SOLUTIONS EXERCICES CORRIGÉS 15 FONCTIONS VECTORIELLES ET COURBES

15.1 Révision de sup. sur la dérivation

15.1 **a.** La fonction φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ par théorèmes généraux et $\varphi'(x) = \dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$ donc φ est croissante sur $]0;e]$ et décroissante sur $[e;+\infty[$. Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0^+$ et il est clair que $\lim\limits_{x\to 0^+} \varphi(x) = -\infty$ avec $\varphi(1) = 0$. Ainsi, le graphe de φ admet deux asymptotes, l'une verticale d'équation $x = 0$ (quand t tend vers 0^+) et l'autre horizontale d'équation $y = 0$ (quand t tend vers $+\infty$). Enfin, la fonction φ admet un maximum $x = e$ et on a $\operatorname{Max}\limits_{\mathbb{R}_+^*} \varphi = \varphi(e) = \dfrac{1}{e}$.

Puisque $(x,y) \in S \iff (x < y \text{ et } x^y = y^x) \iff (x < y \text{ et } y\ln(x) = x\ln(y)) \iff (x < y \text{ et } \varphi(x) = \varphi(y))$, l'étude de φ menée précédemment montre que $(x,y) \in S \implies 1 < x < e < y$.

b. g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ par théorèmes généraux. Comme $g(t) = \exp\left((t+1)\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\right)$, il est clair que $\lim\limits_{t\to0^+} g(t) = +\infty$ et on trouve $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = e$ car $\ln\left(1+\dfrac{1}{t}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t}$ donc $(t+1)\ln\left(1+\dfrac{1}{t}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{t+1}{t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. De plus, $\forall t > 0,\ g'(t) = \left(\ln\left(1+\dfrac{1}{t}\right) - \dfrac{1}{t}\right)g(t) < 0$ car on a l'inégalité classique $\forall x > 0,\ \ln(1+x) < x$. D'après le théorème de la bijection, $g : \mathbb{R}_+^* \to]e\,;+\infty[$ est une bijection strictement décroissante.

c. D'après les intervalles $g(\mathbb{R}_+^*) =]e;+\infty[$ et $f(\mathbb{R}_+^*) =]1;e[$ trouvé en **b.** ou admis par l'énoncé, on a l'inégalité $\forall t > 0,\ f(t) < g(t)$. De plus, on obtient l'égalité $\varphi(f(t)) = \varphi(g(t))$ avec le calcul suivant : $\varphi(g(t)) = \dfrac{\ln(g(t))}{g(t)} = \dfrac{(t+1)\ln\left(1+(1/t)\right)}{\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+1}} = \dfrac{(t+1)\ln\left(1+(1/t)\right)}{\frac{t+1}{t}\times\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}} = \dfrac{t\ln\left(1+(1/t)\right)}{\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}} = \dfrac{\ln(f(t))}{f(t)} = \varphi(f(t))$.

Par définition, $(f(t),g(t)) \in S$. Réciproquement, si $(x,y) \in S$, alors $x \in]1\,;e[$ donc, par bijectivité de f, $\exists! t > 0,\ x = f(t)$. Ensuite, $\varphi(x) = \varphi(y) = \varphi\big(g(t)\big) = \varphi(f(t))$ prouve que $y = g(t)$ car φ injective sur $]e\,;+\infty[$ et que $y \in]e;+\infty[$ d'après **a.**. Par double implication, on a $(x,y) \in S \iff (\exists t > 0,\ x = f(t),\ y = g(t))$.

d. Comme $\ln\left(1+\dfrac{1}{t}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\ln(t)$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} t\ln(t) = 0$, il vient $\lim\limits_{t\to0^+} f(t) = 1$ et, comme $g(t) = \left(1+\dfrac{1}{t}\right)f(t)$, on a aussi $\lim\limits_{t\to0^+} g(t) = +\infty$ donc la droite d'équation $x = 1$ est asymptote (verticale) à S. De plus, on a les approximations $f\left(\dfrac{1}{u}\right) = \exp\left(\dfrac{\ln(1+u)}{u}\right) \underset{0}{=} \exp\left(1 - \dfrac{u}{2} + o(u)\right) \underset{0}{=} e \times \exp\left(-\dfrac{u}{2} + o(u)\right) \underset{0}{=} -\dfrac{eu}{2} + o(u)$ et $g\left(\dfrac{1}{u}\right) = (1+u)f\left(\dfrac{1}{u}\right) \underset{0}{=} (1+u)\left(-\dfrac{eu}{2} + o(u)\right) \underset{0}{=} e + \dfrac{eu}{2} + o(u)$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{g(t)-e}{f(t)-e} = -1$.

Conclusion : la demi-tangente à S en (e,e) est de pente -1.

15.2 **a.** Posons le polynôme de LAGRANGE $P = \dfrac{f(a)(X-b)(X-c)}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{f(b)(X-c)(X-a)}{(b-c)(b-a)} + \dfrac{f(c)(X-a)(X-b)}{(c-a)(c-b)}$.

On vérifie bien que $P \in \mathbb{R}_2[X]$ et que $P(a) = f(a)$, $P(b) = f(b)$ et $P(c) = f(c)$. Soit $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $Q(a) = f(a)$, $Q(b) = f(b)$ et $Q(c) = f(c)$, alors $(P-Q)(a) = (P-Q)(b) = (P-Q)(c) = 0$ donc le polynôme $P - Q \in \mathbb{R}_2[X]$ a trois racines distinctes (par hypothèse) donc il est nul et on en déduit que $P = Q$. On a bien prouvé l'existence et l'unicité $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(a) = f(a)$, $P(b) = f(b)$ et $P(c) = f(c)$, il s'agit de $P = \dfrac{f(a)(X-b)(X-c)}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{f(b)(X-c)(X-a)}{(b-c)(b-a)} + \dfrac{f(c)(X-a)(X-b)}{(c-a)(c-b)}$.

b. On définit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = f(x) - P(x)$. La fonction g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ par opérations et, d'après la question précédente, on a $g(a) = g(b) = g(c) = 0$. En supposant $a < b < c$ (les six cas sont similaires), on peut appliquer le théorème de ROLLE à g sur $[a;b]$ et sur $[b;c]$ et il existe donc deux réels $\alpha \in]a;b[$ et $\beta \in]b;c[$ tels que $g'(\alpha) = g'(\beta)$. Comme $\alpha < b < \beta$, on peut à nouveau appliquer le théorème de ROLLE à la fonction g' de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ pour avoir $d \in]\alpha;\beta[$ tel que $g''(d) = 0$. Ainsi, avec l'expression vue en **a.**, cela donne bien $g''(d) = 0 = f''(d) - 2\Big(\dfrac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{f(b)}{(b-c)(b-a)} + \dfrac{f(c)}{(c-a)(c-b)}\Big)$.

15.3 **a.** f est dérivable sur $]0;+\infty[$ par opérations et $\forall x \in]0;+\infty[,\ f'(x) = \dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$. Ainsi, f est strictement croissante sur $]0;e]$ et strictement décroissante sur $[e;+\infty[$ donc $\underset{\mathbb{R}_+^*}{\mathrm{Max}}(f) = f(e) = \dfrac{1}{e}$. Le graphe de f admet une asymptote "verticale" d'équation $x = 0$ en 0^+ et une asymptote "horizontale" d'équation $y = 0$ en $+\infty$. f est négative sur $]0;1]$ et strictement positive sur $]1;+\infty[$. Ainsi, f réalise une bijection strictement croissante entre $]1;e[$ et $\Big]0;\dfrac{1}{e}\Big[$ et une bijection strictement décroissante entre $]e;+\infty[$ et $\Big]0;\dfrac{1}{e}\Big[$.

b. Analyse : supposons que $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ vérifie $a < b$ et $a^b = b^a$, alors $b\ln(a) = a\ln(b)$ donc $f(a) = f(b)$. Ceci impose, d'après l'étude précédente, que $a \in]1;e[$, $b \in]e;+\infty[$ avec $f(a) = f(b) \in \Big]0;\dfrac{1}{e}\Big[$. Le seul entier dans $]1;e[$ étant 2, on a donc $a = 2$. Comme f réalise une bijection entre $]e;+\infty[$ et $\Big]0;\dfrac{1}{e}\Big[$, il existe un seul réel $x \in]e;+\infty[$ tel que $f(x) = f(2)$. Comme $f(4) = \dfrac{\ln(4)}{4} = \dfrac{\ln(2^2)}{4} = \dfrac{2\ln(2)}{4} = \dfrac{\ln(2)}{2} = f(2)$, on a $x = b = 4$.
Synthèse : bien sûr $(2,4) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $2 < 4$ et $2^4 = 4^2 = 16$.
Ainsi, le seul couple vérifiant $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $a < b$ et $a^b = b^a$ est $(a,b) = (2,4)$.

15.2 Courbes du plan en coordonnées cartésiennes

15.4 **a.** Les fonctions x et y sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$. Pour $t \neq 0$ et après calculs, on a $x'(t) = \dfrac{1}{t^3}(1+t)(2-t+t^2)$ et $y'(t) = -\dfrac{1}{t^2} - 1$. Les limites aux bornes sont $\lim\limits_{t\to-\infty} x(t) = +\infty$, $\lim\limits_{t\to0-} x(t) = +\infty$, $\lim\limits_{t\to0+} x(t) = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = -\infty$, puis $\lim\limits_{t\to-\infty} y(t) = +\infty$, $\lim\limits_{t\to0-} y(t) = -\infty$, $\lim\limits_{t\to0+} y(t) = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = -\infty$.
La fonction x est décroissante sur $]-\infty\,;-1]$, puis croissante sur $[-1\,;0[$, à nouveau décroissante sur $]0\,;+\infty[$.
La fonction y est décroissante sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$.
On a aussi $\lim\limits_{t\to\pm\infty} \big(y(t) - x(t)\big) = \lim\limits_{t\to\pm\infty} \Big(-\dfrac{1}{t^2}\Big) = 0-$ donc la droite $\Delta\ :\ y = x$ est asymptote à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ est toujours en dessous de Δ. De plus, $y^2(t) - x(t) + 3y(t) + 3 = -t^2$ donc la parabole $\mathcal{P}\ : y^2 + 3y + 3 - x = 0$ ou encore $\mathcal{P}\ :\ \Big(y + \dfrac{3}{2}\Big)^2 = 2 \times \dfrac{1}{2} \times \Big(x - \dfrac{3}{4}\Big)$ est asymptote à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ est toujours "à l'extérieur" de $\mathcal{P}$.

b. Cherchons $t_1 \neq t_2$ tels que $x(t_1) = x(t_2)$ et $y(t_1) = y(t_2)$. En réduisant au même dénominateur et en multipliant par les dénominateurs, on en déduit le système suivant :

$$\begin{aligned} (1 + t_1 - t_1^3)t_2^2 = (1 + t_2 - t_2^3)t_1^2 &\iff (t_2 - t_1)(t_1 + t_2 + t_1t_2 + t_1^2t_2^2) = 0 \\ t_2(1 - t_1^2) = t_1(1 - t_2^2) &\iff (t_2 - t_1)(1 + t_1t_2) = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $(t_2 \neq t_1,\ x(t_1) = x(t_2),\ y(t_1) = y(t_2)) \iff (t_1 \neq t_2,\ t_1t_2 = -1,\ t_1 + t_2 = 0)$. Ainsi, il existe un unique couple (t_1, t_2) (en imposant $t_1 < t_2$) qui vérifie ces conditions et il est constitué des racines de

$X^2 - 0.X - 1 = (X+1)(X-1)$ donc $t_1 = -1$ et $t_2 = 1$. Il existe donc un unique point double de $\mathcal{C}$ et il s'agit de $M(-1) = M(1) = (0, -1)$.

