TD 25 : CALCUL DIFFÉRENTIEL

PSI 1 2023-2024 **mercredi 27 mars 2024**

25.1 **a.** φ est bien définie et de classe C^1 par opérations sur D_2. De plus, pour $(x,y) \in D_1$ et $(u,v) \in D_2$, $\varphi(u,v) = (x,y) \Longleftrightarrow \left(u^2+v^2 = 2x,\ u = vy\right) \Longleftrightarrow \left(v^2y^2+v^2 = 2x,\ u = vy\right) \Longleftrightarrow u = y\sqrt{\dfrac{2x}{1+y^2}},\ v = \sqrt{\dfrac{2x}{1+y^2}}$ car $v > 0$ donc φ est bijective et φ^{-1} est clairement de classe C^1 toujours par opérations.

b. Si $f : D_1 \to \mathbb{R}$ est une solution C^1, posons $g = f \circ \varphi \Longleftrightarrow \forall (u,v) \in D_2,\ g(u,v) = f(x,y) = f\left(\dfrac{u^2+v^2}{2}, \dfrac{u}{v}\right)$ ou encore $\forall (x,y) \in D_1,\ f(x,y) = g(u,v) = g\left(y\sqrt{\dfrac{2x}{1+y^2}}, \sqrt{\dfrac{2x}{1+y^2}}\right)$. Alors g est C^1 par composition. Comme $\forall (x,y) \in D_1,\ 2xy\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + (1+y^2)\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xf(x,y)$, comme φ est une bijection de D_2 sur D_1, cela donne : $\forall (u,v) \in D_2,\ \dfrac{u(u^2+v^2)}{v}\dfrac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v)) + \dfrac{u^2+v^2}{v^2}\dfrac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v)) = (u^2+v^2)f(\varphi(u,v))$ ce qui s'écrit encore :

$\forall (u,v) \in D_2,\ \dfrac{(u^2+v^2)}{v}\left[u\dfrac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v)) + \dfrac{1}{v}\dfrac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v))\right] = (u^2+v^2)f(\varphi(u,v))$.

Mais : $\forall (u,v) \in D_2,\ \dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v)\dfrac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v)) + \dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v)\dfrac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v)) = u\dfrac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v)) + \dfrac{1}{v}\dfrac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v))$ donc $\forall (u,v) \in D_2,\ \dfrac{\partial g}{\partial u} = vf(\varphi(u,v)) = vg(u,v)$ (équation différentielle linéaire en la variable u) .

Comme g est de classe C^1, il existe $\psi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $\forall (u,v) \in D_2,\ g(u,v) = \psi(v)e^{uv}$. Ainsi, $\forall (x,y) \in D_1,\ f(x,y) = \psi\left(\sqrt{\dfrac{2x}{1+y^2}}\right)\exp\left(\dfrac{2xy}{1+y^2}\right) = \theta\left(\dfrac{2x}{1+y^2}\right)\exp\left(\dfrac{2xy}{1+y^2}\right)$ en ayant posé la fonction $\theta = \psi \circ \sqrt{\ }$ qui, par composition, est elle aussi de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

Réciproquement, si f est de cette forme, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left[\dfrac{2}{1+y^2}\theta'\left(\dfrac{2x}{1+y^2}\right) + \dfrac{2y}{1+y^2}\theta\left(\dfrac{2x}{1+y^2}\right)\right]\exp\left(\dfrac{2xy}{1+y^2}\right)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \left[\dfrac{-4xy}{(1+y^2)^2}\theta'\left(\dfrac{2x}{1+y^2}\right) + \dfrac{2x(1-y^2)}{(1+y^2)^2}\theta\left(\dfrac{2x}{1+y^2}\right)\right]\exp\left(\dfrac{2xy}{1+y^2}\right)$ pour $(x,y) \in D_1$. Ainsi, f de classe C^1 sur D_1 par opérations et si on reporte dans l'équation aux dérivées partielles (E), on a bien (après simplifications) $\forall (x,y) \in D_1,\ 2xy\dfrac{\partial f}{\partial x} + (1+y^2)\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2xf$.

En conclusion, par analyse-synthèse, les solutions de (E) sur D_1 sont les fonctions $f : D_1 \to \mathbb{R}$ pour lesquelles il existe une fonction $\theta : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $\forall (x,y) \in D_1,\ f(x,y) = \theta\left(\dfrac{2x}{1+y^2}\right)\exp\left(\dfrac{2xy}{1+y^2}\right)$.

25.2 S est d'équation $f(x,y,z) = z^3 - xy = 0$ donc les points réguliers de S sont tels que $\overrightarrow{\text{grad}}\, f \neq \overrightarrow{0}$. Comme $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x,y) = (-y, -x, 3z^2)$, seul le point $(0,0,0)$ n'est pas régulier sur S. Si $M = (x_0, y_0, z_0) \neq (0,0,0)$ et $M_0 \in S$, le plan tangent P_0 à S en M_0 a pour équation $P_0\ :\ -y_0(x-x_0) - x_0(y-y_0) + 3z_0^2(z-z_0) = 0$ ou encore $P_0\ :\ y_0x + x_0y - 3z_0^2z + z_0^3 = 0$. La droite D est paramétrée par $x = 2,\ y = 3(t+1), z = t$ pour $t \in \mathbb{R}$.

<u>Analyse</u> : si M_0 convient, $D \subset P_0$ donc, en remplaçant, $\forall t \in \mathbb{R},\ 2y_0 + x_0(3t+3) - 3z_0^2t + z_0^3 = 0$ ou encore $\forall t \in \mathbb{R},\ 3(x_0 - z_0^2)t + (2y_0 + 3x_0 + z_0^3) = 0$ ce qui équivaut à $x_0 = z_0^2$ et $2y_0 + 3x_0 + z_0^3 = 0$. Alors, on a $x_0 = z_0^2,\ y_0 = -\dfrac{3z_0^2 + z_0^3}{2}$ donc $x_0y_0 = z_0^3$ implique $2z_0^3 + 3z_0^4 + z_0^5 = z_0^3(2 + 3z_0 + z_0^2)$ ce qui donne $z_0 = 0$ (exclu car alors $x_0 = y_0 = 0$ et $M_0 \neq (0,0,0)$) ou $z_0 = -1$ ou $z_0 = -2$.

Si $z_0 = -1$, on a $x_0 = 1$ et $y_0 = -1$ et si $z_0 = -2$, on trouve $x_0 = 4$ et $y_0 = -2$.

<u>Synthèse</u> : réciproquement, le plan P_1 tangent à S en $M_1 = (1,-1,-1)$ est d'équation $P_1\ :\ -x+y-3z-1 = 0$

et il contient bien D comme le plan $P_2\ :\ -2x+4y-12z-8=0$ tangent à S en $M_2=(4,-2,-2)$.

En conclusion, il existe exactement deux plans tangents à S et contenant la droite D, ce sont les plans $P_1\ :\ -x+y-3z-1=0$ et $P_2\ :\ x-2y+6z+4=0$ tangents à S en $M_1=(1,-1,-1)$ et $M_2=(4,-2,-2)$.

25.3 Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z)=x^2+y^2+2z^2-1$. f est de classe C^∞ par opérations et on calcule $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f(x,y,z)=(2x,2y,4z)$. Ainsi, le seul point critique de f est $(0,0,0)$ qui n'appartient pas à S. La surface S est donc régulière par définition puisque tous ses points sont réguliers : c'est un ellipsoïde de révolution dont les huit sommets sont les points $(1,0,0)$, $(-1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,-1,0)$, $\left(0,0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(0,0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

En un point $M_0=(x_0,y_0,z_0)$ de S, comme $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f(M_0)$ est orthogonal au plan P_0 tangent à S en M_0, une équation de P_0 est $P_0\ :\ x_0(x-x_0)+y_0(y-y_0)+2z_0(z-z_0)=0 \iff x_0x+y_0y+2z_0z=x_0^2+y_0^2+2z_0^2=1$ (à nouveau obtenue par dédoublement comme pour toute quadrique).

