + t$, $y = \dfrac{t^3}{3} + \dfrac{t^2}{2}$ puis étudier la courbe $\mathcal{O}$ (orthoptique) des points appartenant à deux tangentes orthogonales à $\mathcal{C}$.

15.3 Courbes de l'espace

15.13 Déterminer le vecteur tangent $\overrightarrow{T}$ en tout point régulier de la courbe Γ définie par le paramétrage cartésien : $x = (1+\cos t)\cos t,\ y = (1+\cos t)\sin t,\ z = 4\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)$. Calculer la longueur de Γ.

15.14 On considère la courbe Γ définie par : $x = \dfrac{t^4}{1+t^2}$, $y = \dfrac{t^3}{1+t^2}$, $z = \dfrac{t^2}{1+t^2}$. À quelle condition M_1, M_2, M_3, M_4 quatre points de Γ de paramètres respectifs t_1, t_2, t_3, t_4 sont-ils coplanaires ?

15.4 Longueur de courbes

15.15 _Centrale PSI 2013_ Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la courbe paramétrée Γ_n dont le point courant $M_n(t)$ est de coordonnées $x_n(t) = \cos^n(t),\ y_n(t) = \sin^n(t)$ pour $t \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$. On désigne par L_n la longueur de Γ_n.

a. Donner l'allure des courbes de la famille $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Donner sans preuve L_1 et L_2.
b. Donner une expression sous forme intégrale de L_n. Calculer L_3.
c. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} L_n$.

Indication : on pourra comparer $\sqrt{a^2+b^2}$ et $|a|+|b|$ et faire intervenir le point $I_n = M_n\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

15.16 _Centrale PSI 2012_ Soit la courbe paramétrée donnée en coordonnées cartésiennes dans un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ par $x = 8\sin t$, $y = \sqrt{2}\sin(2t)$. On note Γ la trajectoire de cette courbe.
a. Tracer rapidement Γ.
b. Calculer la longueur de Γ.

15.17 **a.** Tracer la courbe d'équation : $x = \cos^2(t) + \ln(\sin(t)),\ y = \sin(t)\cos(t)$.
b. Calculer la longueur de la courbe entre les deux points de rebroussement.

15.18 Soit la courbe paramétrée par : $x = 2t^3 + 3t^2$, $y = 3t^2 + 6t$.
Calculer la longueur de l'arc (AO) où A est le point de rebroussement.

15.19 Nature, construction et longueur de la courbe d'équation $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$.

15.5 Exercices aux oraux des étudiants de PSI1

15.20 *ENS Cachan PSI 2016* Hugo Saint-Vignes

a. Démontrer la formule de TAYLOR reste intégral.

b. Démontrer l'inégalité de TAYLOR : $\left|f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right| \leqslant \dfrac{||f^{(n+1)}||_\infty |x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$.

c. Soit f telle que f et f'' soient bornées sur $\mathbb{R}$.
Montrer que f' est bornée sur $\mathbb{R}$ et majorer $||f'||_\infty$ en fonction de $||f||_\infty$ et $||f''||_\infty$.

d. Soit $f : [0;b] \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $f(0) = f''(0) = 0$ et $f'(b) = 0$. Montrer qu'il existe une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in [0;b],\ g(x) = f(x)$ et $\forall k \in \{0,1,2\},\ ||g^{(k)}||_{\infty,\mathbb{R}} = ||f^{(k)}||_{\infty,[0;b]}$.

e. Soit $a \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$ et $b = a + \dfrac{\cos(a)}{2\sin(a)}$. Soit $f : [0;b] \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \sin(x)$ si $x \in [0;a]$ et sinon $f(x) = \sin(a) + (x-a)\cos(a) - \dfrac{1}{2}(x-a)^2\sin(a)$. Montrer que f est de classe C^2 sur $[0;b]$. Montrer que f vérifie les hypothèses de la question précédente.

15.21 *Centrale Maths1 PSI 2016* Sam Pérochon

Soit Γ la courbe définie par $\begin{cases} x &= (1+\cos t)\sin t \\ y &= (1+\cos t)\cos t \\ z &= 4\sin(t/2) \end{cases}$.

a. Trouver tous les points réguliers de Γ. Calculer la tangente à tous ces points réguliers.

b. Calculer l'angle que fait la tangente en tous ces points avec l'axe (Oz).

c. Calculer le projeté orthogonal de Γ sur l'axe (Oz). Et sur le plan (xOy) ?

d. Calculer la longueur de la courbe.