15.5 **a.** Les fonctions x et y sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. On a $x'(t) = 12t^2$, $y'(t) = 12t^3$ donc en notant $f : t \mapsto (x(t), y(t))$ la fonction qui donne la trajectoire de la courbe Γ, on a $\overrightarrow{f}'(t) = 12t^2(1, t)$.
Le seul point stationnaire (là où la dérivée s'annule, donc la vitesse est nulle) est l'origine (pour $t = 0$), $\overrightarrow{f}''(0) = (0, 0)$ et $\overrightarrow{f}'''(0) = (x'''(0), y'''(0)) = (24, 0)$ donc la demi-tangente en O est l'axe des abscisses ((Ox)).
Si $t \neq 0$, la tangente T_t à la courbe en $M(t) = (x(t), y(t))$ a pour équation $(x - x(t))y'(t) - (y - y(t))x'(t) = 0$ car un point $M = (x, y)$ du plan appartient à cette tangente si et seulement si $(\overrightarrow{M(t)M}, \overrightarrow{f}'(t))$ est liée, si et seulement si $\det(\overrightarrow{M(t)M}, \overrightarrow{f}'(t)) = \begin{vmatrix} x - x(t) & x'(t) \\ y - y(t) & y'(t) \end{vmatrix} = 0$. Ainsi, la tangente T_t en $M(t) \in \Gamma$ a pour équation $12t^3(x - 4t^3) - 12t^2(y - 3t^4) = 0$ ce qui donne, en divisant par $12t^2 > 0$, $T_t \ : \ tx - y = t^4$.
b. Un point $M(x, y)$ appartient à l'orthoptique $\mathcal{L}$ si et seulement s'il existe $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $M \in T_{t_1} \cap T_{t_2}$ et $T_{t_1} \perp T_{t_2}$. Un vecteur directeur de T_t est $v_t = (1, t)$ donc $T_{t_1} \perp T_{t_2} \iff (v_{t_1} | v_{t_2}) = 0 \iff 1 + t_1 t_2 = 0$.
Ainsi $M \in \mathcal{L} \iff \exists t \neq 0,\ M \in T_t \perp T_{-1/t}$. On résout donc le système $tx - y - t^4 = -\frac{x}{t} - y - \frac{1}{t^4} = 0$ et cela donne $x = t^3 - t + \frac{1}{t} - \frac{1}{t^3} = x_1(t)$ et $y = -t^2 + 1 - \frac{1}{t^2} = y_1(t)$.

Réciproquement, si un point M a ces coordonnées $(x_1(t), y_1(t))$ pour $t \neq 0$, alors il appartient à $T_t \cap T_{-1/t}$ (en remontant les calculs) et on a donc $M \in \mathcal{L}$. Par conséquent, $\mathcal{L}$ est (par double inclusion) la courbe d'équation $\mathcal{L} \ : \ x = x_1(t) = t^3 - t + \frac{1}{t} - \frac{1}{t^3},\ y = y_1(t) = -t^2 + 1 - \frac{1}{t^2}$.

Les fonctions x_1 et y_1 sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$, x_1 est impaire et y_1 est paire donc on obtient toute la courbe en restreignant t dans $\mathbb{R}_+^*$ et en faisant ensuite une symétrie orthogonale par rapport à (Oy).
De plus $x_1\left(\frac{1}{t}\right) = -x_1(t)$ et $y_1\left(\frac{1}{t}\right) = y_1(t)$, ce qui permet de ne faire l'étude que pour $t \in]0; 1]$ et la partie de la courbe relative à $t \in [1; +\infty[$ s'obtiendra (à nouveau) par la réflexion de droite (Oy).
On calcule : $\forall t \in]0; 1],\ x_1'(t) = \dfrac{(1 + t^2)(3t^4 - 4t^2 + 3)}{t^4} > 0$ et $y_1'(t) = \dfrac{2(1 - t^4)}{t^3} > 0$. Or $\lim\limits_{t \to 0^+} x_1(t) = -\infty$, $x_1(1) = 0$, $\lim\limits_{t \to 0^+} y_1(t) = -\infty$, $y_1(1) = -1$. De plus $x_1'(1) = 4$ et $y_1'(1) = 0$ donc on arrive horizontalement en $(-1, 0)$ (logique avec la symétrie par rapport à (Oy). Comme $\lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{y_1(t)}{x_1(t)} = -\infty$ puisque $\dfrac{y_1(t)}{x_1(t)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{-1/t^2}{1/t} \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{t}$, on a une branche parabolique de direction (Oy) quand $t \to 0^+$; ce qui donne par symétrie par rapport à (Oy) une branche parabolique de direction (Ox) quand $t \to +\infty$.

15.6 x et y sont définies sur $\mathbb{R}^*$ et $x'(t) = 2 - \frac{2a}{t^3}$ et $y'(t) = 2t - \frac{2b}{t^2}$. Comme un point de rebroussement vérifie p pair, $p > 1$ donc le point est stationnaire. Ainsi : $a \neq 0$, $b \neq 0$, $t = \sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{b}$ donc $a = b \neq 0$.
Réciproquement, si $a = b \neq 0$ et $t = t_0 = \sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{b}$, on a bien $x'(t_0) = y'(t_0) = 0$ en reportant.
Alors $x''(t_0) = \frac{6a}{t_0^4}$, $x'''(t_0) = -\frac{24a}{t_0^5}$, $y''(t_0) = 2 + \frac{4a}{t_0^3}$ et $y'''(t_0) = -\frac{12a}{t_0^4}$. $\mathrm{Det}(\overrightarrow{f}''(t_0), \overrightarrow{f}'''(t_0))$ vaut :

$x''(t_0)y'''(t_0) - x'''(t_0)y''(t_0) = \left(\frac{6a}{t_0^4}\right)\left(-\frac{18a}{t_0^4}\right) - \left(2 + \frac{6a}{t_0^3}\right)\left(-\frac{24a}{t_0^5}\right) = \frac{72a^2}{t_0^8} \neq 0$ donc on a $p = 2$ et $q = 3$ et le point $M_0 = \left(2t_0 + \frac{a}{t_0^2}, t_0^2 + \frac{2b}{t_0}\right)$ est un point de rebroussement de première espèce.

La condition nécessaire et suffisante cherchée est donc $a = b \neq 0$.

Le point M_0 a aussi pour coordonnées, comme $t_0 = \sqrt[3]{a}$: $M_0 = \left(3\sqrt[3]{a}, 3\left(\sqrt[3]{a}\right)^2\right)$.

Les points de rebroussement décrivent donc la parabole d'équation $3y = x^2$ privée de l'origine.

15.7 Comme $\forall t \in \mathbb{R}$, $s'^2(t) = ||\overrightarrow{f}'(t)||^2 = 9\sin^2 t\cos^2 t$ car $\overrightarrow{f}'(t) = 3\sin t\cos t\big(-\cos t, \sin t\big)$, les points stationnaires sont associés aux instants $t \equiv 0\ \left[\frac{\pi}{2}\right]$. Si $t_0 \not\equiv 0\ \left[\frac{\pi}{2}\right]$, la tangente à l'astroïde en M_{t_0} est d'équation cartésienne $\mathrm{Det}(M_{t_0}M, \overrightarrow{f}'(t_0)) = 0 \iff y'(t_0)(x - x(t_0)) - x'(t_0)(y - y(t_0)) = 0$ ou encore $3\sin(t_0)\cos(t_0)\Big(\sin(t_0)(x - \cos^3(t_0)) + \cos(t_0)(y - \sin^3(t_0))\Big) = 0$. Le point $A(a, 0)$ vérifie donc la relation $\sin(t_0)(x - \cos^3(t_0)) - \cos(t_0)\sin^3(t_0) = 0$ donc $a = \cos^3(t_0) + \cos(t_0)\sin^2(t_0) = \cos(t_0)$ et le point $B(0, b)$ est tel que $-\sin(t_0)\cos^3(t_0) + \cos(t_0)(b - \sin^3(t_0)) = 0$ donc $b = \sin^3(t_0) + \sin(t_0)\cos^2(t_0) = \sin(t_0)$.
Par conséquent, $AB^2 = \cos^2(t_0) + \sin^2(t_0) = 1$ est constant.

15.8 On trace la courbe grâce à la décomposition $x = \dfrac{1}{t-1} + \dfrac{1}{t+1}$ et $y = 1 + \dfrac{1}{2(t-1)} - \dfrac{1}{2(t+1)}$, au tableau de variations et à la symétrie de la courbe par rapport à (Oy) car x est impaire et y est paire. $\lim\limits_{t\to 1}(y - \frac{x}{2}) = \frac{1}{2}$ donc la droite $y = \dfrac{x+1}{2}$ est asymptote à la courbe ; ainsi que $y = \dfrac{1-x}{2}$ par symétrie. Après avoir tracé la courbe, on la reconnaît et après calculs, on trouve $\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{1}{4}$ (c'est une hyperbole).

15.9 x, y sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$, $\lim\limits_{t\to 0^-} x(t) = \lim\limits_{t\to 0^-} y(t) = 0$ donc on a un point limite $(0, 0)$ quand $t \to 0^-$ qu'on atteint selon la droite $y = -x$ car $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{y(t)}{x(t)} = -1$. De plus $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{y(t)}{x(t)} = 1$. De plus, $\lim\limits_{t\to+\infty}(y(t) - x(t)) = -4$ donc la droite $y = x - 4$ est asymptote à la courbe. Quand t tend vers 0^+, $\lim\limits_{t\to 0^+} x(t) = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to 0^+} y(t) = -\infty$. On a $\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{y(t)}{x(t)} = -1$ mais $\lim\limits_{t\to 0^+}(y(t) + x(t)) = +\infty$ donc il y a juste une branche infinie de direction $y = -x$ mais pas d'asymptote.
Pas de point double, il suffit de tracer la courbe avec le tableau de variations.

15.10 Il y a un point de rebroussement de première espèce en $(0, 0)$ pour $t = 0$ ($p = 2$ et $q = 3$) et la courbe n'est pas trop dure à tracer. La tangente à Γ en un point $M(t)$ est d'équation $6t(y - 2t^3) - 6t^2(x - 3t^2) = 0$ ou encore $y = tx - t^3$ et la normale a pour équation : $6t^2(y - 2t^3) + 6t(x - 3t^2) = 0 \iff ty + x = 2t^4 + 3t^2$. Une droite est à la fois tangente et normale à la courbe si elle admet pour équation $y = tx - t^3$ et $t'y + x = 2t'^4 + 3t'^2$ pour deux paramètres t et t' non nuls. Comme deux équations d'une même droite sont proportionnelles, on a donc à résoudre le système : $\dfrac{t'}{1} = -\dfrac{1}{t} = \dfrac{2t'^4 + 3t'^2}{-t^3}$ donc $t^6 - 3t^2 - 2 = 0 = (t^2 - 2)(t^2 + 1)^2 \iff t = \pm\sqrt{2}$.
Deux droites sont à la fois tangente et normale à la courbe : $y = \sqrt{2}(x - 2)$ et $y = -\sqrt{2}(x - 2)$.

15.11 On trace la courbe grâce à la décomposition $x = \dfrac{1}{2(t-1)} + \dfrac{1}{2(t+1)}$ et $y = t + 1 + \dfrac{1}{t-1}$, au tableau de variations : on a une asymptote "verticale" $x = 0$ quand $t \to \pm\infty$ et une asymptote "horizontale" $y = -\frac{1}{2}$ quand $t \to -1$ et une asymptote oblique $y = 2x + \frac{3}{2}$. En cherchant les points multiples, on écrit $x(t_1) = x(t_2)$ et $y(t_1) = y(t_2)$ avec $t_1 \neq t_2$ et en réduisant tout au même dénominateur et en factorisant par $t_2 - t_1 \neq 0$ on obtient, en posant $p = t_1t_2$ et $s = t_1 + t_2$: $p + 1 = -p + s = 0$ donc t_1 et t_2 sont les solutions de $z^2 + z - 1 = 0$ donc $t_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $t_2 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$. On trouve $x(t_1) = \dfrac{t_1}{1 - t_1 - 1} = -1$ et $y(t_1) = \dfrac{1 - t_1}{t_1 - 1} = -1$ car $t_1^2 = 1 - t_1$.
On calcule $\overrightarrow{f}'(t1).\overrightarrow{f}'(t_2) = x'(t_1)x'(t_2) + y'(t_1)y'(t_2) = \left(\dfrac{-t_1^2 - 1}{(t_1^2 - 1)^2}\right)\left(\dfrac{-t_2^2 - 1}{(t_2^2 - 1)^2}\right) + \left(\dfrac{t_1^2 - 2t_1}{(t_1 - 1)^2}\right)\left(\dfrac{t_2^2 - 2t_2}{(t_2 - 1)^2}\right)$.
D'où $\overrightarrow{f}'(t1).\overrightarrow{f}'(t_2) = \left(\dfrac{t_1 - 2}{t_1^2}\right)\left(\dfrac{t_2 - 2}{t_2^2}\right) + \left(\dfrac{1 - 3t_1}{t_1^4}\right)\left(\dfrac{1 - 3t_2}{t_2^4}\right) = \dfrac{t_1^2t_2^2(t_1 - 2)(t_2 - 2) + (1 - 3t_1)(1 - 3t_2)}{t_1^4t_2^4}$

donc $\overrightarrow{f}'(t1).\overrightarrow{f}'(t_2) = \dfrac{p^3 - 2sp^2 + 4p^2 + 1 - 3s + 9p}{t_1^4 t_2^4} = \dfrac{-1 + 2 + 4 + 1 + 3 - 9}{t_1^4 t_2^4} = 0$ et l'orthogonalité voulue.