<u>Analyse</u> : le vecteur $\overrightarrow{v}=(1,3,-2)$ est un vecteur directeur de D. On cherche donc les points M_0 tels que $\overrightarrow{v}$ est normal à P_0, ce qui équivaut au fait que les vecteurs non nuls $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f(M_0)$ sont colinéaires. Si M_0 convient, $\exists \lambda \in \mathbb{R}^*,\ x_0=\lambda,\ y_0=3\lambda$ et $2z_0=-2\lambda$. Puisque $M_0 \in S$, $(1+9+2)\lambda^2=1 \iff \lambda=\pm\frac{1}{2\sqrt{3}}$ donc $M_0=M_1=\left(\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{3}{2\sqrt{3}},-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$ ou $M_0=M_2=\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}},-\frac{3}{2\sqrt{3}},\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$.

<u>Synthèse</u> : réciproquement, d'après les calculs précédents, les deux plans tangents P_1 et P_2 à S en M_1 et M_2 respectivement ont pour équation $P_1\ :\ \frac{x}{2\sqrt{3}}+\frac{3y}{2\sqrt{3}}-\frac{z}{\sqrt{3}}=1$ et $P_2\ :\ -\frac{x}{2\sqrt{3}}-\frac{3y}{2\sqrt{3}}+\frac{z}{\sqrt{3}}=1$ et ils ont bien des vecteurs normaux colinéaires à $\overrightarrow{v}$ donc P_1 et P_2 sont bien orthogonaux à D.

En conclusion, il existe exactement deux plans qui sont à la fois tangents à S et orthogonaux à D, ce sont les plans P_1 et P_2 tangents à S respectivement aux points M_1 et M_2.

25.4 Soit la fonction $f\ :\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z)=z^2-xy$. f est de classe C^∞ par opérations et $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f(x,y,z)=(-y,-x,2z)$ donc le seul point singulier de S est le sommet $(0,0,0)$ de ce cône de révolution.

En un point $M_0=(x_0,y_0,z_0)\neq(0,0,0)$ de S, comme $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f(M_0)$ est orthogonal au plan P_0 tangent à S en M_0, une équation de P_0 est $P_0\ :\ -y_0(x-x_0)-x_0(y-y_0)+2z_0(z-z_0)=0 \iff 2z_0z-y_0x-x_0y=2z_0^2-2x_0y_0=0$ (à nouveau obtenue par dédoublement comme pour toute quadrique en remplaçant $2xy$ par x_0y+y_0x).

<u>Analyse</u> : si $M_0\neq(0,0,0)$ est un point de S et que le plan tangent P_0 contient la droite D, alors en paramétrant la droite D par $x=y=z=t$ avec $t\in\mathbb{R}$, on doit avoir $\forall t\in\mathbb{R},\ (2z_0-y_0-x_0)t=0$ donc $x_0+y_0=2z_0$. Mais comme $M_0\in S$, on aussi $4x_0y_0=4z_0^2=(2z_0)^2=(x_0+y_0)^2$ donc $x_0^2+2x_0y_0+y_0^2=4x_0y_0$ qui se transforme en $(x_0-y_0)^2=0 \iff x_0=y_0$. Ainsi, $x_0=y_0=z_0$ donc $M_0\in D$.

<u>Synthèse</u> : réciproquement, si $M_0\in D$ et $M_0\neq(0,0,0)$, alors le plan tangent P_0 à S en M_0 a pour équation $P_0\ :\ 2x_0z-x_0x-x_0y=0$ d'après ce qui précède ou $P_0\ :\ 2z=x+y$ et la droite D est bien incluse dans P.

En conclusion, les points M de S en lesquels le plan tangent à S en M contient D sont justement les points de D sauf l'origine $O=(0,0,0)$.

25.5 **a.** Pour $x \in \mathbb{R}$, $g(x,x) = x^2$. Si $x \neq y$: $g(x,y) = \dfrac{y^3 - x^3}{3(y-x)} = \dfrac{y^2 + xy + x^2}{3}$.

On a donc $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ g(x,y) = \dfrac{x^2 + xy + y^2}{3}$ donc g est de classe C^1 car polynomiale (même C^∞).

b. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, par le théorème fondamental de l'intégration, $\varphi : (x,y) \mapsto \int_x^y f(t)dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ car $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = -f(x)$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = f(y)$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ sont donc continues sur $\mathbb{R}^2$ comme la fonction f l'est sur $\mathbb{R}$. Comme $(x,y) \to y - x$ est de classe C^1 car polynomiale et ne s'annule pas sur D par définition, g est de classe C^1 sur D par opérations.

De plus, $\forall (x,y) \in D,\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \dfrac{1}{(y-x)^2}\int_x^y f(t)dt - \dfrac{f(x)}{y-x} = \dfrac{1}{(y-x)^2}\Big(\int_x^y f(t)dt - (y-x)f(x)\Big)$.

De même, on a $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{1}{(y-x)^2}\int_x^y f(t)dt + \dfrac{1}{y-x}f(y) = \dfrac{1}{(y-x)^2}\Big((y-x)f(y) - \int_x^y f(t)dt\Big)$.

c. Soit $a \in \mathbb{R}$, pour $t \neq 0$, $g(a, a+t) - g(a) = \dfrac{1}{t}\Big(\int_a^{a+t} f(u)du\Big) - f(a)$. La fonction $F : t \mapsto \int_a^{a+t} f(u)du$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ car $F'(t) = f(a+t)$ (f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$) et on a $\forall t \neq 0,\ g(a+t,a) - g(a) = \dfrac{F(t) - tf(a)}{t}$.

D'après Taylor-Young, puisque F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, le développement limité d'ordre 2 de F en 0 est donné par $F(t) \underset{0}{=} F(0) + F'(0)t + \dfrac{F''(0)}{2}t^2 + o(t^2)$. Or $F(0) = 0$, $F'(0) = f(a)$ et $F''(0) = f'(a)$, donc $F(t) - tf(a) \underset{0}{=} \dfrac{f'(a)}{2}t^2 + o(t^2)$ donc $\dfrac{g(a, a+t) - g(a,a)}{t} = \dfrac{f'(a)}{2} + o(1)$. On en déduit que $\frac{\partial g}{\partial y}(a,a) = \dfrac{f'(a)}{2}$.

Comme $g(a+t, a) = g(a, a+t)$, on a aussi : $\frac{\partial g}{\partial x}(a,a) = \dfrac{f'(a)}{2}$.

d. <u>Méthode 1</u> : si $x \neq y$, on a $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \dfrac{1}{(y-x)^2}\int_x^y (f(t) - f(x))dt$. Soit $a \in \mathbb{R}$, par continuité de f' sur $\mathbb{R}$, pour $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall t \in \mathbb{R},\ |t - a| \leqslant \alpha \Longrightarrow |f'(t) - f'(a)| \leqslant 2\varepsilon$. Essayons de majorer $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial g}{\partial x}(a,a)\right|$ au voisinage de (a,a) pour établir la continuité de $\frac{\partial g}{\partial x}$ en (a,a). Soit donc $(x,y) \in [a-\alpha; a+\alpha]^2$ de sorte que $||(x,y) - (a,a)||_\infty \leqslant \alpha$, alors considérons deux cas :

- si $x = y$, alors $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial g}{\partial x}(a,a)\right| = \dfrac{|f'(x) - f'(a)|}{2} \leqslant \dfrac{2\varepsilon}{2} = \varepsilon$ car $|x - a| \leqslant \alpha$.

- si $x \neq y$, alors il vient $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial g}{\partial x}(a,a)\right| = \left|\dfrac{1}{(y-x)^2}\int_x^y (f(t) - f(x))dt - \dfrac{f'(a)}{2}\right|$ qu'on peut majorer en $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial g}{\partial x}(a,a)\right| = \dfrac{1}{(y-x)^2}\left|\int_x^y (f(t) - f(x) - (t-x)f'(a))dt\right| \leqslant \dfrac{1}{(y-x)^2}\left|\int_x^y |f(t) - f(x) - (t-x)f'(a)|dt\right|$ puis, avec le théorème des accroissements finis, $\forall t \in \widetilde{[x;y]},\ c \in \widetilde{[x;t]} \subset [a-\alpha; a+\alpha],\ f(t) - f(x) = (t-x)f'(c)$ donc $|f(t) - f(x) - (t-x)f'(a)| \leqslant |t-x| \times |f'(c) - f'(a)| \leqslant 2\varepsilon|t-x|$, on obtient par conséquent la majoration suivante $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial g}{\partial x}(a,a)\right| \leqslant \dfrac{1}{(y-x)^2}\left|\int_x^y 2\varepsilon|t-x|dt\right| = \varepsilon$.