15.22 *CCP PSI 2017* Samuel Sanchez II

Étude de l'arc paramétré $x(t) = \dfrac{1}{t} + \ln(2+t),\ y(t) = t + \dfrac{1}{t}$. On précisera les tangentes parallèles aux axes du repère, les branches infinies, les points particuliers de l'arc.

15.23 *ENS Cachan PSI 2019* Tanguy Sommet

Soit $A : [0;+\infty[\to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une fonction 1-périodique de classe C^1.
On s'intéresse à l'équation $(E)\ :\ X'(t) = A(t)X(t)$ d'inconnue $X : [0;+\infty[\to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1.
On admet, c'est le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ version matricielle, que si $Y \in \mathbb{R}^n$ est fixé, il existe une unique solution $X : [0;+\infty[\to \mathbb{R}^n$ de (E) telle que $X(0) = Y$.
On note, pour $t \geqslant 0$ et $Y \in \mathbb{R}^n$, $v_t(Y) = X(t)$ avec la solution X de (E) de la ligne précédente.
On appelle $R(t)$ la matrice de v_t dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

a. Pour $t \geqslant 0$, exprimer $X(t)$ en fonction de $R(t)$ et $X(0)$.

b. Montrer que $\forall t \geqslant 0,\ R'(t) = A(t)R(t)$ et que $R(0) = I_n$.

Soit $W : [0;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $W(t) = \det(R(t))$.

c. Montrer que $\forall t \geqslant 0,\ W'(t) = \mathrm{Tr}\,(A(t))W(t)$. Indication : on pourra écrire $W(t) = \begin{vmatrix} \cdots L_1(t) \cdots \\ \vdots \\ \cdots L_n(t) \cdots \end{vmatrix}$ en notant $L_i(t)$ la i-ième colonne de la matrice $R(t)$. En déduire que $R(t)$ est inversible en tout instant $t \geqslant 0$.

d. Montrer que $\forall t \geqslant 0,\ R(t+1) = R(t)R(1)$.

e. Montrer qu'il existe une solution X de (E) non identiquement nulle, de classe C^1 et 1-périodique si et seulement si $1 \in \mathrm{Sp}(R(1))$.

On suppose dans la suite que $R(1) = PDP^{-1}$ avec $P \in GL_n(\mathbb{R})$, $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ avec $\forall k \in [\![1; n]\!]$, $\lambda_k > 0$.
On pose $\Lambda(t) = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1^t}, \ldots, \frac{1}{\lambda_n^t}\right)$, $Q(t) = R(t)P\Lambda(t)P^{-1}$ et $\forall t \geqslant 0,\ Z(t) = (Q(t))^{-1}X(t)$.

On pose aussi $D_0 = \mathrm{diag}(\ln(\lambda_1), \ldots, \ln(\lambda_n))$ et $B(t) = P(\Lambda(t))^{-1}D_0\Lambda(t)P^{-1}$.

f. Montrer que Q est 1-périodique.

g. Montrer que X est solution de $(E) \Longleftrightarrow Z'(t) = B(t)Z(t)$.

15.24 <u>*Centrale Maths1 PSI 2021*</u> Quentin Granier et Arthur Riché et Adèle Robert

On pose $f_1(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{\cos(u)}{\sqrt{u}}du$ et $f_2(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}du$.

a. Montrer que f_1 est bien définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Montrer que f_1 admet une limite finie en $+\infty$.

On admet que f_2 est aussi de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et admet une limite finie en $+\infty$.

c. Soit $(t_1, t_2) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $t_1 < t_2$, quelle est la longueur de l'arc paramétré $t \mapsto (f_1(t), f_2(t))$ entre les points de paramètres t_1 et t_2 ?

On pose $F(t) = \left(\displaystyle\int_t^{+\infty} \frac{\cos(u)}{\sqrt{u}}du\right)^2 + \left(\displaystyle\int_t^{+\infty} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}du\right)^2$.

d. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $F'(t) = -2\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(u)}{\sqrt{t^2 + tu}}du$.

e. Soit a et t deux réels strictement positifs, montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos(u)}{\sqrt{a + tu}}du > 0$.

f. Montrer que F est strictement décroissante.