15.12 En posant $f(t) = \Big(\dfrac{t^2}{2} + t, \dfrac{t^3}{3} + \dfrac{t^2}{2}\Big)$, on a f de classe C^∞ et $f'(t) = (t+1, t(t+1))$ donc pour $t = -1$ on a un point de rebroussement de première espèce car $f''(-1) = (1, -1)$ et $f'''(-1) = (0, 2)$. Il y a deux branches paraboliques de direction (Oy) quand t tend vers $\pm\infty$. La tangente en un point de paramètre t est $T_t \ : \ tx - y = \dfrac{t^3}{6} + \dfrac{t^2}{2}$. Soit $M(x, y)$ un point de $\mathcal{O}$ donc appartenant à T_{t_1} et T_{t_2} avec $t_1 \neq t_2$; l'orthogonalité donne $t_1 t_2 = -1$ et on résout le système $t_1 x - y = \dfrac{t_1^3}{6} + \dfrac{t_1^2}{2}$, $t_2 x - y = \dfrac{t_2^3}{6} + \dfrac{t_2^2}{2}$ ce qui donne $x = \dfrac{s^2 + 3s + 1}{6}$, $y = \dfrac{-s - 3}{6}$ avec $s = t_1 + t_2$. Ainsi : $t_1 + t_2 = -6y - 3$ et $x = 6y^2 + 3y + \dfrac{1}{6} \Longleftrightarrow X^2 = 6Y^2$ si $X = x + \dfrac{5}{24}$ et $Y = y + \dfrac{1}{4}$ donc $\mathcal{O}$ est inclus dans la parabole d'axe (Sx) avec $S = \Big(-\dfrac{5}{24}, -\dfrac{1}{4}\Big)$: elle est de paramètre $p = \dfrac{1}{12}$. Réciproquement, si $M(x, y)$ appartient à cette parabole, il existe $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $t_1 t_2 = -1$ et $t_1 + t_2 = -(6y + 3)$ car le polynôme $X^2 + (6y + 3)X - 1$ possède deux racines réelles (son discriminant vaut $\Delta = 9(2y + 1)^2 + 4 > 0$) et on remonte les calculs.

15.3 Courbes de l'espace

15.13 On calcule les dérivées de x, y et z pour avoir : $M(t)$ régulier si et seulement si $t \not\equiv \pi\ [2\pi]$. Dans ce cas, on trouve $\overrightarrow{T} = \Big(-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \sin\Big(\dfrac{3t}{2}\Big), \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cos\Big(\dfrac{3t}{2}\Big), \dfrac{1}{\sqrt{2}}\Big)$ car $\overrightarrow{f}'(t) = 2\sqrt{2} \cos\Big(\dfrac{t}{2}\Big)\overrightarrow{T}$. Comme le paramétrage est 4π-périodique, la longueur de la courbe est $L = \displaystyle\int_0^{4\pi} s'(t)dt = \int_0^{4\pi} 2\sqrt{2}\Big|\cos\Big(\dfrac{t}{2}\Big)\Big|dt = 16\sqrt{2}$.

15.14 M_1, M_2, M_3, M_4 coplanaires si et seulement s'il existe $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ tels que le plan P d'équation $ax + by + cz - d = 0$ passe par ces points, ce qui équivaut à : t_1, t_2, t_3, t_4 sont les racines (distinctes) du polynôme $aX^4 + bX^3 + cX^2 - d(1 + X^2)$.
Si un tel polynôme existe, par les relations coefficients-racines, comme il n'y a pas de terme en X, on obtient la relation $t_1t_2t_3 + t_1t_2t_4 + t_1t_3t_4 + t_2t_3t_4 = 0$.
Réciproquement, si cette condition est réalisée, le polynôme $(X - t_1)(X - t_2)(X - t_3)(X - t_4)$ fait l'affaire.
En conclusion, M_1, M_2, M_3, M_4 sont coplanaires si et seulement si $t_1t_2t_3 + t_1t_2t_4 + t_1t_3t_4 + t_2t_3t_4 = 0$ ou encore si et seulement si $\dfrac{1}{t_1} + \dfrac{1}{t_2} + \dfrac{1}{t_3} + \dfrac{1}{t_4} = 0$ si aucun des t_i n'est nul.

15.4 Longueur de courbes

15.15 **a.** Comme $x_n\Big(\dfrac{\pi}{2} - t\Big) = y_n(t)$ et $y_n\Big(\dfrac{\pi}{2} - t\Big) = x_n(t)$, la courbe Γ_n est symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$ et on peut ne l'étudier que pour $t \in \Big[0; \dfrac{\pi}{4}\Big]$.

Γ_1 est un quart de cercle de $(1, 0)$ à $(0, 1)$ donc $L_1 = \dfrac{\pi}{2}$. Γ_2 est le segment de $(1, 0)$ à $(0, 1)$ donc $L_2 = \sqrt{2}$.

b. Pour $n \geqslant 3$, d'après le cours : $L_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x_n'(t)^2 + y_n'(t)^2}dt$ et comme $x_n'(t) = -n \sin(t) \cos^{n-1}(t)$ et $y_n'(t) = n \cos(t) \sin^{n-1}(t)$ on obtient $L_n = n \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\cos(t)\sqrt{\cos^{2n-4}(t) + \sin^{2n-4}(t)}dt$.

Γ_3 est un quart d'astroïde et $L_3 = \dfrac{3}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t)dt = \dfrac{3}{2}\Big[-\dfrac{\cos(2t)}{2}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{3}{2}$.

c. On obtient, en élevant au carré : $\sqrt{a^2+b^2} \leqslant |a|+|b|$. Ainsi, comme $x_n' \leqslant 0$ et $y_n' \geqslant 0$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $L_n \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(-x_n'(t)+y_n'(t)\big)dt = x_n(0) - x_n\left(\frac{\pi}{2}\right) + y_n\left(\frac{\pi}{2}\right) - y_n(0) = 2$. De plus, comme le chemin le plus court est la ligne droite : $L_n \geqslant I_nA + I_nB$ si $A=(1,0)$ et $B=(0,1)$ car le plus court chemin est la ligne droite et $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = (0,0)$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} = (I_nB+I_nA) = 2$ et par le théorème d'encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty} L_n = 2$.

15.16 **a.** Les domaines de définition de x et de y valent $\mathbb{R}$ donc la courbe est définie pour $t \in \mathbb{R}$.

- x et y sont 2π-périodiques : on n'étudie la courbe que pour $t \in [-\pi;\pi]$ et on repassera une infinité de fois en chaque point sans pour autant les appeler des points multiples.
- x et y sont impaires : on n'étudie la courbe que pour $t \in [0;\pi]$ et on effectuera ensuite une symétrie centrale de centre O pour avoir toute la courbe .
- $\forall t \in [0;\pi],\ x(\pi-t) = x(t)$ et $y(\pi-t) = -y(t)$: on n'étudie la courbe que pour $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et on effectuera une symétrie orthogonale par rapport à (Ox) pour avoir toute la courbe.

Comme $x'(t) = 8\cos(t)$ et $y'(t) = 2\sqrt{2}\cos(2t)$, le tableau de variations pour $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ est très simple, x est croissante de 0 à 8 sur cet intervalle, y croît de 0 à $\sqrt{2}$ sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ et décroît de $\sqrt{2}$ à 0 sur $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$. Cette courbe est une sorte de nœud-papillon très aplati qui possède (Ox) et (Oy) comme axes de symétrie et dont un quart (pour $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$) va de $(0,0)$ à $(8,0)$.

b. Sa longueur L vaut, d'après les deux symétries, $L = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt$. Or $x'(t)^2+y'(t)^2$ vaut aussi $64\cos^2(t) + 8\cos^2(2t) = 64\cos^2(t) + 8(2\cos^2(t)-1)^2 = 32\cos^4(t) + 32\cos^2(t) + 8 = 8(2\cos^2(t)+1)^2$.
Ainsi $L = 8\sqrt{2}\int_0^{\pi/2}(2\cos^2(t)+1)dt = 8\sqrt{2}\int_0^{\pi/2}(\cos(2t)+2)dt = \left[\frac{\sin(2t)}{2}+2t\right]_0^{\pi/2} = 8\pi\sqrt{2} \sim 35,54$.

15.17 **a.** L'ensemble de définition est $D = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}]2k\pi; 2k\pi+\pi[$. Les fonctions x et y sont π-périodiques donc on étudie la courbe pour $t \in]0;\pi[$. De plus $x(\pi-t) = x(t)$ et $y(\pi-t) = -y(t)$ donc on n'étudie que sur $I = \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$ et on effectuera ensuite une symétrie orthogonale par rapport à l'axe (Ox) pour avoir toute la courbe.
$\forall t \in I,\ x'(t) = -\sin(2t) + \dfrac{\cos(t)}{\sin(t)} = -2\sin(t)\cos(t) + \dfrac{\cos(t)}{\sin(t)} = \cos(t) \times \dfrac{1-2\sin^2(t)}{\sin(t)} = \dfrac{\cos(t)\cos(2t)}{\sin(t)}$ et $y'(t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = \cos(2t)$. Le tableau de variations en découle : x croît de $-\infty$ à $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln(2)$ sur $\left]0; \frac{\pi}{4}\right]$ et décroît de $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln(2)$ à 0 sur $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right[$; y croît de 0 à $\frac{1}{2}$ sur $\left]0; \frac{\pi}{4}\right]$ et décroît de $\frac{1}{2}$ à 0 sur $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right[$.
Le point $S = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln(2), \frac{1}{2}\right)$ est donc un point stationnaire. Comme on a $x''(t) = -2\cos(2t) - \dfrac{1}{\sin^2(t)}$, $x'''(t) = 4\sin(2t) + \dfrac{2\cos(t)}{\sin^3(t)}$, $y''(t) = -2\sin(2t)$, $y'''(t) = -4\cos(2t)$, il vient $\overrightarrow{f''}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \big(-2,-2\big)$ et $\overrightarrow{f'''}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \big(8,0\big)$ donc $p=2$ et $q=3$: c'est un point de rebroussement de première espèce.

b. Par symétrie, les points de rebroussement sont obtenus pour $t_1 = \frac{\pi}{4}$ et $t_2 = \frac{3\pi}{4}$. Ainsi, la longueur cherchée est $L = 2\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt$. Or $x'(t)^2+y'(t)^2 = \dfrac{\cos^2(t)\cos^2(2t)}{\sin^2(t)} + \cos^2(2t) = \dfrac{\cos^2(2t)}{\sin^2(t)}$ donc $L = -2\int_{\pi/4}^{\pi/2} \dfrac{\cos(2t)}{\sin(t)}dt = 2\int_{\pi/4}^{\pi/2} \dfrac{2\cos^2(t)-1}{1-\cos^2(t)}(-\sin(t))dt$ et, avec le changement de variable $u = \cos(t)$

correctement justifié : $L = 2\int_{1/\sqrt{2}}^{0} \frac{2u^2-1}{1-u^2}du = 2\int_0^{1/\sqrt{2}} \Big(2 - \frac{1}{2(1-u)} - \frac{1}{2(1+u)}\Big)du$. On peut maintenant intégrer à vue : $L = \Big[4u + \ln(1-u) - \ln(1+u)\Big]_0^{1/\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} + \ln(2) - 2\ln(2+\sqrt{2}) \sim 1,06$.