Ceci prouve que $\frac{\partial g}{\partial x}$ est continue en (a,a) pour tout $a \in \mathbb{R}$ donc, avec **b.**, que $\frac{\partial g}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. De même, $\frac{\partial g}{\partial y}$ est aussi continue sur $\mathbb{R}^2$. Par définition, la fonction g est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

<u>Méthode 2</u> : si $x \neq y$, en posant $t = \varphi(u) = x + u(y-x)$, comme φ est de classe C^1, strictement monotone et bijective de $[0;1]$ dans $\widetilde{[x;y]}$, on a $g(x,y) = \int_0^1 f\big(x + u(y-x)\big)du$. Cette expression est aussi valable quand $x = y$. On a donc l'expression plus simple de g : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, g(x,y) = \int_0^1 f\big(x + u(y-x)\big)du$.

On fixe $y \in \mathbb{R}$, alors en notant $\varphi_y(x,u) = f\big(x + u(y-x)\big)$ définie sur $[0;1] \times \mathbb{R}$, pour $a > 0$:

- $\forall x \in [-a; a]$, la fonction $u \mapsto \varphi_y(x,u)$ est continue et intégrable sur $[0;1]$.

- $\forall u \in [0;1]$, $x \mapsto \varphi_y(x,u)$ est dérivable sur $[-a;a]$ et sa dérivée est $x \mapsto (1-u)f'\big(x+u(y-x)\big)$.
- $\forall (u,x) \in [0;1] \times [-a;a]$, $\left|\dfrac{\partial \varphi_y}{\partial x}(x,u)\right| = \left|(1-u)f'\big(x+u(y-x)\big)\right| \leqslant \underset{[\mathrm{Min}(-a,y);\mathrm{Max}(a,y)]}{\mathrm{Max}} |f'|$.

Par le théorème de dérivation sous le signe somme, $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ existe sur $\mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \displaystyle\int_0^1 (1-u)f'\big(x+u(y-x)\big)du$.
De même, $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ existe sur $\mathbb{R}^2$ et on a $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \displaystyle\int_0^1 uf'\big(x+u(y-x)\big)du$.
Soit $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ fixé et une suite $\big((a_n,b_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers (x_0,y_0), montrons alors que la suite $\left(\dfrac{\partial g}{\partial x}(a_n,b_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)$ ce qui garantira la continuité de $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ sur $\mathbb{R}^2$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\dfrac{\partial g}{\partial x}(a_n,b_n) = \displaystyle\int_0^1 (1-u)f'\big(a_n+u(b_n-a_n)\big)du$.
La suite $\big((a_n,b_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc est bornée. Soit donc $M >$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leqslant M$ et $|b_n| \leqslant M$.
La fonction f' est bornée sur $[-M;M]$ donc il existe $B > 0$ tel que $\forall t \in [-M;M]$, $|f'(t)| \leqslant B$.
Posons $g_n : u \mapsto (1-u)f'\big(a_n+u(b_n-a_n)\big)$, alors $\dfrac{\partial g}{\partial x}(a_n,b_n) = \displaystyle\int_0^1 g_n$.

- Toutes les g_n sont continues et intégrables sur $[0;1]$.
- Par continuité de la fonction f' sur $\mathbb{R}$, la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $h : u \mapsto (1-u)f'\big(x_0+u(y_0-x_0)\big)$ qui est continue sur $[0;1]$.
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall u \in [0;1]$, $|g_n(u)| \leqslant B$ et $u \mapsto B$ est intégrable sur $[0;1]$.

Par le théorème de convergence dominée, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 g_n = \int_0^1 (1-u)f'\big(x_0+u(y_0-x_0)\big)du$ ce qui s'écrit aussi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\partial g}{\partial x}(a_n,b_n) = \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)$. Par caractérisation séquentielle de la continuité, la fonction $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ est donc continue sur $\mathbb{R}^2$. De même $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ et la fonction est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

25.6 La partie $K = [-1;1]^2$ est un fermé borné (autrement dit un compact) de $\mathbb{R}^2$ (de dimension finie) et f est continue sur K par opérations. On sait alors d'après le cours que f est bornée sur K et atteint ses bornes.
On constate que $\forall (x,y) \in K$, $x^4y^3 \leqslant 1$ et $1+y^4 \leqslant 1$ donc, par croissance de $\ln$, $f(x,y) \leqslant 1+\ln(2) = f(1,1)$ ce qui prouve que f admet en $(1,1)$ son maximum absolu sur K : $\underset{K}{\mathrm{Max}}\, f = f(1,1) = 1+\ln(2) \sim 1,69$.
Trouvons les points critiques de f, sachant qu'on a facilement $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 4x^3y^3$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 3x^4y^2 + \dfrac{4y^3}{1+y^4}$, il vient $\forall (x,y) \in]-1;1[^2 = \overset{\circ}{K}$, $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0\right) \iff \left(4x^3y^3 = 3x^4y^2 + \dfrac{4y^3}{1+y^4} = \dfrac{3x^4y^2+3x^4y^6+4y^3}{1+y^4} = 0\right)$.
Si $(x,y) \in]-1;1[^2$ est un point critique de f, alors $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0\right) \iff (x = 0 \text{ ou } y = 0)$ et on a aussi les implications $\left(x = 0 \text{ et } \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0\right) \implies (y = 0)$ et aussi $(y = 0) \implies \left(\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0\right)$. Ainsi, les points critiques de f dans $\overset{\circ}{K}$ sont tous les points $(x,0)$ avec $x \in]-1;1[$, il sont situés sur une droite qui sépare le carré K en deux.
Mais si $x \in]-1;1[$ avec $x \neq 0$ est fixé, on a $f(x,t) = x^4t^3 + \ln(1+t^4) \underset{0}{\sim} x^4t^3$ donc $f(x,t)$ change de signe (quand t varie) au voisinage de 0 et f n'admet pas en $(x,0)$ un extremum local.
Si $x = 0$, $f(t,0) = 0$ et $f(0,t) \underset{0}{\sim} t^4$ qui reste positif. Mais f n'admet pas d'extremum local en $(0,0)$ car $f(\sqrt{|t|},t^3) = t^{11} + \ln(1+t^{12}) \underset{0}{\sim} t^{11}$ qui change de signe au voisinage de 0 alors que $\displaystyle\lim_{t\to 0}(\sqrt{|t|},t^3) = (0,0)$.
Comme f n'admet en aucun de ses points critiques un extremum local, elle ne peut atteindre son minimum absolu sur K qu'en un point de la frontière de K. Faisons les études sur les quatre côtés du carré K :
- $h_1(t) = f(1,t) = t^3 + \ln(1+t^4) = f(-1,t)$ $(f(x,y) = f(-x,y)$ donc la surface $z = f(x,y)$ est invariante par

la réflexion de plan $x = 0$), alors $h_1'(t) = 3t^2 + \dfrac{4t^3}{1+t^4} = \dfrac{t^2(3+3t^4+4t)}{1+t^4}$ qui reste positif (étude de fonction) ainsi h_1 est strictement croissante sur $[-1;1]$ et son minimum vaut $h(-1) = f(1,-1) = f(-1,-1) = -1+\ln(2)$.

• $h_2(t) = f(t,1) = t^4 + \ln 2$ qui est paire et atteint son minimum en 0 où elle vaut $h_2(0) = \ln(2)$.

• $h_3(t) = f(t,-1) = -t^4 + \ln 2$ qui est paire et atteint son minimum en ± 1 où elle vaut $h_3(\pm 1) = -1+\ln(2)$.

Par conséquent, le minimum absolu de f sur K est atteint en $(\pm 1, -1)$ et il vaut $-1+\ln(2) \sim -0.306$.

25.7 **a.** Puisque $U = (\mathbb{R}_+^*)^2$ est un ouvert de l'espace vectoriel normé $\mathbb{R}^2$ et (x_0, y_0) un point de cet ouvert où f admet un minimum absolu, f admet donc a fortiori en (x_0, y_0) un minimum local et le cours nous apprend alors que f admet en (x_0, y_0) un point critique.