15.25 <u>*Mines PSI 2021*</u> Paul Jaïs I

On considère l'arc paramétré Γ par $x(t) = \cos(3t),\ y(t) = \sin(2t)$.

a. Étudier les symétries, périodicité de cette courbe.

b. Quels sont ses points stationnaires, ses tangentes horizontales, verticales ?

c. Tracer la courbe Γ.

15.26 <u>*Centrale Maths1 PSI 2022*</u> Jimmy Guertin

Soit l'arc paramétré Γ par $x(t) = \cos^3(t)$ et $y(t) = \sin^3(t)$ pour $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

a. Soit $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et $M = M(t) = (x(t), y(t)) \in \Gamma$, calculer la longueur de l'arc entre $M(0) = (1, 0)$ et M.

Soit $n + 1$ points de l'arc Γ notés $M_0, \cdots, M_n$ tels que $M_0 = M(0)$, $M_n = M\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et les longueurs de l'arc entre M_k et M_{k+1} ne dépendent pas de $k \in [\![0; n]\!]$.

b. Exprimer $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{OM_k}{n+1}$ où O est l'origine du repère.

c. Calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n$.

15.6 Officiel de la Taupe

15.27 *OdlT 2013/2014 ENTPE/EIVP PSI planche 292 II*

Donner la longueur de l'arc paramétré $x(t) = -\sin^2(t) + \ln\big(\sin(t)\big)$, $y(t) = \cos(t)\sin(t)$ entre ses deux points de rebroussement.

15.28 *OdlT 2016/2017 X/Cachan PSI planche 37*

Soit un entier $n \geqslant 2$ et $f : I \to \mathbb{C}$ de classe C^{n+1} telle que $f^{(n+1)}$ est bornée sur I et $a \in I$.

a. Montrer la formule de TAYLOR reste intégral, $\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt$.

b. Et l'inégalité de TAYLOR-LAGRANGE, $\forall x \in I,\ \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| \leqslant \frac{1}{(n+1)!}||f^{(n+1)}||_{\infty,I}|x-a|^{n+1}$.

c. On prend ici $n = 2$, montrer que si f est bornée ainsi que f'' sur I, alors f' est aussi bornée sur I.

d. On prend dans cette question $I = \mathbb{R}$, montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall h \in \mathbb{R}_+^*,\ |f'(x)| \leqslant \frac{1}{h}||f||_\infty + \frac{h}{2}||f''||_\infty$.

En déduire que l'on a la majoration $||f'||_\infty \leqslant \sqrt{2||f||_\infty||f''||_\infty}$.

15.29 *OdlT 2016/2017 ENSAM PSI planche 239II*

Représenter la courbe Γ_n d'équation $\frac{x^2}{n^2} + y^2 = 1$ pour $n = 1$ et $n = 2$. Calculer la surface S_n délimitée par la courbe dans le cas général. On note L_n la longueur de la courbe ; étudier les rayons de convergence de $\sum_{n\geqslant 1} S_n x^n$ et $\sum_{n\geqslant 1} L_n x^n$ (on rappelle que $\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+^2,\ \sqrt{a^2+b^2} \leqslant a + b$).

15.30 *OdlT 2016/2017 EIVP PSI planche 244I*

On donne $g(x,y) = (x^2 - y)(3x^2 - y)$; montrer que $\forall \lambda \neq 0,\ f_\lambda : x \mapsto g(x, \lambda x)$ admet un minimum local en 0. g admet-elle un minium local en $(0,0)$?

15.31 *Compléments OdlT 2017/2018 EIVP PSI planche 555II*

On donne $f(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$. Comparer $f(t + 2\pi)$, $f(-t)$ et $f(\pi - t)$ avec $f(t)$; qu'en déduit-on ?

Justifier que l'intervalle d'étude peut être réduit à $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Calculer la longueur de la courbe.

Soit $t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, déterminer une équation de la tangente T_t en $f(t)$ à la courbe. On note A (resp. B) l'intersection de T_t avec l'axe (Ox) (resp. (Oy)). Déterminer la longueur AB.

15.32 *Compléments OdlT 2017/2018 ENSEA PSI planche 579I*

Représenter la courbe C des points $M(t) = (\cos t, 2\sin t)$ sur $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$.

C est-elle une partie ouverte ? Fermée ? Convexe ? Bornée ?