On aurait pu aussi écrire $L = -2\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1-2\sin^2(t)}{\sin(t)}dt = 4\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin(t)dt - \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dt}{\sin(t)}$ ce qui donne le même résultat $L = \Big[-4\cos(t) - 2\ln\Big(\tan(t/2)\Big)\Big]_{\pi/4}^{\pi/2} = 2\sqrt{2} + 2\ln(\sqrt{2}-1)$ car $\tan(\pi/8) = \sqrt{2}-1$.

15.18 On calcule les dérivées $x'(t) = 6t(t+1)$ et $y'(t) = 6(t+1)$ donc le point de rebroussement de première espèce ($p = 2$ et $q = 3$) est obtenu pour $t = -1$ en $A(1, -3)$. Ensuite, la longueur de l'arc (AO) est $L = 6\int_{-1}^{0} \sqrt{t^2(t+1)^2 + (t+1)^2}dt = 6\int_{-1}^{0}(t+1)\sqrt{1+t^2}dt = 2 - \sqrt{2} + 3\ln(1+\sqrt{2})$ après le changement de variable $t = \operatorname{sh} u$ (car $\operatorname{Argsh}(t) = \ln(t + \sqrt{1+t^2})$).

15.19 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \Longrightarrow 2\sqrt{xy} = 1 - x - y \Longrightarrow (x-y)^2 = 2(x+y) - 1$. La courbe est un arc de parabole d'axe la première bissectrice et tangent aux axes en $(1,0)$ et en $(0,1)$ (on peut pour s'en convaincre exprimer les points dans le repère $\Big(O, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}\Big)$ avec $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$).

En posant $x - y = \operatorname{sh} t$, on obtient $2(x+y) = \operatorname{ch}^2 t$ donc $x = \frac{1}{2}\operatorname{ch}^2 t + \frac{1}{4}\operatorname{sh} t$, $y = \frac{1}{2}\operatorname{ch}^2 t - \frac{1}{4}\operatorname{sh} t$ et $\sqrt{x'^2 + y'^2} = \frac{\operatorname{ch}^2 t}{\sqrt{2}}$. Ainsi : $L = \int_{-\operatorname{Argsh} 1}^{\operatorname{Argsh} 1} \frac{\operatorname{ch}^2 t dt}{\sqrt{2}} = \frac{\ln(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}} + 1$.

15.5 Exercices aux oraux des étudiants de PSI1

15.20 **a.** Si $f : I \to \mathbb{C}$ est de classe C^{n+1} sur l'intervalle I, alors pour tout $(a,b) \in I^2$, on a la formule de TAYLOR reste intégral donnée par $f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{1}{n!}\int_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$. C'est un grand classique, on effectue une récurrence en initialisant à $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt$ si f est de classe C^1 sur I. Ensuite, si $f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k = \frac{1}{n!}\int_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$ avec f de classe C^{n+2} sur I (donc sur $\widetilde{[a;b]}$), on effectue une intégration par parties avec $u(t) = f^{(n+1)}(t)$ et $v(t) = -\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)}$, u et v sont de classe C^1 sur $\widetilde{[a;b]}$ d'où $f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k = \Big[-\frac{(b-t)^{n+1}f^{(n+1)}(t)}{(n+1).n!}\Big]_a^b - \frac{-1}{(n+1).n!}\int_a^b (b-t)^{n+1}f^{(n+2)}(t)dt$. Alors $f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k - \frac{(b-a)^{n+1}f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} = f(b) - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k = \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+2)}(t)dt$.

Par principe de récurrence, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, si $f : I \to \mathbb{C}$ est de classe C^{n+1} sur I, pour tout $(a,b) \in I^2$, on a $f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{1}{n!}\int_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$.

b. Si $x \in I$, on a $f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$. Si $f^{(n+1)}$ est bornée sur I, on a donc $\Big|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\Big| \leqslant \frac{||f^{(n+1)}||_\infty}{n!}\Big|\int_a^x |x-t|^n dt\Big| = \frac{||f^{(n+1)}||_\infty}{n!}\Big|\int_a^x (x-t)^n dt\Big| = \frac{||f^{(n+1)}||_\infty |x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$ car $|x-t|^n$ garde un signe constant sur l'intervalle $\widetilde{[a;x]}$ et que $\int_a^x (x-t)^n dt = \Big[-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\Big]_a^x = \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$.

c. En appliquant l'inégalité précédente pour $h > 0$ et $x \in \mathbb{R}$: $|f(x+h) - f(x) - hf'(x)| \leqslant \frac{||f''||_\infty h^2}{2}$ à l'ordre

$n=1$ entre $x+h$ et x. Par inégalité triangulaire, comme $|hf'(x)|=|hf'(x)-f(x+h)+f(x)+f(x+h)-f(x)|$, on a $|hf'(x)|\leqslant|hf'(x)-f(x+h)+f(x)|+|f(x+h)|+|f(x)|\leqslant\dfrac{||f''||_\infty h^2}{2}+2||f||_\infty$ donc $|f'(x)|\leqslant\dfrac{||f''||_\infty h}{2}+2\dfrac{||f||_\infty}{h}$.

Par conséquent, f' est bornée sur $\mathbb{R}$ et $\forall h>0,\ ||f'||_\infty\leqslant\varphi(h)=\dfrac{||f''||_\infty h}{2}+2\dfrac{||f||_\infty}{h}$ donc $||f'||_\infty\leqslant\underset{\mathbb{R}_+^*}{\operatorname{Inf}}\,\varphi$.

- si $||f||_\infty=0$, alors $f=0$ donc $f'=0$ et $||f'||_\infty=0$.
- si $||f''||_\infty=0$, alors $f''=0$ donc f est affine et, pour que f soit bornée sur $\mathbb{R}$, il est nécessaire que f soit constante donc que $f'=0$ et on a encore $||f'||_\infty=0$.
- si $||f||_\infty>0$, $||f''||_\infty>0$, comme $\varphi'(h)=\dfrac{||f''||_\infty}{2}-2\dfrac{||f||_\infty}{h^2}$ donc φ est minimale en $h_0=2\sqrt{\dfrac{||f||_\infty}{||f''||_\infty}}$ et on a $\underset{\mathbb{R}_+^*}{\operatorname{Inf}}(\varphi)=\varphi(h_0)=2\sqrt{||f||_\infty||f''||_\infty}$.

On en déduit, et ceci dans tous les cas, que $||f'||_\infty\leqslant2\sqrt{||f||_\infty||f''||_\infty}$.

On peut faire mieux : si $h>0$ et $x\in\mathbb{R}$, avec **b.** entre $x+h$ et x d'une part, et entre $x-h$ et x d'autre part, on a $|f(x+h)-f(x)-hf'(x)|\leqslant\dfrac{||f''||_\infty h^2}{2}$ et $|f(x-h)-f(x)+hf'(x)|\leqslant\dfrac{||f''||_\infty h^2}{2}$. Comme $|2hf'(x)|=|hf'(x)-f(x+h)+f(x)+hf'(x)+f(x-h)-f(x)+f(x+h)-f(x-h)|$, par inégalité triangulaire, il vient $|hf'(x)|\leqslant|hf'(x)-f(x+h)+f(x)|+|hf'(x)+f(x-h)-f(x)|+|f(x+h)|+|f(x-h)|\leqslant||f''||_\infty h^2+2||f||_\infty$ donc $|f'(x)|\leqslant||f''||_\infty h+2\dfrac{||f||_\infty}{h}$. Par conséquent, f' est bornée sur $\mathbb{R}$ et $\forall h>0,\ ||f'||_\infty\leqslant\psi(h)=||f''||_\infty h+2\dfrac{||f||_\infty}{h}$ donc $||f'||_\infty\leqslant\underset{\mathbb{R}_+^*}{\operatorname{Inf}}\,\psi$. Comme avant, en étudiant ψ dans les trois cas, on trouve que $||f'||_\infty\leqslant\sqrt{2||f||_\infty||f''||_\infty}$.

d. On va construire g en trois étapes :

• Soit d'abord la fonction $f_1:[0;2b]\to\mathbb{R}$ telle que $f_1(x)=f(x)$ si $x\in[0;b]$ et $f_1(x)=f(2b-x)$ si $x\in[b;2b]$. On a la continuité de f_1 en b, donc sur tout $[0;2b]$ car $\lim\limits_{x\to b^+}f_1(x)=\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=f(b)=f_1(b)$. Par théorème de prolongement C^1 appliqué deux fois en b à f_1' et f_1'', la fonction f_1 est de classe C^2 sur $[0;2b]$ avec $f_1(b)=f(b)$, $f_1'(b)=0$ et $f_1''(b)=f''(b)$. Comme les valeurs de f_1, f_1', f_1'' sur $[b;2b]$ sont au signe près celles de f sur $[0;b]$ car $\forall x\in[b;2b]\ f_1(x)=f(2b-x)$, $f_1'(x)=-f'(2b-x)$ et $f_1''(x)=f''(2b-x)$, on a l'égalité des normes infinies : $\forall k\in\{0,1,2\},\ ||f_1^{(k)}||_{\infty,[0;2b]}=||f^{(k)}||_{\infty,[0;b]}$.

• Soit ensuite la fonction $f_2:[-2b;2b]\to\mathbb{R}$ telle que $f_2(x)=f_1(x)$ si $x\in[0;2b]$ et $f_2(x)=-f_1(-x)$ si $x\in[-2b;0]$. f_2 est continue en 0, donc sur tout $[-2b;2b]$ car $\lim\limits_{x\to0^-}f_2(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f_2(x)=f_1(0)=0=f_2(0)$. Par théorème de prolongement C^1 appliqué deux fois en 0 à f_2' et f_2'', la fonction f_2 est de classe C^2 sur $[-2b;2b]$ avec $f_2(0)=0$, $f_2'(0)=f'(0)$ et $f_2''(0)=0$. Comme les valeurs de f_2, f_2', f_2'' sur $[-2b;0]$ sont au signe près celles de f_1 sur $[0;2b]$ car $\forall x\in[-2b;0]\ f_2(x)=-f_1(-x)$, $f_2'(x)=f_1'(-x)$ et $f_2''(x)=-f_1''(-x)$, on a à nouveau des égalités de normes infinies : $\forall k\in\{0,1,2\},\ ||f_2^{(k)}||_{\infty,[-2b;2b]}=||f_1^{(k)}||_{\infty,[0;2b]}=||f^{(k)}||_{\infty,[0;b]}$.

• Soit enfin $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction $4b$-périodique égale à f_2 sur l'intervalle $[-2b;2b]$. On a continuité de g en $\pm2b$, donc sur tout $\mathbb{R}$ car $\lim\limits_{x\to\pm(2b)^-}g(x)=\lim\limits_{x\to\pm(2b)^+}g(x)=f_2(\pm2b)=f(2b)=0$. Par théorème de prolongement C^1 appliqué deux fois en $\pm2b$ à g' et g'', la fonction g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ (par $4b$-périodicité) avec $g(\pm2b)=0$, $g'(\pm2b)=-f'(0)$ et $g''(\pm2b)=0$. Comme les valeurs de g, g', g'' sur $\mathbb{R}$ sont exactement celles de f_2 sur $[-2b;2b]$ car $\forall x\in\mathbb{R}$, si $y\in[-2b;2b]$ est tel que $x\equiv y\ [4b]$, $g(x)=f_2(y)$, $g'(x)=f_2'(y)$ et $g''(x)=f_2''(y)$, on a $\forall k\in\{0,1,2\},\ ||g^{(k)}||_{\infty,\mathbb{R}}=||f_2^{(k)}||_{\infty,[-2b;2b]}=||f_1^{(k)}||_{\infty,[0;b]}=||f^{(k)}||_{\infty,[0;b]}$.

e. On a $0 < a < b$ car $\cot\text{an}(a) > 0$. f est continue en a car $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a) = \sin(a) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$. De plus, $\lim\limits_{x\to a^-} f'(x) = \cos(a) = \lim\limits_{x\to a^+} f'(x)$ et $\lim\limits_{x\to a^-} f''(x) = -\sin(a) = \lim\limits_{x\to a^+} f''(x)$ donc on conclut que f est de classe C^2 sur $[0;b]$ par le théorème de prolongement C^1 appliqué à f, f' au voisinage de a. Il est clair que $f(0) = \sin(0) = 0$, $f''(0) = -\sin(0) = 0$ et $f'(b) = \cos(a) - 2(b-a)\sin(a) = 0$ car $b = a + \dfrac{\cos(a)}{2\sin(a)}$.