Si on veut la preuve, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{f(x_0+t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t}$ et si $t > 0$ on a $\dfrac{f(x_0+t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} > 0$ donc, en passant à la limite, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \geqslant 0$. De même, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim\limits_{t \to 0^-} \dfrac{f(x_0+t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t}$ et si $t < 0$ on a $\dfrac{f(x_0+t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} < 0$ donc, en passant à la limite, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \leqslant 0$. Ainsi, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ et, par symétrie, on a aussi $\dfrac{\partial f}{\partial x}y(x_0, y_0) = 0$ donc f admet un point critique en (x_0, y_0).

b. D'abord, on décompose S_a en "éléments simples" en écrivant $S_a(x,y) = xy + \dfrac{2a}{x} + \dfrac{2a}{y}$ donc S_a est de classe C^1 par opérations sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ et on a les dérivées partielles $\dfrac{\partial S_a}{\partial x}(x,y) = y - \dfrac{2a}{x^2}$ et $\dfrac{\partial S_a}{\partial y}(x,y) = x - \dfrac{2a}{y^2}$. Ainsi, $\overrightarrow{\text{grad}}\, S_a(x,y) = (0,0) \iff \left(y - \dfrac{2a}{x^2} = x - \dfrac{2a}{y^2} = 0\right) \iff (yx^2 = xy^2 = 2a) \iff (x = y = x_0 = y_0 = \sqrt[3]{2a})$.

f admet un unique point critique $(x_0, y_0) = (\sqrt[3]{2a}, \sqrt[3]{2a})$ et, après calculs, $S_a(x_0, y_0) = 3\sqrt[3]{4a^2} = 3x_0^2 = 3y_0^2$.

c. K est une sorte de triangle délimité par deux droites ($x = \dfrac{x_0}{3}$ et $y = \dfrac{y_0}{3}$) et de l'autre côté par une hyperbole ($xy = 3x_0y_0$). De plus, K est bornée car si $(x,y) \in K$, on a $0 < x = \dfrac{xy}{y} \leqslant \dfrac{3x_0y_0}{(y_0/3)} = 9x_0$ et $y = \dfrac{xy}{x} \leqslant \dfrac{3x_0y_0}{(x_0/3)} = 9y_0$. Enfin, K est fermé car si une suite $\big((a_n, b_n)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de K converge vers $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, en passant à la limite dans les trois inégalités $a_n \geqslant \dfrac{x_0}{3}$ et $b_n \geqslant \dfrac{y_0}{3}$ et $a_nb_n \leqslant 3x_0y_0$, on obtient $a \geqslant \dfrac{x_0}{3}$ et $b \geqslant \dfrac{y_0}{3}$ et $ab \leqslant 3x_0y_0$ donc $(a,b) \in K$. Comme S_a est continue sur le fermé borné (compact) K (on est bien en dimension finie), elle est bornée et atteint son minimum sur K donc $\underset{K}{\text{Min}}\, S_a$ existe.

- Si $x \leqslant \dfrac{x_0}{3}$ alors $S_a(x,y) = xy + \dfrac{2a}{x} + \dfrac{2a}{y} > 0 + \dfrac{6a}{x_0} + 0 = 3x_0^2 = S_a(x_0, y_0)$.
- Si $y \leqslant \dfrac{y_0}{3}$, de même, $S_a(x,y) = xy + \dfrac{2a}{x} + \dfrac{2a}{y} > 0 + 0 + \dfrac{6a}{y_0} = 3y_0^2 = S_a(x_0, y_0)$.
- Si $xy \geqslant 3x_0y_0$, $S_a(x,y) = xy + \dfrac{2a}{x} + \dfrac{2a}{y} > 3x_0^2 + 0 + 0 = S_a(x_0, y_0)$.

Comme $\forall (x,y) \in U \setminus K,\ S_a(x,y) > S_a(x_0, y_0) \geqslant \underset{K}{\text{Min}}\, S_a$, on a $\forall (x,y) \in U,\ S_a(x,y) \geqslant \underset{K}{\text{Min}}\, S_a$ ainsi S_a admet son minimum absolu à l'intérieur de K donc en un point critique.

Or il n'existe qu'un point critique de S_a et il est en $(x_0, y_0) \in K$. Enfin, le minimum absolu de S_a est atteint en (x_0, y_0) : $\underset{U}{\text{Min}}(S_a) = \underset{K}{\text{Min}}(S_a) = \underset{\mathring{K}}{\text{Min}}(S_a) = S_a(x_0, y_0) = 3\sqrt[3]{4a^2} = 3x_0^2$.

d. La surface en fonction du volume V fixé vaut $S = \underbrace{xy}_{\text{fond}} + \underbrace{2xz + 2yz}_{\text{côtés}} = S_V(x,y) = xy + \dfrac{2(x+y)V}{xy}$ car $V = xyz$. On a donc $S_{min} = S_V(x_0, y_0)$ avec $x_0 = y_0 = \sqrt[3]{2V}$ et $z_0 = \dfrac{V}{x_0y_0} = \dfrac{x_0}{2}$.

La boîte de surface minimale est de base carrée et la hauteur est la moitié de la longueur d'un côté.

25.8 U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ sur lequel g est définie et de classe C^2. Par hypothèse, $g = f \circ h$ où la fonction $h : U \to \mathbb{R}_+^*$ est définie par $h(x,y) = x^2 + y^2$.
Par composition de fonctions C^2, $\forall (x,y) \in U$, $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2xf'(x^2+y^2)$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2yf'(x^2+y^2)$. On dérive une fois de plus et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = 2f'(x^2+y^2) + 4x^2 f''(x^2+y^2)$ et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = 2f'(x^2+y^2) + 4y^2 f''(x^2+y^2)$.
$\forall (x,y) \in U$, on a $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = (x^2+y^2)^p \iff 4f'(x^2+y^2) + 4(x^2+y^2)f''(x^2+y^2) = (x^2+y^2)^p$.
Comme h est surjective de U dans $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit la nouvelle équivalence :

$$\forall (x,y) \in U,\ \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = (x^2+y^2)^p \iff \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ 4f'(t) + 4tf''(t) = t^p.$$

On résout $(E)\ :\ ty'' + y' = \dfrac{t^p}{4}$ en distinguant selon la valeur de p :

- si $p \neq -1$, la fonction f' est de la forme : $t \mapsto \dfrac{\lambda}{t} + \dfrac{t^p}{4(p+1)}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
- si $p = -1$, la fonction f' est de la forme : $t \mapsto \dfrac{\lambda}{t} + \dfrac{\ln(t)}{4t}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

On intègre à nouveau et on a la forme des fonctions f vérifiant les conditions imposées :

- si $p \neq -1$, la fonction f est de la forme : $f : t \mapsto \lambda \ln(t) + \mu + \dfrac{t^{p+1}}{4(p+1)^2}$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
- si $p = -1$, la fonction f est de la forme : $f : t \mapsto \lambda \ln(t) + \mu + \dfrac{\ln^2(t)}{8}$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

25.9 **a.** Pour $n = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\nabla u(x) = u'(x)$. Par exemple pour $u = \text{ch}$, on a bien u de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{|\text{ch}\,(x)|}{|x|} = +\infty$ par croissances comparées car $|\text{ch}\,(x)| = \text{ch}\,(|x|) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^{|x|}}{2}$; dans ce cas, on a $u' = \text{sh}$ et on sait que u' est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Par contre pour $u = \text{sh}$, on a aussi u de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{|\text{sh}\,(x)|}{|x|} = +\infty$ car $|\text{sh}\,(x)| = \text{sh}\,(|x|) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^{|x|}}{2}$ mais $u' = \text{ch}$ est surjective de $\mathbb{R}$ dans $[1; +\infty[$ mais pas de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

b. Pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^2$, la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = u(x) - (x|v)$ est de classe C^1 car u l'est et que $g : x \mapsto (x|v)$ est polynomiale en les coordonnées de x donc de classe C^1 aussi, d'ailleurs elle est aussi linéaire donc continue car on est en dimension finie. De plus, $\forall x \in \mathbb{R}^2$, $\nabla f(x) = \nabla u(x) - \nabla g(x)$ par linéarité des dérivées partielles. Or, si $v = (v_1, v_2)$, $g(x_1, x_2) = x_1 v_1 + x_2 v_2$ donc $\nabla g(x_1, x_2) = (v_1, v_2) = v$. Ainsi, $\nabla f(x) = \nabla u(x) - v$. Il suffit donc de choisir $v \notin \nabla u(\mathbb{R}^2)$ (on le peut car ∇u est non surjective par hypothèse) pour que ∇f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2$. De plus, d'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, $\forall x \in \mathbb{R}^2$, $|(x|v)| \leqslant ||x||\,||v||$ donc, par inégalité triangulaire :

$$\forall x \in \mathbb{R}^2,\ |f(x)| = |u(x) - (x|v)| \geqslant \big||u(x)| - |(x|v)|\big| \geqslant |u(x)| - |(x|v)| \geqslant |u(x)| - ||x||\,||v||.$$

Ainsi, dès que $x \neq (0,0)$, $||x|| > 0$ donc $\dfrac{|f(x)|}{||x||} \geqslant \dfrac{|u(x)|}{||x||} - ||v||$. Or $\lim\limits_{||x|| \to +\infty} \dfrac{|u(x)|}{||x||} = +\infty$ par hypothèse donc, par minoration, on a aussi $\lim\limits_{||x|| \to +\infty} \dfrac{|f(x)|}{||x||} = +\infty$.

c. Soit $r > 0$ et $(a,b) \in (\mathbb{R}^2 \setminus B_r)^2$, alors $||a|| \geqslant r$ et $||b|| \geqslant r$. Écrivons a et b en coordonnées polaires, $a = (||a|| \cos(\alpha), ||a|| \sin(\alpha))$ et $b = (||b|| \cos(\beta), ||b|| \sin(\beta))$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Définissons alors l'application $\gamma : [0;1] \to \mathbb{R}^2$ par $\forall t \in [0;1]$, $\gamma(t) = ((1-t)||a|| + t||b||).(\cos((1-t)\alpha + t\beta), \sin((1-t)\alpha + t\beta))$. Alors γ

définit un arc paramétré dans le plan, bien sûr de classe C^∞, tel que $\gamma(0)=a$, $\gamma(1)=b$ et tel que l'on ait $\forall t\in[0;1]$, $||\gamma(t)||=(1-t)||a||+t||b||\geqslant \mathrm{Min}(||a||,||b||)\geqslant r$. Ainsi $\gamma([0;1])\subset(\mathbb{R}^2\setminus B_r)$.

Soit $(p,q)\in f(\mathbb{R}^2\setminus B_r)^2$, alors par définition il existe $(a,b)\in(\mathbb{R}^2\setminus B_r)^2$ tels que $p=f(a)$ et $q=f(b)$. On suppose que $p<q$ et on choisit $r\in[p;q]$. Alors avec la fonction γ précédente, $h:[0;1]\to\mathbb{R}$ définie par $h(t)=f\circ\gamma(t)$ est continue en tant que composée de fonctions continues (elle est même de classe C^1) et $h(0)=f(a)=p$, $h(1)=f(b)=q$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t\in[0;1]$ tel que $h(t)=r$ ce qui signifie que $r=f(\gamma(t))$ et on a vu que $\gamma(t)\in(\mathbb{R}^2\setminus B_r)$ donc $r\in f(\mathbb{R}^2\setminus B_r)$.

En conclusion, $f(\mathbb{R}^2\setminus B_r)$ est un intervalle car c'est un convexe.

d. Comme $\lim\limits_{||x||\to+\infty}\dfrac{|f(x)|}{||x||}=+\infty$, $\exists r>0,\ \forall x\in\mathbb{R}^2,\ ||x||\geqslant r\Longrightarrow|f(x)|\geqslant||x||>0\Longrightarrow f(x)\neq0$. Ainsi, pour un tel réel r, on a $0\notin f(\mathbb{R}^2\setminus B_r)$. Comme $\lim\limits_{||x||\to+\infty}|f(x)|=+\infty$ puisque $|f(x)|=\dfrac{|f(x)|}{||x||}\times||x||$, l'intervalle $f(\mathbb{R}^2\setminus B_r)$ ne peut pas être borné. Il ne reste plus que quatre possibilités : $f(\mathbb{R}^2\setminus B_r)=]a;+\infty[$, $[a;+\infty[$, $]-\infty;b[$ ou $]-\infty;b]$. Supposons (les autres cas sont identiques) que $f(\mathbb{R}^2\setminus B_r)=]a;+\infty[$ (avec $a\in\mathbb{R}_+$).

Comme f est continue donc bornée sur le fermé borné $\overline{B_r}$, et qu'elle est minorée par a sur $\mathbb{R}^2\setminus B_r$, f est minorée sur $\mathbb{R}^2$. Puisque $\lim\limits_{||x||\to+\infty}|f(x)|=+\infty$, $\exists r'>r,\ \forall x\in\mathbb{R}^2,\ ||x||\geqslant r'\Longrightarrow|f(x)|=f(x)\geqslant f(0,0)$. Comme f est continue sur le fermé borné $\overline{B_{r'}}$, elle y admet un minimum $m=\underset{\overline{B_{r'}}}{\mathrm{Min}}(f)\leqslant f(0,0)$. Si $x\in\mathbb{R}^2$, on a $||x||\leqslant r'\Longrightarrow f(x)\geqslant m=\underset{\overline{B_{r'}}}{\mathrm{Min}}(f)$ et $||x||>r'\Longrightarrow f(x)\geqslant f(0,0)\geqslant m$. Par conséquent, $m=\underset{\mathbb{R}^2}{\mathrm{Min}}(f)=f(x_0)$ avec $x_0\in\overline{B_{r'}}$. Mais comme ce minimum de f est atteint dans l'ouvert $\mathbb{R}^2$, il l'est en un point critique de f. On obtient donc une contradiction puisqu'on a construit f pour que son gradient ne s'annule pas.

On conclut donc, dès que $n\geqslant2$, que $u\in C^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ telle que $\lim\limits_{||x||\to+\infty}\dfrac{|u(x)|}{||x||}=+\infty$ vérifie ∇u surjectif.

25.10 **a.** f est polynomiale sur D donc elle y est de classe C^1. Par conséquent, F est aussi de classe C^1 sur $D\times\mathbb{R}$. De plus, on a clairement $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-4x(x^2+y^2)+3x$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-4y(x^2+y^2)+3y$ et $\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)=-1$ donc $\overrightarrow{\mathrm{grad}}F(x,y,z)=(-4x(x^2+y^2)+3x,-4y(x^2+y^2)+3y,-1)$.

b. S est la surface d'équation $F(x,y,z)=0$ par définition et tous les points de cette surface sont réguliers car $\overrightarrow{\mathrm{grad}}F(x,y,z)\neq\overrightarrow{0}$ pour $(x,y,z)\in D\times\mathbb{R}$ d'après la question **a.**. Le plan tangent en un point (x,y,z) de cette surface admet d'après le cours comme vecteur normal $\overrightarrow{\mathrm{grad}}F(x,y,z)$. On cherche donc (x,y,z) tel que $\overrightarrow{\mathrm{grad}}F(x,y,z)$ et $\overrightarrow{v}=(0,1,-1)$ sont colinéaires, ce qui se traduit par $\begin{cases}-4x(x^2+y^2)+3x&=0\\4y(x^2+y^2)-3y&=-1\end{cases}$. Or la condition $-4x(x^2+y^2)+3x=-4x\left(x^2+y^2-\frac{3}{4}\right)=0$ équivaut à $x=0$ ou $x^2+y^2=\frac{3}{4}$. Deux cas :

- Si $x=0$, $4y(x^2+y^2)-3y=-1\Longleftrightarrow4y^3-3y=-1\Longleftrightarrow(y+1)\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=0\Longleftrightarrow\left(y=-1\text{ ou }y=\frac{1}{2}\right)$.
- Si $x^2+y^2=\frac{3}{4}$, $4y(x^2+y^2)-3y=0\neq-1$ donc ceci ne correspond pas à un point critique.