15.21 **a.** Les points réguliers $M(t) = (x(t), y(t), z(t))$ de Γ sont ceux où $(x'(t), y'(t), z'(t)) \neq (0,0,0)$. Or, on a $x'(t) = \cos(t) + \cos^2(t) - \sin^2(t) = \cos(t) + \cos(2t)$; $y'(t) = -\sin(t) - 2\sin(t)\cos(t)$; $z'(t) = 2\cos\left(\dfrac{t}{2}\right)$. Ainsi, $x'(t) = 2\cos\left(\dfrac{t}{2}\right)\cos\left(\dfrac{3t}{2}\right)$, $y'(t) = -2\cos\left(\dfrac{t}{2}\right)\sin\left(\dfrac{3t}{2}\right)$ et $z'(t) = 2\cos\left(\dfrac{t}{2}\right)$. On peut donc factoriser $(x'(t), y'(t), z'(t)) = 2\cos\left(\dfrac{t}{2}\right)\left(\cos\left(\dfrac{3t}{2}\right), -\sin\left(\dfrac{3t}{2}\right), 1\right)$. Or le vecteur $\left(\cos\left(\dfrac{3t}{2}\right), -\sin\left(\dfrac{3t}{2}\right), 1\right)$ ne peut pas s'annuler donc les points réguliers de Γ sont ceux qui vérifient $\cos\left(\dfrac{t}{2}\right) \neq 0$ équivalent à $t \not\equiv \pi\ [2\pi]$.
On pouvait aussi dire que $(x'(t), y'(t), z'(t)) = (0,0,0) \iff x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2 = 0$ or, par un calcul direct, $x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2 = 2(\cos(t)\cos(2t) + \sin(t)\sin(2t)) + 2 + 4\cos^2\left(\dfrac{t}{2}\right) = 8\cos^2\left(\dfrac{t}{2}\right)$.
Si $t \not\equiv \pi\,[2\pi]$, la tangente à Γ en $M(t)$ a pour vecteur directeur $v(t) = \left(\cos\left(\dfrac{3t}{2}\right), -\sin\left(\dfrac{3t}{2}\right), 1\right)$ donc est paramétrée par $x = x(t) + \lambda\cos\left(\dfrac{3t}{2}\right)$, $y = y(t) - \lambda\sin\left(\dfrac{3t}{2}\right)$, $z = z(t) + \lambda$ (avec $\lambda \in \mathbb{R}$).
b. L'axe (Oz) et la tangente Γ en $M(t)$ ont pour vecteurs directeurs respectifs e_3 et $v(t)$ donc l'angle $\theta \in [-\pi;\pi]$ (non orienté) cherché vérifie $\cos(\theta) = \dfrac{(e_3|v(t))}{||e_3||\,||v(t)||} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ donc $\theta = \text{Arccos}(\cos(\theta)) = \dfrac{\pi}{4}$.
c. L'image de $\mathbb{R}$ par la fonction $t \mapsto z(t) = 4\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)$ est l'intervalle $[-4;4]$. L'image de Γ par la projection orthogonale sur (xOy) est une cardioïde puisque $r = \sqrt{x^2+y^2} = 1 + \cos(t)$ et $x = r(t)\sin(t)$, $y = r(t)\cos(t)$.
d. Comme $t \mapsto M(t)$ est 4π-périodique, que $M(-t) = (x(-t), y(-t), z(-t)) = (-x(t), y(t), -z(t))$ est l'image de $M(t)$ par le demi-tour d'axe (Oy), que $M(2\pi - t) = (x(2\pi-t), y(2\pi-t), z(2\pi-t)) = (-x(t), y(t), z(t))$ est l'image de $M(t)$ par la réflexion de plan (yOz), qu'un demi-tour et une réflexion sont 2 isométries de l'espace, $L = \displaystyle\int_{-\pi}^{3\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}dt = 2\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}dt = 4\int_0^{\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}dt$ est la longueur de la courbe Γ. Ainsi, $L = 8\sqrt{2}\displaystyle\int_0^{\pi} \cos\left(\frac{t}{2}\right)dt = 8\sqrt{2}\left[2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^{\pi} = 16\sqrt{2} \sim 22,63$.

15.22 Le domaine de définition est $\mathcal{D}_f =]-2;0[\cup]0;+\infty[$ (intersection des domaines de x et y). Les fonctions x et y sont dérivables sur $\mathcal{D}_f$ et on a $x'(t) = -\dfrac{1}{t^2} + \dfrac{1}{t+2} = \dfrac{(t+1)(t-2)}{t^2(t+2)}$, $y'(t) = 1 - \dfrac{1}{t^2} = \dfrac{(t-1)(t+1)}{t^2}$. Ainsi, x est croissante sur $]-2;1]$ et sur $[2;+\infty[$ et décroissante sur $[-1;0[$ et $]0;2]$ alors que y est croissante sur $]-2;-1]$ et $[2;+\infty[$ et décroissante sur $[-1;0[$ et sur $]0;1]$. On a une tangente verticale pour $t = 2$ au point $\left(\dfrac{1}{2} + \ln(4), \dfrac{3}{2}\right)$ et une tangente horizontale pour $t = 1$ au point $(1 + \ln(3), 2)$. Le point $(-1,-2)$ obtenu pour $t = -1$ est un point stationnaire et $\overrightarrow{f}''(t) = \left(\dfrac{2}{t^3} - \dfrac{1}{(t+2)^2}, \dfrac{2}{t^3}\right)$, $\overrightarrow{f}'''(t) = \left(-\dfrac{6}{t^4} + \dfrac{2}{(t+2)^3}, -\dfrac{6}{t^4}\right)$ donc $\overrightarrow{f}''(-1) = (-3,-2) \neq (0,0)$ donc $p = 2$ et $\overrightarrow{f}'''(-1) = (-4,-6)$ non colinéaire au précédent donc $q = 3$. On a donc en $(-1,-2)$ pour $t = -1$ un point de rebroussement de première espèce.
De plus, $\lim\limits_{t\to -2^+} x(t) = +\infty$ alors que $y(-2) = -\dfrac{5}{2}$ donc la droite $y = -\dfrac{5}{2}$ est asymptote verticale à la courbe.
Comme $\lim\limits_{t\to 0^-} x(t) = \lim\limits_{t\to 0^-} y(t) = -\infty$, que $\lim\limits_{t\to 0^-} \dfrac{y(t)}{x(t)} = 1$ et que $\lim\limits_{t\to 0^-} y(t) - x(t) = -\ln(2)$, la droite

$y = x - \ln(2)$ est asymptote oblique à la courbe quand $t \to 0^-$. Même chose lorsque $t \to 0^+$. Enfin, $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = +\infty$ mais $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{y(t)}{x(t)} = +\infty$: branche parabolique de direction (Oy) si $t \to +\infty$.

15.23 **a.** D'abord, puisque l'équation est linéaire, on vérifie que l'application ν_t est bien linéaire. En effet, soit $(Y_1, Y_2) \in (\mathbb{R}^n)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors en notant X_1 et X_2 les solutions respectives des deux problèmes de Cauchy ($X_1'(t) = A(t)X_1(t)$ avec $X_1(0) = Y_1$) et ($X_2'(t) = A(t)X_2(t)$ avec $X_2(0) = Y_2$), alors $X_1 + \lambda X_2$ est de classe C^1 par combinaison linéaire et on a

$$(X_1 + \lambda X_2)'(t) = X_1'(t) + \lambda X_2'(t) = A(t)X_1(t) + \lambda A(t)X_2(t) = A(t)(X_1(t) + \lambda X_2(t))$$

avec $(X_1 + \lambda X_2)(0) = X_1(0) + \lambda X_2(0) = Y_1 + \lambda Y_2$.
Ainsi, par définition, $\nu_t(Y_1 + \lambda Y_2) = (X_1 + \lambda X_2)(t) = X_1(t) + \lambda X_2(t) = \nu_t(Y_1) + \lambda \nu_t(Y_2)$ comme attendu.
Si $t \geqslant 0$, par définition $X(t) = \nu_t(Y) = \nu_t(X(0))$ (en vecteurs de $\mathbb{R}^n$). Ainsi, comme $R(t)$ est la matrice de ν_t dans la base canonique et que la colonne $X(0)$ représente les coordonnées du vecteur $X(0)$ dans la base canonique, on a $X(t) = R(t)X(0)$. (en vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$).
b. Pour $t = 0$, on a $\nu_0(Y) = X(0) = Y$ par construction donc ν_0 est l'identité de $\mathbb{R}^n$ d'où $R(0) = I_n$.
En prenant $X(0) = Y = E_j$ pour $j \in [\![1;n]\!]$, la solution C_j associée à ce choix de position initiale donne l'équation $C_j(t) = R(t)E_j$ qui est la j-ième colonne de $R(t)$. Comme C_j est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ d'après Cauchy-Lipschitz, la fonction matricielle R est elle aussi de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$. Pour $Y \in \mathbb{R}^n$ quelconque, avec $X(0) = Y$, on dérive la relation $\forall t \geqslant 0,\ X(t) = R(t)X(0)$, d'où $X'(t) = R'(t)Y = A(t)X(t) = A(t)R(t)Y$. Comme cette relation est vraie quel que soit le vecteur $Y \in \mathbb{R}^n$ choisi, en prenant successivement les vecteurs E_j de la base canonique, on obtient comme attendu $\forall t \geqslant 0,\ R'(t) = A(t)R(t)$.

c. Suivons l'énoncé en écrivant $W(t) = \det(L_1(t), \ldots, L_n(t))$ (notation). Les lignes (composées des cases) L_i sont de classe C^1 d'après la question précédente. On dérive $W(t) = \det(R(t))$ avec la formule du cours,

$$W'(t) = \sum_{i=1}^{n} \det(L_1(t), \cdots, L_{i-1}(t), L_i'(t), L_{i+1}(t)), \cdots, L_n(t))$$

en adaptant l'expression quand $i = 1$ ou $i = n$. Or $R'(t) = A(t)R(t)$ ce qui donne $L_i'(t) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}(t)L_j(t)$ donc, par multilinéarité et alternance du déterminant, on obtient

$$\begin{aligned}\det(L_1(t), \cdots, L_{i-1}(t), L_i'(t), L_{i+1}(t)), \cdots, L_n(t)) &= \det(L_1(t), \cdots, L_{i-1}(t), \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(t)L_j(t), \cdots, L_n(t)) \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(t)\det(L_1(t), \cdots, L_{i-1}(t), L_j(t), \cdots, L_n(t)) \\ &= a_{i,i}(t)\det(L_1(t), \cdots, L_{i-1}(t), L_i(t), \cdots, L_n(t))\end{aligned}$$

car seul le terme $j = i$ apporte une contribution éventuellement non nulle.
Ainsi, $W'(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,i}(t)\det(L_1(t), \cdots, L_{i-1}(t), L_i(t), \cdots, L_n(t)) = \Big(\sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,i}(t)\Big)W(t) = \mathrm{Tr}\ (A(t))W(t)$.
En notant H la primitive de $t \mapsto \mathrm{Tr}\ (A(t))$ sur $\mathbb{R}_+$ qui s'annule en 0, l'équation différentielle ci-dessus se résout, comme $W(0) = \det(I_n) = 1$, en $\forall t \geqslant 0,\ W(t) = e^{H(t)} \neq 0$ donc $R(t)$ est bien inversible.
d. Soit $Y \in \mathbb{R}^n$ et X la solution de (E) telle que $X(0) = Y$. Soit aussi X_1 la solution de (E) telle que $X_1(0) = X(1)$ et $X_2 : t \mapsto X(t+1)$. Les deux fonctions X_1 et X_2 sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$, vérifient

$X_1(0) = X(1) = X(0+1) = X_2(0)$. Puisque la fonction A est 1-périodique, X_2 est aussi solution de (E) car $\forall t \geqslant 0,\ X_2'(t) = X'(t+1) = A(t+1)X(t+1) = A(t)X_2(t)$. Ainsi, X_1 et X_2 sont des solutions du même problème de CAUCHY, ce qui nous permet de conclure que $X_1 = X_2$.