Ainsi, les points $M=(x,y,z)$ de S en lesquels le plan tangent à S en M est normal à $\overrightarrow{v}$ sont $(0,-1,f(0,-1))$ et $\left(0,\frac{1}{2},f\left(0,\frac{1}{2}\right)\right)$. Or $f(0,-1)=\frac{3}{2}$ et $f\left(0,\frac{1}{2}\right)=\frac{21}{16}$. Les points de S cherchés sont $\left(0,1,\frac{3}{2}\right)$ et $\left(0,\frac{1}{2},\frac{21}{16}\right)$.

c. Comme f est définie sur D et que $(t,t)\in D\Longleftrightarrow t^2+t^2\leqslant1\Longleftrightarrow|t|\leqslant\dfrac{1}{\sqrt2}$, les applications f et $t\mapsto t$ étant de classe C^1 sur leurs ensembles de définition respectifs (D et $\left[-\dfrac{1}{\sqrt2};\dfrac{1}{\sqrt2}\right]$), g l'est aussi par composée sur

$\left[-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ et $\forall t \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, $g'(t) = 1\times\frac{\partial f}{\partial x}(t,t)+1\times\frac{\partial f}{\partial y}(t,t) = (-8t^3+3t)+(-8t^3+3t) = 2t(3-8t^2)$ par la règle de la chaîne. Comme $g : t \mapsto -4t^4+3t^2+1$ est paire, il suffit de l'étudier sur $I = \left[0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$. La dérivée précédente montre que g est croissante sur $\left[0;\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$. Ainsi, g est maximale en $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ et minimale en 0 ou en $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (les extrémités de I). Or $g(0) = 1$ et $g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{2}$ donc $\underset{I}{\mathrm{Min}}(g) = 1$. Comme on a $g\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right) = -4\times\frac{9}{64}+3\times\frac{3}{8}+1 = \frac{25}{16}$, il vient $\underset{I}{\mathrm{Max}}(g) = \frac{25}{16}$. Par parité de g, si $J = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, $\underset{J}{\mathrm{Min}}(g) = 1$ et $\underset{J}{\mathrm{Max}}(g) = \frac{25}{16}$. Enfin, si $(x,y) \in D$, on a $f(x,y) = f\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{2}},\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{2}}\right) = g\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{2}}\right)$ (l'image de (x,y) par f ne dépend que du "rayon" $r = \sqrt{x^2+y^2}$) d'où $\underset{D}{\mathrm{Min}}(f) = 1$ et $\underset{D}{\mathrm{Max}}(f) = \frac{25}{16}$.

25.11 **a.** f est polynomiale donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2y^2(1-x-y)-x^3y^2 = x^2y^2(3-4x-3y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^3y(1-x-y)-x^3y^2 = x^3y(2-2x-3y)$. Les points critiques de f sont ceux qui vérifient $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x,y) = 0 \iff (x = 0$ ou $y = 0$ ou $4x+3y-3 = 2x+3y-2 = 0)$ ce qui donne, en résolvant ce petit système : (x,y) est un point critique de $f \iff \left(x = 0 \text{ ou } y = 0 \text{ ou } (x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3})\right)$.

b. Comme $\mathbb{R}^2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et que f y est de classe C^1, si f admet en (a,b) un extremum local, alors (a,b) est un point critique pour f donc ce ne peut être qu'en les points $(x_0,0)$, $(0,y_0)$ ou en $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$.

Méthode 1 : brutale et superflue dans ce cas

• En $(0,0)$: $f(x,-x) = x^5$ qui change de signe au voisinage de $x = 0$ donc f n'admet en $(0,0)$ ni un maximum ni un minimum local, c'est un point selle !

• En $(1,0)$: $f(1,y) = -y^3$ qui change de signe au voisinage de $y = 0$ donc f n'admet en $(1,0)$ ni un maximum ni un minimum local, c'est un point selle !

• En $(x_0,0)$ avec $x_0 > 1$: soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $||(x,y)-(x_0,0)||_\infty \leqslant \frac{x_0-1}{2}$, par inégalité triangulaire : $1-x-y = 1-x_0+x_0-x-y \leqslant 1-x_0+|x_0-x|+|y| \leqslant 1-x_0+2\times\frac{x_0-1}{2} = 0$ donc $1-x-y \leqslant 0$. De plus, $x \geqslant x_0-\frac{x_0-1}{2} > 0$. Ainsi, $f(x,y) = x^3y^2(1-x-y) \leqslant 0$ donc f admet en $(x_0,0)$ un maximum local.

• En $(x_0,0)$ avec $x_0 < 0$: soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $||(x,y)-(x_0,0)||_\infty \leqslant -\frac{x_0}{2}$. Alors $x \leqslant x_0-\frac{x_0}{2} = \frac{x_0}{2} < 0$ et $1-x-y \geqslant 1-\frac{x_0}{2}+\frac{x_0}{2} = 1$ car $-y \geqslant -|y|$. Ainsi, $f(x,y) = x^3y^2(1-x-y) \leqslant 0$ donc f admet en $(x_0,0)$ un maximum local.

• En $(x_0,0)$ avec $0 < x_0 < 1$: soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $||(x,y)-(x_0,0)||_\infty \leqslant \frac{1}{2}\mathrm{Min}(x_0,1-x_0) = r$. Comme avant, $x > 0$ car $x \geqslant x_0-r \leqslant x_0-\frac{x_0}{2} > 0$ et $1-x-y = 1-x_0+x_0-x+y \geqslant 1-x_0-2r \geqslant 0$ car $x_0-x \geqslant -|x_0-x| \geqslant -r$ et $y \geqslant -|y| \geqslant -r$. Ainsi, $f(x,y) = x^3y^2(1-x-y) \geqslant 0$ donc f admet en $(x_0,0)$ un minimum local.

• En $(0,y_0)$ avec $y_0 \neq 0$ et $y_0 \neq 1$: $f(x,y_0) = x^3y_0^2(1-y_0-x) \underset{0}{\sim} x^3y_0^2(1-y_0)$ qui change de signe au voisinage de $x = 0$ donc f n'admet en $(0,y_0)$ ni un maximum ni un minimum local, c'est un point selle !

• En $(0,1)$: $f(x,1) = -x^4 \leqslant 0$ alors que $f(x,1-2x) = x^4(1-2x)^2 \geqslant 0$ donc f change de signe au voisinage du point $(0,1)$. Ainsi, f n'admet en $(0,1)$ ni un maximum ni un minimum local, c'est un point selle !

• <u>En $(1/2, 1/3)$</u> : on a $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2xy^2(3-4x-3y) - 4x^2y^2$ donc $r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}\right) = -\dfrac{1}{9}$, mais aussi $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = x^3(2-2x-3y) - 3x^3y$ donc $t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}\right) = -\dfrac{1}{8}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2yx^2(3-4x-3y) - 3x^2y^2$ donc $s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}\right) = -\dfrac{1}{12}$. Ainsi, $rt - s^2 = \dfrac{1}{144} > 0$ avec $r < 0$ donc, d'après le cours, f admet en $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}\right)$ un maximum local tel que $f\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{432}$ (après calcul).

<u>Méthode 2</u> : élégante mais encore faut-il y penser !
Comme l'expression de f fait intervenir des produits, et que la grande majorité des points critiques sont des points où f est nulle (à part $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}\right)$), on peut s'intéresser au signe de f. D'abord, f est nulle sur les trois droites $d_1 : x = 0$, $d_2 : y = 0$ et $d_3 : x + y = 1$ et que le signe de $f(x,y)$ est celui du produit $xy^2(1-x-y)$ donc f est positive sur les trois domaines $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \text{ et } 1-x-y \geqslant 0\}$, $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0,\ y \leqslant 0 \text{ et } 1-x-y \geqslant 0\}$, $D_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leqslant 0 \text{ et } 1-x-y \leqslant 0\}$ et elle est négative sur les quatre autres domaines $D_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \text{ et } 1-x-y \leqslant 0\}$, $D_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0,\ y \leqslant 0 \text{ et } 1-x-y \leqslant 0\}$, $D_6 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leqslant 0,\ y \geqslant 0 \text{ et } 1-x-y \geqslant 0\}$ et $D_7 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leqslant 0,\ y \leqslant 0 \text{ et } 1-x-y \geqslant 0\}$.

• <u>En $(0,0)$</u> : il est à l'intersection de D_1, D_2, D_6 et D_7 où f change de signe donc il s'agit d'un point selle.

• <u>En $(1,0)$</u> : il est à l'intersection de D_1, D_2, D_4 et D_5 où f change de signe donc il s'agit d'un point selle.

• <u>En $(0,1)$</u> : il est à l'intersection de D_1, D_3, D_4 et D_6 où f change de signe donc il s'agit d'un point selle.

• <u>En $(0,y_0)$ avec $y_0 \neq 0$ et $y_0 \neq 1$</u> : ce point est entre les domaines D_3 et D_4 si $y_0 > 1$, D_1 et D_6 si $0 < y_0 < 1$ ou D_2 et D_7 si $y_0 < 0$, à chaque fois f change de signe au voisinage de $(0,y_0)$ donc c'est encore un point selle.

• <u>En $(x_0,0)$ avec $x_0 > 1$ ou $x_0 < 0$</u> : ce point est entre les domaines D_4 et D_5 si $x_0 > 1$ ou entre les domaines D_6 et D_7 si $x_0 < 0$ donc f reste négative au voisinage de $(x_0,0)$ donc f admet en ce point un maximum local.

• <u>En $(x_0,0)$ avec $0 < x_0 < 1$</u> : ce point est entre les domaines D_1 et D_2 donc f reste positive au voisinage de $(x_0,0)$ donc f admet en ce point un minimum local.

• <u>En $(1/2, 1/3)$</u> : f est continue sur le fermé borné (compact) D_1 (c'est le triangle entre les trois droites d_1, d_2, d_3) donc y est bornée et y atteint ses bornes. Or $f\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{432}$ et f est nulle sur les bords de ce triangle. Ainsi, f admet son maximum sur D_1 en un point intérieur à D_1 et c'est donc forcément en $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}\right)$. Ainsi, f admet en $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}\right)$ un maximum local.

Comme $f(x,1) = -x^4$ et $f(x,-x) = x^5$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x,1) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x,1-2x) = +\infty$ donc f n'est ni majorée, ni minorée donc elle n'admet pas d'extremum absolu.

25.12 **a.** En posant les matrices $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $N = M^TAM = (n_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, la matrice N est bien symétrique car $(M^TAM)^T = M^TA^TM = N$ puisque $A^T = A$ par hypothèse. Comme N est symétrique, elle peut être décrite par ses coefficients au dessus de la diagonale donc on peut poser $\Phi(M) = (n_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}$. En ce sens, Φ peut être considérée de $\mathbb{R}^{n^2}$ dans $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$. Par définition du produit matriciel, les coordonnées $n_{i,j}$ dépendent polynomialement (de degré 2) des coordonnées $m_{i,j}$. Ainsi, comme toutes les composantes

$n_{i,j}$ sont de classe C^1, d'après le cours, Φ est elle-même de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{n^2}$.

b. La différentielle d'une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ en un point $a \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$, si elle existe, est l'unique application linéaire $d_a f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ telle que $f(a+h) \underset{0}{=} f(a) + d_a f(h) + o(||h||)$.

c. • Pour $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\Phi(I_n+H) - \Phi(I_n) = (I_n+H)^T A(I_n+H) - I_n^T A I_n = A + H^T A + AH + H^T AH - A$ par linéarité de la transposée et en développant le produit. Ainsi, $\Phi(I_n+H) - \Phi(I_n) = H^T A + AH + H^T AH$. L'application $u : M \mapsto M^T A + AM$ est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $S_n(\mathbb{R})$, elle peut donc être vue comme une application linéaire de $\mathbb{R}^{n^2}$ dans $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ comme ci-dessus.

• Prenons le produit scalaire canonique $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2 \mapsto \mathrm{Tr}\,(A^T B) \in \mathbb{R}$ et la norme euclidienne associée $||A||_2 = \sqrt{\mathrm{Tr}\,(A^T A)}$, en notant respectivement $L_i(M)$ et $C_j(M)$ la ligne i et la colonne j de la matrice M, $||AB||_2^2 = \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}\right)^2 = \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} (L_i(A)|C_j(B))^2$. Avec CAUCHY-SCHWARZ, on a l'inégalité $(L_i(A)|C_j(B))^2 \leqslant ||L_i(A)||^2 ||C_j(B)||^2 = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k}^2\right) \times \left(\sum\limits_{\ell=1}^{n} b_{\ell,j}^2\right)$. Par conséquent, on a la majoration $||AB||_2^2 \leqslant \sum\limits_{1\leqslant i,j,k,\ell\leqslant n} a_{i,k}^2 b_{\ell,j}^2 = \left(\sum\limits_{1\leqslant i,k\leqslant n} a_{i,k}^2\right) \times \left(\sum\limits_{1\leqslant j,\ell\leqslant n} b_{\ell,j}^2\right) = ||A||_2^2\,||B||_2^2$. Ainsi, $||AB||_2 \leqslant ||A||_2\,||B||_2$ (c'est une norme d'algèbre). Ainsi, $||H^T AH||_2 \leqslant ||H^T||_2\,||AH||_2 \leqslant ||A||_2\,||H||_2^2$ car $||H^T||_2 = ||H||_2$ et on a bien $\Phi(I_n+H) - \Phi(I_n) - u(H) = H^T AH \underset{0}{=} o(||H||_2)$. D'après la définition de la différentielle, on a donc $d_{I_n}\Phi = u$ donc $\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ d_{I_n}\Phi(H) = H^T A + AH$.

• Pour $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $d_{I_n}\Phi(H) = 0 \iff H^T A + AH = 0 \iff H^T A^T = (AH)^T = -AH \iff AH \in A_n(\mathbb{R})$ (matrices antisymétriques) car A est symétrique. Ainsi, $\mathrm{Ker}(d_{I_n}\Phi) = \{H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid AH \in A_n(\mathbb{R})\}$.

• Comme A est symétrique, pour $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $d_{I_n}\Phi(H) = H^T A + AH = (AH)^T + AH$ est symétrique. Réciproquement, si M est symétrique, comme A est inversible, on peut poser la matrice $H = \dfrac{1}{2}A^{-1}M$ et on a $d_{I_n}\Phi(H) = (AH)^T + AH = \dfrac{M^T}{2} + \dfrac{M}{2} = M$ donc $\mathrm{Im}\,(d_{I_n}\Phi) = S_n(\mathbb{R})$.

d. L'application $f : M \to AM$ est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car A est inversible ($f^{-1} : M \to A^{-1}M$). Comme $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, leurs images réciproques par f le sont aussi. D'après la question précédente, on a $\mathrm{Ker}(d_{I_n}\Phi) = \{H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,|\, AH \in A_n(\mathbb{R})\} = f^{-1}(A_n(\mathbb{R}))$ et aussi $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,|\, AM \in S_n(\mathbb{R})\} = f^{-1}(S_n(\mathbb{R}))$. Ainsi, $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid AM \in S_n(\mathbb{R})\}$ et $\mathrm{Ker}(d_{I_n}\Phi)$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

e. La fonction $\det$ est polynomiale donc continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $\mathbb{R}^*$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. On sait d'après le cours qu'alors $\det^{-1}(\mathbb{R}^*)$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Or $GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$ et $I_n \in GL_n(\mathbb{R})$ donc il existe par définition une boule ouverte $U = B(I_n, r)$ centrée en I_n et de rayon $r > 0$ telle que $U \subset GL_n(\mathbb{R})$.

25.13 **a.** Le carré $C=[0;1]^2$ est composé de trois morceaux : $C_1=\{(x,y)\in C \mid x<y\}$, $C_2=\{(x,y)\in C \mid x>y\}$ et $C_3=\{(x,y)\in C \mid x=y\}$. C_3 est la diagonale du carré C et constitue la frontière commune entre les adhérences des triangles C_1 et C_2. Comme K est polynomiale sur C_1 et C_2, elle y est continue. Par contre, la définition de K en les points de C_3, $K(x,x)=x(1-x)$, ne permet pas de conclure directement à la continuité de K car il y a des expressions différentes de $K(x,y)$ dans C_1 et C_2.

Soit $(x_0,x_0)\in C_3$ et $(x,y)\in C$. On va majorer $|K(x,y)-K(x_0,y_0)|$ selon (x,y).