Par conséquent, $\forall t \geqslant 0,\ X_1(t) = R(t)X_1(0) = R(t)X(1) = R(t)R(1)Y = R(t+1)Y = R(t+1)X_2(0) = X_2(t)$. Comme $R(t)R(1)Y = R(t+1)Y$ pour tout vecteur $Y \in \mathbb{R}^n$, on a bien $R(t)R(1) = R(t+1)$.

e. • Supposons que $1 \in Sp(R(1))$, alors il existe un vecteur $Y \neq 0$ tel que $R(1)Y = Y$. Soit X la solution de (E) telle que $X(0) = Y$. D'après **a.** et **d.**, pour $t \geqslant 0$, on a $X(t+1) = R(t+1)Y = R(t)R(1)Y = R(t)Y = X(t)$ donc X est effectivement 1-périodique, de classe C^1 ar solution de (E) et non identiquement nulle car $X(0) = Y \neq 0$.

• Soit X une solution de (E) non identiquement nulle, de classe C^1 et 1-périodique, posons $Y = X(0)$. Si on avait $Y = 0$, alors $\forall t \geqslant 0,\ X(t) = R(t)Y = 0$ et X serait nulle : NON ! Ainsi $Y \neq 0$. Comme X est 1-périodique, on a $X(1) = R(1)X(0) = X(0)$ d'après **a.** donc $R(1)Y = Y$ et 1 est bien une valeur propre de $R(1)$ car $Y \neq 0$.

Par double implication, on a bien l'équivalence de l'énoncé.

f. Soit $t \geqslant 0$, par définition $Q(t+1) = R(t+1)P\Lambda(t+1)P^{-1}$. Or, d'après la question **d.** et l'énoncé, on a $R(t+1) = R(t)R(1) = R(t)PDP^{-1}$ et $\Lambda(t+1) = diag\left(\frac{1}{\lambda_1^{t+1}}, \ldots, \frac{1}{\lambda_n^{t+1}}\right) = D^{-1}\Lambda(t)$ par les propriétés de l'exponentielle. Comme $DP^{-1}PD^{-1} = I_n$, on a $Q(t+1) = R(t)PDP^{-1}PD^{-1}\Lambda(t)P^{-1} = R(t)P\Lambda(t)P^{-1} = Q(t)$ donc Q est bien 1-périodique.

g. On constate d'abord que Z est bien définie car Q est bien inversible puisque Λ l'est clairement et R d'après la question **c.**. De plus, ces fonctions matricielles étant de classe C^1, la fonction $t \mapsto Q(t)^{-1}$ l'est aussi (par exemple avec l'expression de l'inverse avec comatrice et déterminant). Ainsi, Z est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

On effectue d'abord quelques calculs. Il vient $\Lambda'(t) = -D_0\Lambda(t)$ car $(\lambda_1^{-t})' = -\ln(\lambda_1)\lambda_1^{-t}$. De plus, il vient

$$Q'(t) = R'(t)P\Lambda(t)P^{-1} + R(t)P\Lambda'(t)P^{-1} = A(t)R(t)P\Lambda(t)P^{-1} - R(t)PD_0\Lambda(t)P^{-1} = A(t)Q(t) - R(t)PD_0\Lambda(t)P^{-1}.$$

• Supposons maintenant que $X'(t) = A(t)X(t)$, c'est-à-dire que X est solution de (E). Les calculs sont similaires mais allons-y ! Comme $X(t) = Q(t)Z(t)$, on a $X'(t) = A(t)X(t) = Q'(t)Z(t) + Q(t)Z'(t)$ ce qui donne, avec les calculs précédents :

$$A(t)X(t) = \left[A(t)Q(t) - R(t)PD_0\Lambda(t)P^{-1}\right]Z(t) + Q(t)Z'(t).$$

Or $A(t)Q(t)Z(t) = A(t)X(t)$, donc après simplification, il reste

$$Q(t)Z'(t) = R(t)PD_0\Lambda(t)P^{-1}Z(t).$$

Mais comme $Q(t)^{-1} = P(\Lambda(t))^{-1}P^{-1}(R(t))^{-1}$, on obtient finalement, puisque $P^{-1}(R(t))^{-1}R(t)P = I_n$,

$$Z'(t) = P(\Lambda(t))^{-1}P^{-1}(R(t))^{-1}R(t)PD_0\Lambda(t)P^{-1}Z(t) = P(\Lambda(t))^{-1}D_0\Lambda(t)P^{-1}Z(t) = B(t)Z(t).$$

• Réciproquement, supposons que $Z'(t) = B(t)Z(t)$, alors, comme $X(t) = Q(t)Z(t)$, on a

$$\begin{aligned} X'(t) &= Q'(t)Z(t) + Q(t)Z'(t) \\ &= \left[A(t)Q(t) - R(t)PD_0\Lambda(t)P^{-1}\right]Z(t) + Q(t)B(t)Z(t) \\ &= A(t)X(t) + \left[Q(t)B(t) - R(t)PD_0\Lambda(t)P^{-1}\right]Z(t). \end{aligned}$$

Or $Q(t)B(t)-R(t)PD_0\Lambda(t)P^{-1}=R(t)P\big[\Lambda(t)P^{-1}P(\Lambda(t))^{-1}D_0\Lambda(t)P^{-1}-D_0\Lambda(t)P^{-1}\big]=0$ après simplification ce qui montre bien qu'on a $X'(t)=A(t)X(t)$, X est solution de (E) comme attendu.

Par double implication, on a : X est solution de $(E)\iff Z'(t)=B(t)Z(t)$.

15.24 **a.** La fonction $g_1:u\mapsto\dfrac{\cos(u)}{\sqrt{u}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $g_1(u)\underset{0}{\sim}\dfrac{1}{\sqrt{u}}$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^t g_1(u)du$ converge par comparaison aux intégrales de RIEMANN. Ainsi, f_1 est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, par CHASLES, on a $\forall t>0,\ f_1(t)=\displaystyle\int_0^1 g_1(u)du+\int_1^t g_1(u)du$ et $1\in\mathbb{R}_+^*$ donc, par le théorème fondamental de l'intégration, f_1 est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ car g_1 y est continue et on a $f_1'(t)=g_1(t)=\dfrac{\cos(t)}{\sqrt{t}}$.

b. Par intégration par parties, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}g_1(u)du$ a la même nature, puisque les fonction $a:u\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{u}}$ et $b=\sin$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\lim\limits_{u\to0^+}a(u)b(u)=\lim\limits_{u\to+\infty}a(u)b(u)=0$ car $\sin(u)\underset{0}{\sim}u$ et que $\sin$ est bornée, que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(u)}{2u^{3/2}}du$. Mais $\dfrac{\sin(u)}{2u^{3/2}}\underset{0}{\sim}\dfrac{1}{2\sqrt{u}}$ et $\dfrac{\sin(u)}{2u^{3/2}}\underset{+\infty}{\sim}O\Big(\dfrac{1}{u^{3/2}}\Big)$ donc la fonction $u\mapsto\dfrac{\sin(u)}{2u^{3/2}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ par comparaison aux intégrales de RIEMANN et on en déduit que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(u)}{2u^{3/2}}du$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos(u)}{\sqrt{u}}du$ convergent. Ainsi, $\lim\limits_{t\to+\infty}f_1(t)=I_1=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos(u)}{\sqrt{u}}du$.

On admet d'après l'énoncé que f_2 est bien définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $f_2'(t)=\dfrac{\sin(t)}{\sqrt{t}}$, que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}du$ converge et que $\lim\limits_{t\to+\infty}f_2(t)=I_2=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}du$.

c. D'après le cours, comme $f:t\mapsto(f_1(t),f_2(t))$ est de classe C^1 sur $[t_1;t_2]$, la longueur de l'arc paramétré $t\mapsto(f_1(t),f_2(t))$ entre les points de paramètres t_1 et t_2 vaut $L=\displaystyle\int_{t_1}^{t_2}||f'(t)||dt=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{f_1'(t)^2+f_2'(t)^2}dt$ donc $L=\displaystyle\int_{t_1}^{t_2}\frac{dt}{\sqrt{t}}=[2\sqrt{t}]_{t_1}^{t_2}=2\sqrt{t_2}-2\sqrt{t_1}$.

Cette courbe s'appelle une spirale de CORNU, pour $t=0$, on est au point $M_0=f(0)=(0,0)$, on tend quand t tend vers $+\infty$ vers le point limite $A=(I_1,I_2)$ et on note $M_t=f(t)$. Alors L est la distance entre M_{t_1} et M_{t_2} sur la courbe et cette distance tend vers $+\infty$ quand, par exemple, $t_1=0$ et t_2 tend vers $+\infty$.

d. En écrivant $\displaystyle\int_t^{+\infty}\frac{\cos(u)}{\sqrt{u}}du=I_1-f_1(t)$ et $\displaystyle\int_t^{+\infty}\frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}du=I_2-f_2(t)$, F est de classe C^1 par opérations et $F'(t)=-2f_1'(t)(I_1-f_1(t))-2f_2'(t)(I_2-f_2(t))=-\dfrac{2\cos(t)}{\sqrt{t}}\displaystyle\int_t^{+\infty}\frac{\cos(u)}{\sqrt{u}}du-\frac{2\sin(t)}{\sqrt{t}}\int_t^{+\infty}\frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}du$ qu'on regroupe en $F'(t)=-\dfrac{2}{\sqrt{t}}\displaystyle\int_t^{+\infty}\frac{\cos(t)\cos(u)-\sin(t)\sin(u)}{\sqrt{u}}du=-2\int_t^{+\infty}\frac{\cos(u-t)}{\sqrt{u}}du$. On pose $u=x+t=\varphi(x)$ avec φ qui est une bijection C^1 strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $[t;+\infty[$ et on a par changement de variable $F'(t)=-2\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos(x)}{\sqrt{t^2+tx}}dx$ comme attendu.

e. Si $(a,t)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$, $u\mapsto\dfrac{\cos(u)}{\sqrt{a+tu}}$ est continue sur le segment $[0;\pi]$ donc l'intégrale $I=\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\cos(u)}{\sqrt{a+tu}}du$ existe. On écrit pose $I=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\cos(u)}{\sqrt{a+tu}}du+\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{\cos(u)}{\sqrt{a+tu}}du$ et on pose $u=\pi-v=\varphi(v)$ avec φ de classe C^1 sur $\Big[0;\dfrac{\pi}{2}\Big]$, ce qui donne par changement de variable $I=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\cos(u)}{\sqrt{a+tu}}du+\int_{\pi/2}^{0}\frac{\cos(\pi-v)}{\sqrt{a+t\pi-tv}}(-dv)$ qu'on regroupe, puisque $\cos(\pi-v)=-\cos(v)$ en $I=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos(u)\Big(\frac{1}{\sqrt{a+tu}}-\frac{1}{\sqrt{a+t\pi-tu}}\Big)du$. Or $\cos$ et $u\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{a+tu}}-\dfrac{1}{\sqrt{a+t\pi-tu}}$ sont continues et strictement positives sur $\Big]0;\dfrac{\pi}{2}\Big[$ où $u<\pi-u$ donc $I>0$.

f. Par CHASLES, $F'(t) = -2\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{\cos(x)}{\sqrt{t^2+tx}}dx$ et, en posant dans chaque intégrale le changement de variable $x = s + k\pi$, on obtient $F'(t) = -2\sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^{\pi}\frac{\cos(u+k\pi)}{\sqrt{t^2+t(s+k\pi)}}du = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\int_0^{\pi}\frac{\cos(s)}{\sqrt{t^2+k\pi+ts}}ds$.