- si $(x,y)\in C_3$, on a $y=x$ et $|K(x,y)-K(x_0,y_0)|=|x(1-x)-x_0(1-x_0)|=|x-x_0|.|1-(x+x_0)|\leqslant|x-x_0|$ car $x+x_0\in[0;2]$ donc $|K(x,y)-K(x_0,y_0)|\leqslant|x-x_0|\leqslant||(x,y)-(x_0,x_0)||_\infty$.
- si $(x,y)\in C_1$, on a $y>x$ et $|K(x,y)-K(x_0,y_0)|=|x(1-y)-x_0(1-x_0)|=|x-x_0-(x-x_0)y+x_0(x_0-y)|$ donc $|K(x,y)-K(x_0,y_0)|\leqslant|x-x_0|+y|x-x_0|+x_0|y-x_0|\leqslant 3||(x,y)-(x_0,x_0)||_\infty$.
- si $(x,y)\in C_2$, on a $y<x$ et $|K(x,y)-K(x_0,y_0)|=|y(1-x)-x_0(1-x_0)|=|y-x_0-(y-x_0)x+x_0(x_0-x)|$ donc $|K(x,y)-K(x_0,y_0)|\leqslant|y-x_0|+x|x-x_0|+x_0|x-x_0|\leqslant 3||(x,y)-(x_0,x_0)||_\infty$.

Ainsi, $\forall\varepsilon>0,\ \forall(x,y)\in C,\ ||(x,y)-(x_0,x_0)||_\infty\leqslant\frac{\varepsilon}{3}\Longrightarrow|K(x,y)-K(x_0,x_0)|\leqslant\varepsilon$ et la fonction f est continue en (x_0,x_0) donc en tout point de C_3. D'après ce qui précède, K est continue sur le carré $C=C_1\cup C_2\cup C_3$.

b. La surface S est définie localement autour du point $M_0=(x_0,y_0,z_0=K(x_0,y_0))$, comme $(x_0,y_0)\in C_1$, par la relation $S\ :\ z-x(1-y)=z-K(x,y)=f(x,y,z)=0$. Comme f est de classe C^1 car polynomiale et que, en ce point M_0 de S on a $\overrightarrow{\text{grad}}\,f(x_0,y_0,z_0)=(-1+y_0,x_0,1)\neq(0,0,0)$, le point M_0 est régulier dans S et une équation du plan tangent P en M_0 à S est donnée par $P\ :\ (y_0-1)(x-x_0)+x_0(y-y_0)+(z-z_0)=0$ qu'on peut simplifier, puisque $z_0=x_0(1-y_0)=x_0-x_0y_0$, en $P\ :\ (y_0-1)x+x_0y+z=x_0y_0$. Un vecteur non nul normal à P est d'après le cours le vecteur gradient $\overrightarrow{\text{grad}}\,f(x_0,y_0,z_0)=(-1+y_0,x_0,1)$.

25.14 **a.** Pour $n\in\mathbb{N}$, $f_n\ :\ t\mapsto t^ne^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $f_n(t)\underset{+\infty}{=}o\big(e^{-t^2/2}\big)\underset{+\infty}{=}o\Big(\frac{1}{t^2}\Big)$ par croissances comparées donc f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par comparaison aux intégrales de Riemann et I_n existe.

b. Dans $I_{n+2}=\displaystyle\int_0^{+\infty}t^{n+1}(te^{-t^2})dt$, on effectue une intégration par parties en posant $u\ :\ t\mapsto t^{n+1}$ et $v\ :\ t\mapsto-\dfrac{e^{-t^2}}{2}$ qui sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ avec $\lim\limits_{t\to+\infty}u(t)v(t)=0$ par croissances comparées. Ainsi, $I_{n+2}=0+\dfrac{n+1}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty}t^ne^{-t^2}dt=\dfrac{n+1}{2}I_n$.

c. Par parité de $t\mapsto e^{-t^2}$, on a $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=2\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}$ donc $I_0=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. Classiquement, on obtient $I_{2p}=\dfrac{2p-1}{2}I_{2p-2}=\dfrac{2p-1}{2}\times\dfrac{2p-3}{2}I_{2p-4}=\cdots=\dfrac{(2p-1)\times(2p-3)\times\cdots\times 1}{2^p}I_0$ qu'on transforme en $I_{2p}=\dfrac{(2p)(2p-1)(2p-2)(2p-3)\cdots.2.1}{(2p)(2p-2)\cdots.2\times 2^p}I_0=\dfrac{(2p)!}{2^{2p+1}p!}\sqrt{\pi}$.

Comme $I_1=\displaystyle\int_0^{+\infty}te^{-t^2}dt=\Big[-\frac{e^{-t^2}}{2}\Big]_0^{+\infty}=\frac{1}{2}$, de même, $I_{2p+1}=\dfrac{(2p)\times(2p-2)\times\cdots\times 2}{2^p}I_1=\dfrac{p!}{2}$.

d. Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, par linéarité de l'intégrale, comme tout converge et que l'intégrale des fonctions impaires sur $\mathbb{R}$ est nulle, on a $\sqrt{\pi}F(x,y)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}(t^4-2(x+y)t^3+2xyt^2+(x+y)^2t^2-2xy(x+y)t+x^2y^2)e^{-t^2}dt$ puis $\sqrt{\pi}F(x,y)=2I_4+2(2xy+(x+y)^2)I_2+2x^2y^2I_0=\frac{3}{4}\sqrt{\pi}+(2xy+(x+y)^2)\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}+x^2y^2\sqrt{\pi}$ et enfin

$F(x,y) = \frac{3}{4} + \frac{2xy + (x+y)^2}{2} + x^2y^2$. Comme F est polynomiale, elle est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ car toutes ses dérivées partielles à tout ordre sont encore polynomiales.

e. Comme $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 2xy^2 + 2y + x$ et $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 2yx^2 + 2x + y$, (x,y) est un point critique pour F si et seulement si $2xy^2 + 2y + x = 2yx^2 + 2x + y = 0$. Ceci équivaut, en faisant la somme et la différence de ces deux relations, à $(2xy+3)(x+y) = (2xy+1)(x-y) = 0$.

- $2xy + 3 = 2xy + 1 = 0$ est impossible.
- $x + y = x - y = 0$ revient à $x = y = 0$.
- $2xy + 3 = x - y = 0$ conduit à $2x^2 + 3 = 0$ ce qui est impossible car $x \in \mathbb{R}$.
- $2xy + 1 = x + y = 0$ conduit à $2x^2 = 1$ et $y = -x$ donc $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

On a exactement trois points critiques pour F : $M_1 = (0,0)$, $M_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et $M_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Les dérivées partielles secondes de F sont $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) = 2y^2 + 1$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y) = 2x^2 + 1$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y) = 4xy + 2$.

<u>Au voisinage de $M_1 = (0,0)$</u> : la hessienne de F en $(0,0)$ vaut $H = H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et son polynôme caractéristique vaut $\chi_H = X^2 - 2X - 3$ qui admet deux racines de signes opposés car $\det(H) = -3$. Ainsi, $(0,0)$ est un point selle pour F. On pouvait le voir en considérant $F(x,0) = \frac{3}{4} + \frac{x^2}{2} \geqslant \frac{3}{4} = F(0,0)$ et $F(x,-x) = \frac{3}{4} - x^2 + x^4$ donc $F(x,-x) - F(0,0) \underset{0}{\sim} -x^2 < 0$ donc est localement négatif au voisinage de 0 ce qui montre que $F(x,-x) \leqslant F(0,0)$ si x est assez petit.

<u>Au voisinage de M_2</u> : la hessienne de F en M_2 vaut $H' = H_f(M_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_2$ qui est clairement définie positive donc F admet en M_2 un minimum local.

<u>Au voisinage de M_3</u> : la hessienne de F en M_3 vaut $H' = H_f(M_3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_2$ et on a encore un minimum local pour F en M_3. On pouvait le voir en constatant que $F(-x,-y) = F(x,y)$ donc la surface d'équation $z = F(x,y)$ est invariante par la rotation d'angle π autour de la droite d'équation $x = y = 0$ (axe vertical). Comme M_3 est l'image de M_2 par cette rotation, ce qui se passe au voisinage de M_2 se passe aussi au voisinage de M_3. On a d'ailleurs $F(M_2) = F(M_3) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

Mieux, comme $F(x,y) - F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = F(x,y) - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{2xy + (x+y)^2}{2} + x^2y^2 = \frac{(2xy+1)^2}{4} + \frac{(x+y)^2}{2} \geqslant 0$ donc $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ F(x,y) \geqslant F(M_2) = F(M_3)$ donc F admet en M_2 et M_3 un minimum absolu.