Posons $u_k = \int_0^{\pi}\frac{\cos(s)}{\sqrt{t^2+k\pi+ts}}ds = \int_0^{\pi/2}\cos(u)\Big(\frac{1}{\sqrt{t^2+k\pi+tu}} - \frac{1}{\sqrt{t^2+(k+1)\pi+tu}}\Big)du$, alors $u_k > 0$ d'après **e.** et $(u_k)_{k\geqslant 0}$ est strictement décroissante car $\frac{1}{\sqrt{t^2+k\pi+tu}} - \frac{1}{\sqrt{t^2+(k+1)\pi-tu}}$ vaut, avec la quantité conjuguée, $\frac{\pi}{\sqrt{t^2+k\pi+tu}\sqrt{t^2+(k+1)\pi+tu}\left(\sqrt{t^2+k\pi+tu}+\sqrt{t^2+(k+1)\pi+tu}\right)}$ et cette quantité décroît strictement quand k augmente pour toute valeur de $u \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Par le critère spécial des séries alternées, $F'(t) = -2\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k u_k$ est du signe du premier terme de cette série, donc $F'(t) < 0$ car $-2u_0 < 0$, ce qui prouve que F est strictement décroissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$.

15.25 **a.** x et y sont définies sur $\mathbb{R}$ donc le domaine de définition de cet arc est $\mathbb{R}$. Réduisons le domaine d'étude :

- Les fonctions x et y sont 2π-périodiques donc on n'étudie cet arc que pour $t \in [-\pi;\pi]$ et on repassera une infinité de fois en chaque point (sans pour autant dire que ce sont des points multiples).
- x est paire et y est impaire donc on peut n'étudier cet arc que pour $t \in [0;\pi]$ et on obtiendra toute la courbe en effectuant une symétrie orthogonale de la courbe obtenue par rapport à la droite (Ox).
- $\forall t \in [0;\pi],\ x(\pi-t) = -x(t)$ et $y(\pi-t) = -y(t)$ donc on peut n'étudier cet arc que pour $t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et on obtiendra toute la courbe en effectuant une symétrie centrale par rapport à O.

b. Comme x et y sont dérivables et qu'on a $x'(t) = -3\sin(3t)$ et $y'(t) = 2\cos(2t)$, la fonction x est décroissante sur $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$, croissante sur $\left[\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]$ et la fonction y est croissante sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$. Les fonctions x' et y' ne s'annulent pas en même temps donc il n'y a pas de point stationnaire, par contre, la courbe admet des tangentes horizontales en le point $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$ pour $t = \frac{\pi}{4}$ quand y' s'annule, et des tangentes verticales $(1,0)$ et $\left(-1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ pour $t = 0$ et $t = \frac{\pi}{3}$ quand x' s'annule. Bien sûr, par symétrie, on obtient d'autres points à tangente horizontale ou verticale.

c. On trace le tableau de variations de x et y et on relie les points pour avoir la courbe avec les symétries vues précédemment. Γ est une courbe de LISSAJOUS.

La voir sur Wolfram en tapant $(\cos(3t),\sin(2t))$ dans "parametric plot".

15.26 **a.** La fonction $f : \mathbb{R} \mapsto (x(t),y(t))$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ car les fonctions x et y sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R},\ x'(t) = -3\sin(t)\cos^2(t)$ et $y'(t) = 3\cos(t)\sin^2(t)$. La longueur de l'arc entre $M(0) = (1,0) = f(0)$ et $M = f(t)$ est, d'après le cours, comme $\sin$ et $\cos$ sont positives sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, $L = \int_0^t ||\overrightarrow{f'}(u)||du$ qui donne, $L = \int_0^t \sqrt{9\sin^2(u)\cos^4(u)+9\cos^2(u)\sin^4(u)}du = \frac{3}{2}\int_0^t (2\sin(u)\cos(u))dt = \frac{3}{2}[\sin^2(u)]_0^t = \frac{3\sin^2(t)}{2}$.

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\alpha_0 = 0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_{n-1} < \alpha_n = \frac{\pi}{2}$ les angles tels que $\forall k \in [\![0;n]\!],\ M_k = f(\alpha_k)$. Comme à la question précédente, la longueur de l'arc entre M_k et M_{k+1} vaut $L_k = \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} ||\overrightarrow{f'}(u)||du$ donc

$L_k = \frac{3}{2}[\sin^2(u)]_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} = \frac{3(\sin^2(\alpha_{k+1}) - \sin^2(\alpha_k))}{2}$. Puisque la longueur totale vaut $L = \frac{3}{2}$ (en prenant $t = \frac{\pi}{2}$ dans **a.**), l'énoncé impose que $\forall k \in [\![0; n-1]\!],\ L_k = \frac{3}{2n} = \frac{3(\sin^2(\alpha_{k+1}) - \sin^2(\alpha_k))}{2}$, c'est-à-dire qu'on a la relation $\sin^2(\alpha_{k+1}) - \sin^2(\alpha_k) = \frac{1}{n}$. Ceci revient à écrire que $\forall k \in [\![0; n]\!],\ \sin^2(\alpha_k) = \frac{k}{n}$ puis, comme $\sin$ est injective et positive sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, que $\forall k \in [\![0; n]\!],\ \alpha_k = \mathrm{Arcsin}\left(\sqrt{\frac{k}{n}}\right)$.

Le réel u_n représente la moyenne arithmétique des distances des points M_k à l'origine, et puisque l'on a $OM_k = \sqrt{\cos^6(\alpha_k) + \sin^6(\alpha_k)} = \sqrt{\left(1 - \frac{k}{n}\right)^3 + \left(\frac{k}{n}\right)^3}$, vaut $u_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\sqrt{\left(1 - \frac{k}{n}\right)^3 + \left(\frac{k}{n}\right)^3}$.

c. Par définition, $u_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ avec la fonction $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{(1-x)^3 + x^3}$ qui est continue sur le segment $[0;1]$. On sait d'après le cours sur les sommes de RIEMANN qu'alors on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \sqrt{(1-x)^3 + x^3}dx = \int_0^1 \sqrt{3x^2 - 3x + 1}dx = \int_0^1 \frac{1}{2}\sqrt{1 + (\sqrt{3}(2x-1))^2}dx$ après mise sous forme canonique. On pose $t = \sqrt{3}(2x-1)$ ou $x = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{t}{\sqrt{3}}\right) = \varphi(t)$ avec φ de classe C^1 sur le segment $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$ pour avoir $\ell = \frac{1}{4\sqrt{3}}\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{1+t^2}dt$. Par parité de l'intégrande, on en déduit que $\ell = \frac{1}{2\sqrt{3}}\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1+t^2}dt$. On pose maintenant $t = \mathrm{sh}(u) = \psi(u)$ avec ψ de classe C^1 sur $[0;\alpha]$ avec $\mathrm{sh}(\alpha) = \sqrt{3}$ pour avoir $\ell = \frac{1}{2\sqrt{3}}\int_0^{\alpha}\sqrt{1 + \mathrm{sh}^2(u)}\,\mathrm{ch}(u)du = \frac{1}{2\sqrt{3}}\int_0^{\alpha}\mathrm{ch}^2(u)du = \frac{1}{4\sqrt{3}}\int_0^{\alpha}(1 + \mathrm{ch}(2u))du$.

Ainsi, $\ell = \frac{1}{4\sqrt{3}}\left[u + \frac{\mathrm{sh}(2u)}{2}\right]_0^{\alpha} = \frac{\alpha}{4\sqrt{3}} + \frac{\mathrm{sh}(\alpha)\mathrm{ch}(\alpha)}{4\sqrt{3}} = \frac{\alpha}{4\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}\sqrt{1 + (\sqrt{3})^2}}{4\sqrt{3}} = \frac{\alpha}{4\sqrt{3}} + \frac{1}{2}$. Pour trouver α, on résout, en posant $x = e^{\alpha}$, l'équation $\mathrm{sh}(\alpha) = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2} = \sqrt{3}$ qui donne $x^2 - 2\sqrt{3}\,x - 1 = 0$ ou encore, comme $x > 0$, $x = 2 + \sqrt{3}$. Alors, on a $\alpha = \ln(2+\sqrt{3})$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{\ln(2+\sqrt{3})}{4\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \sim 0,69$.

15.6 Officiel de la Taupe

15.27 Le domaine de définition de l'arc est celui de la fonction x, là où sinus est strictement positive. Il est clair que x et y sont 2π-périodiques donc on n'étudie la courbe que sur $]0;\pi[$ et on repassera une infinité de fois aux mêmes points. Comme $\forall t \in]0;\pi[,\ x(\pi - t) = x(t)$ et $y(\pi - t) = -y(t)$, on a une symétrie d'axe (Ox) de la courbe et on peut n'étudier la courbe que sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$. La courbe possède une asymptote d'équation $y = 0$ quand t tend vers 0^+ avec $\lim\limits_{t\to 0^+} x(t) = -\infty$.

Les fonctions x et y sont de classe C^∞ sur $]0;\pi[$ avec $x'(t) = -2\sin(t)\cos(t) + \frac{\cos(t)}{\sin(t)} = \frac{\cos(t)\cos(2t)}{\sin(t)}$ et $y'(t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = \cos(2t)$. Les deux points de rebroussement de cette courbe sont obtenus pour $\cos(2t) = 0$ donc pour $t = \frac{\pi}{4}$ (et donc $t = \frac{3\pi}{4}$ par symétrie). La longueur cherchée est donc donnée par la relation $L = \int_{\pi/4}^{3\pi/4}\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt = 2\int_{\pi/4}^{\pi/2}\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt$ par symétrie. Pour $t \in \left]\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right[$, $\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = \sqrt{\frac{\cos^2(2t)}{\sin^2(t)}} = -\frac{\cos(2t)}{\sin(t)} = 2\sin(t) - \frac{1}{\sin(t)}$ car $\sin(t) > 0$ et $\cos(2t) < 0$. On a donc $L = 2\Big[-2\cos(t) - \ln\Big(\tan\big(\frac{t}{2}\big)\Big)\Big]_{\pi/4}^{\pi/2} = 2\sqrt{2} + 2\ln(\sqrt{2}-1) \sim 1,06$.

15.28 **a.** Initialisation : comme $n+1 \geqslant 1$, f est de classe C^1 sur I donc $f(x) = f(a) + \displaystyle\int_a^x f'(t)dt$.

Hérédité : soit $p \in [\![0;n-1]\!]$ tel que $\forall x \in I,\ f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{p!}\int_a^x f^{(p+1)}(t)(x-t)^p dt$. Soit $x \in I$, on pose $u(t) = -\dfrac{(x-t)^{p+1}}{p+1}$ et $v(t) = f^{(p+1)}(t)$ de sorte que u et v sont de classe C^1 sur $\widetilde{[a;x]}$ car $p+1 \leqslant n$ et que $u'(t) = (x-t)^k$, d'où $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{p!}\Big[-\frac{(x-t)^{p+1}}{p+1}f^{(p+1)}(t)\Big]_a^x + \frac{1}{p!}\int_a^x f^{(p+2)}(t)\frac{(x-t)^{p+1}}{p+1}dt$ par intégration par parties. Ceci s'écrit aussi $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{(p+1)!}\int_a^x f^{(p+2)}(t)(x-t)^{p+1}dt$.

Par principe de récurrence, on a donc $\forall x \in I,\ f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$.

b. Comme $f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$, par inégalité triangulaire, on obtient $\Big|f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\Big| \leqslant \frac{||f^{(n+1)}||_\infty}{n!}\int_a^x |x-t|^n dt = \frac{||f^{(n+1)}||_\infty}{n!}\Big|\int_a^x (x-t)^n dt\Big| = \frac{||f^{(n+1)}||_\infty |x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$ car $|x-t|^n$ garde un signe constant sur l'intervalle $\widetilde{[a;x]}$ (traiter les cas n pair ou impair et $x \geqslant a$ et $x \leqslant a$).

c. Pour $h > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, on obtient $|f(x+h) - f(x) - hf'(x)| \leqslant \dfrac{||f''||_{\infty,I}h^2}{2}$ en appliquant l'inégalité précédente à l'ordre $n = 1$ entre $x+h$ et x. Comme $|hf'(x)| = |hf'(x) - f(x+h) + f(x) + f(x+h) - f(x)|$, par inégalité triangulaire, on a $|hf'(x)| \leqslant |hf'(x) - f(x+h) + f(x)| + |f(x+h)| + |f(x)| \leqslant \dfrac{||f''||_{\infty,I}h^2}{2} + 2||f||_{\infty,I}$ donc $|f'(x)| \leqslant \dfrac{||f''||_{\infty,I}h}{2} + 2\dfrac{||f||_{\infty,I}}{h}$. Par conséquent f' est bornée sur I.

d. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$, on vient de voir que $||f'||_{\infty,I} \leqslant \varphi(h) = \dfrac{||f''||_{\infty,I}h}{2} + 2\dfrac{||f||_{\infty,I}}{h}$ donc $||f'||_{\infty,I} \leqslant \operatorname{Inf}_{\mathbb{R}_+^*} \varphi$.

- si $||f||_\infty = 0$, alors $f = 0$ donc $f' = 0$ et $||f'||_\infty = 0$.
- si $||f''||_\infty = 0$, alors $f'' = 0$ donc f est affine et pour que f soit bornée sur $\mathbb{R}$, il est nécessaire que f soit constante donc que $f' = 0$ et on a encore $||f'||_\infty = 0$.
- si $||f||_\infty = M_0 > 0$ et $||f''||_\infty = M_2 > 0$, comme $\varphi'(h) = \dfrac{M_2}{2} - \dfrac{2M_0}{h^2}$, on en déduit que φ est minimale en $h_0 = 2\sqrt{\dfrac{M_0}{M_2}}$ (faire le tableau de variations) et on a donc $\operatorname{Inf}_{\mathbb{R}_+^*}(\varphi) = \varphi(h_0) = 2\sqrt{M_0M_2}$. Ainsi, $||f'||_\infty \leqslant 2\sqrt{M_0M_2} = 2\sqrt{||f||_\infty ||f''||_\infty}$.

On en déduit, et ceci dans tous les cas, que $||f'||_\infty \leqslant 2\sqrt{||f||_\infty ||f''||_\infty}$. Il nous manque un facteur $\sqrt{2}$.

Recommençons ! Pour $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$, on a toujours l'inégalité $|f(x+h) - f(x) - hf'(x)| \leqslant \dfrac{||f''||_\infty h^2}{2}$ et aussi $|f(x-h) - f(x) + hf'(x)| \leqslant \dfrac{||f''||_\infty h^2}{2}$ à l'ordre $n = 1$ entre $x-h$ et x. Ainsi, on peut composer $|2hf'(x)| = |(hf'(x) - f(x+h) + f(x)) + (hf'(x) + f(x-h) - f(x)) + f(x+h) - f(x-h)|$ puis, par inégalité triangulaire encore : $|hf'(x)| = \dfrac{1}{2}|2hf'(x)| \leqslant \dfrac{||f''||_\infty h^2}{2} + ||f||_\infty$ donc $|f'(x)| \leqslant \psi(h) = \dfrac{||f''||_\infty h}{2} + \dfrac{||f||_\infty}{h}$.

- si $||f||_\infty = 0$, alors $f = 0$ donc $f' = 0$ et $||f'||_\infty = 0$.
- si $||f''||_\infty = 0$, alors $f'' = 0$ donc f est affine et pour que f soit bornée sur $\mathbb{R}$, il est nécessaire que f soit constante donc que $f' = 0$ et on a encore $||f'||_\infty = 0$.
- si $||f||_\infty = M_0 > 0$ et $||f''||_\infty = M_2 > 0$, comme $\psi'(h) = \dfrac{M_2}{2} - \dfrac{M_0}{h^2}$, on en déduit que ψ est minimale

en $h_1 = \sqrt{\dfrac{2M_0}{M_2}}$ (faire le tableau de variations) et on a donc $\displaystyle\operatorname{Inf}_{\mathbb{R}_+^*}(\psi) = \psi(h_1) = \sqrt{2M_0M_2}$. Ainsi, $||f'||_\infty \leqslant \sqrt{2M_0M_2} = \sqrt{2||f||_\infty||f''||_\infty}$.

Dans tous les cas, on a bien cette fois-ci la majoration $||f'||_\infty \leqslant \sqrt{2||f||_\infty||f''||_\infty}$.

15.29 Comme $(x,y) \in \Gamma_n \iff \left(\dfrac{x}{n}\right)^2 + y^2 = 1 \iff \dfrac{x}{n} + iy \in \mathbb{U} \iff (\exists t \in \mathbb{R},\ \dfrac{x}{n} + iy = e^{it})$, cette courbe Γ_n se paramètre par $x = x(t) = n\cos(t),\ y = y(t) = \sin(t)$. Il s'agit d'une ellipse :

- x et y sont définies et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, x et y sont 2π-périodiques donc on étudie pour $t \in [-\pi;\pi]$ et on repassera une infinité de fois en chaque point de la courbe.
- x est paire et y est impaire donc on réduit l'étude à $t \in [0\pi]$ et on retrouvera la totalité de la courbe en effectuant une réflexion d'axe (Ox).
- $\forall t \in [0;\pi],\ x(\pi - t) = -x(t),\ y(\pi - t) = y(t)$ donc on réduit l'étude à $t \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ et on retrouvera toute la courbe en effectuant la réflexion d'axe (Oy).
- Par composée de ces deux réflexions qui donne la symétrie centrale de centre O, on constate que la courbe se compose de quatre morceaux symétriques.

Γ_n est une ellipse (cercle si $n = 1$) ; ses sommets sont $A_n = (n, 0)$, $C_n = (-n, 0)$, $B_n = (0, 1)$ et $D_n = (0, -1)$.

Par symétries axiales, la surface S_n à l'intérieur de Γ_n vaut $S_n = 4\displaystyle\int_0^n \sqrt{1 - \frac{x^2}{n^2}}dx = 4n\int_0^1 \sqrt{1-u^2}du$ en posant $x = nu = \varphi(u)$. On effectue une intégration par parties en posant $a(u) = \sqrt{1-u^2}$ et $b(u) = u$, a et b sont bien de classe C^1 sur $[0;1[$ et $I = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-u^2}du = [u\sqrt{1-u^2}]_0^1 + \int_0^1 \frac{u^2-1+1}{\sqrt{1-u^2}}du = -I + [\operatorname{Arcsin}(u)]_0^1$ donc $2I = \dfrac{\pi}{2}$ puis $I = \dfrac{\pi}{4}$. C'est évident puisque l'aire d'un disque de rayon $R = 1$ vaut $S = \pi R^2 = \pi$. Ainsi $S_n = n\pi$. On aurait pu poser le changement de variable $x = n\sin(t) = \varphi(t)$ avec φ de classe C^1 sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ et $S_n = 4n\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos(t)dt = 4n\int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos(2t)}{2}dt = 4n\Big[\frac{2t+\sin(2t)}{4}\Big]_0^{\pi/2} = n\pi$.

Comme le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} x^n$ vaut 1 (série géométrique), celui de sa série dérivée $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} nx^{n-1}$ vaut aussi 1 comme celui de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} nx^n$ vaut encore 1 : la rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} S_nx^n$ vaut donc 1.

La longueur L_n de la courbe Γ_n, toujours par symétrie, vaut $L_n = 4\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt$ d'après le paramétrage précédent. Le plus court chemin étant la ligne droite, la longueur de la courbe est supérieure à la longueur du losange $A_nB_nC_nD_n$ qui vaut $4A_nB_n$, ainsi $L_n \geqslant 4\sqrt{n^2+1}$. D'après l'inégalité rappelée dans l'énoncé (facile à établir en élevant au carré), on a aussi $L_n \leqslant 4\displaystyle\int_0^{\pi/2}(|x'(t)| + |y'(t)|)dt$. Ainsi, on majore $L_n \leqslant 4\displaystyle\int_0^{\pi/2}(n\sin(t) + \cos(t))dt = 4\big[-n\cos(t) + \sin(t)\big]_0^{\pi/2} = 4n+4$. Comme $4\sqrt{n^2+1} \underset{+\infty}{\sim} 4n+4 \underset{+\infty}{\sim} 4n$, on a $L_n \underset{+\infty}{\sim} 4n$, ce qui montre (comme avant) que le rayon de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} L_nx^n$ vaut aussi 1.

15.30 Si $\lambda \neq 0$, f_λ est polynomiale et $f_\lambda(x) = (x^2 - \lambda x)(3x^2 - \lambda x) = x^2(x-\lambda)(3x-\lambda) \underset{0}{=} \lambda^2x^2 + o(x^2)$ donc $f'_\lambda(0) = 0$ et $f''_\lambda(0) = \lambda^2 > 0$ d'après TAYLOR-YOUNG et f_λ admet en 0 un minimum local.
Même si $\lambda = 0$, $f_0 : x \mapsto g(x,0) = 3x^4$ admet un minimum local (nul) en $x = 0$.
Ainsi, dans toutes les directions à partir du point $(0,0)$, la fonction g admet un minimum local en $(0,0)$.
Pourtant, g n'admet pas en $(0,0)$ de minimum local car $g(0,0) = 0$ et $g(x, 2x^2) = -x^4 < 0$ si $x \neq 0$. Or la courbe $y = x^2$ (une parabole) passe pas le point $(0,0)$. Pas très facile à voir comme contre-exemple !!!

15.31 La fonction $f=(x,y)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, 2π-périodique donc on peut n'étudier que pour $t\in[-\pi;\pi]$ pour avoir la trajectoire entière. Le point $f(-t)=(x(t),-y(t))$ se déduit du point $f(t)$ par une symétrie orthogonale par rapport à l'axe (Oy) donc on peut n'étudier que sur $[0;\pi]$. Le point $f(\pi-t)=(-x(t),y(t))$ se déduit du point $f(t)$ par une symétrie orthogonale par rapport à l'axe (Ox) donc on peut n'étudier que sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ pour avoir toute la courbe.

Par symétrie, la longueur L de cette courbe est quatre fois celle de la courbe pour $t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Ainsi, comme $x'(t)=-3\sin(t)\cos^2(t)$ et $y'(t)=3\cos(t)\sin^2(t)$, on a $L=4\int_0^{\pi/2}||\overrightarrow{f'}(t)||dt$ donc :

$$L=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{9\sin^2(t)\cos^4(t)+9\cos^2(t)\sin^4(t)}dt=6\int_0^{\pi/2}(2\sin(t)\cos(t))dt=6[\sin^2(t)]_0^{\pi/2}=6.$$

Comme $f'(t)=(-3\sin(t)\cos^2(t),3\cos(t)\sin^2(t))$ et que $M\in T_t\iff(\overrightarrow{f(t)M},\overrightarrow{f'}(t))$ est une famille liée, on a donc $M=(x,y)\in T_t\iff\begin{vmatrix}x-x(t)&x'(t)\\y-y(t)&y'(t)\end{vmatrix}=0$ donc une équation cartésienne de la droite de T_t est $3\cos(t)\sin^2(t)(x-\cos^3(t))+3\sin(t)\cos^2(t)(y-\sin^3(t))=0$ ce qui se réduit par calculs trigonométriques en $(T_t)\ :\ x\sin(t)+y\cos(t)=\sin(t)\cos(t)$.

Ainsi, $A=(0,\sin(t))$ et $B=(\cos(t),0)$ ce qui fait que $AB=\sqrt{\cos^2(t)+\sin^2(t)}=1$ est constant.

15.32 La courbe C est un morceau d'ellipse (d'équation $4x^2+y^2=4$) entre les points extrémaux $A=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}\right)$ (pour $t=\frac{\pi}{4}$) et $B=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\sqrt{2}\right)$ (pour $t=\frac{7\pi}{4}$).

- La partie C n'est pas ouverte car C contient $M=(-1,0)$ (pour $t=\pi$) mais pas $B(M,r)$ si $r>0$ puisque le seul point de l'axe (Ox) qui est dans C est le point M (faire un dessin).
- La partie C est fermée car l'ellipse complète E est l'image réciproque par $f:(x,y)\mapsto 4x^2+y^2$ continue du singleton $\{4\}$ qui est fermé dans $\mathbb{R}$, que $F=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ est aussi fermé puisqu'image réciproque par $g:(x,y)\mapsto x$ de l'intervalle fermé $\left]-\infty;\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ et que $C=E\cap F$.
- La partie C n'est pas convexe car A et B sont dans C et pourtant le milieu du segment $[A;B]$, à savoir le point $I=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$, n'est pas dans C.
- La partie C est bornée car $\sin$ et $\cos$ sont des fonctions bornées.