♠ ♡

PRÉPARATION ORAUX

PSI 1

MILLÉSIME

2023 / 2024

♢ ♣

TABLE DES MATIÈRES

ORAUX 2024
X

1 *X PSI 2023* Raphaël Déniel I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$, factoriser le polynôme $P = (X+a)^n - (X-a)^n$.

2 *X PSI 2023* Raphaël Déniel II

Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ paire et de classe C^4.

Montrer qu'il existe une fonction $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x^2) = f(x)$.

3 *X PSI 2023* Paul Picard I

Un jeu peut être dans seulement deux états notés 0 et 1. Et on passe de l'un à l'autre par des étapes discrètes numérotées par des entiers naturels.

On passe de l'état 0 à l'état 1 avec une probabilité $p \in]0;1[$.

On passe de l'état 1 à l'état 0 avec une probabilité $q \in]0;1[$.

a. Calculer la probabilité p_n d'être à l'état 1 à l'instant n.

b. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.

4 *X PSI 2023* Paul Picard II

On s'intéresse à l'équation $(E)\ :\ f(x) = f'(1/x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

a. Trouver $(a, b, \alpha, \beta) \in \mathbb{C}^4$ tel que $f : x \mapsto ax^\alpha + bx^\beta$ soit solution réelle non nulle de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Que dire de l'ensemble S des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$?

c. Caractériser entièrement S.

ORAUX 2024
ENS CACHAN PSI

5 *ENS Cachan PSI 2023* Paul Bats et Farès Keraurtret

Soit un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$.

a. Si A est diagonalisable et $P \in \mathbb{C}[X]$, montrer que $P(A)$ est diagonalisable.

b. Si A est diagonalisable à valeurs propres distinctes, quelles sont les matrices inversibles U telles que $U^{-1}AU$ est diagonale ?

c. Si A et B sont simultanément diagonalisables, et que les valeurs propres de B sont toutes distinctes, montre qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A = P(B)$.

d. Si A et B sont simultanément diagonalisables, montrer qu'il existe une matrice $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et deux polynômes P_A et P_B dans $\mathbb{C}[X]$ tels que $A = P_A(C)$ et $B = P_B(C)$.

e. Si A n'est pas diagonalisable et si on note r_λ la multiplicité d'une valeur propre λ de A, montrer qu'on a l'équivalence, pour $P \in \mathbb{C}[X]$: $(P(A)$ diagonalisable$) \iff (\forall \lambda \in Sp(A),\ P'(\lambda) = \cdots = P^{(r_\lambda - 1)}(\lambda) = 0)$.

f. La matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ est-elle un carré dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

g. Montrer, si A est inversible, que A diagonalisable $\iff$ $(\exists k \in \mathbb{N}^*,\ A^k$ diagonalisable$)$.

6 *ENS Cachan PSI 2023* Arthur Biot et Maddie Bisch

Soit un entier $n \geqslant 2$ et $n = p_1^{s_1} \cdots p_r^{s_r}$ sa décomposition en produit de nombres premiers. Pour tout diviseur $d \in [\![1; n]\!]$ de n, on pose $A_d = \left\{ kd \;\middle|\; k \in \left\{1, \cdots, \frac{n}{d}\right\} \right\}$.

Soit l'univers $\Omega = [\![1; n]\!]$ qu'on munit de la probabilité uniforme : pour $A \subset \Omega$, $\mathbb{P}(A) = \dfrac{|A|}{n}$ où $|A| = \text{card}\,(A)$.

On pose $B = \{k \in [\![1; n]\!] \mid \text{pgcd}\,(k, n) = 1\}$ et on note $\varphi(n) = |B|$ le cardinal de B.

a. Soit d et d' deux diviseurs de n premiers entre eux tels que $(d, d') \in [\![1; n]\!]^2$. Montrer que $A_d \cap A_{d'} = A_{dd'}$. En déduire que A_d et $A_{d'}$ sont indépendants.

b. Exprimer B en fonction de $A_{p_1}, \cdots, A_{p_r}$.

c. En déduire une expression de $\varphi(n)$ en fonction de $p_1, \cdots, p_r$.

d. Montrer que si deux entiers n et m de $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ sont premiers entre eux, on a $\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$.

Pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ et on définit $\mathbb{U} = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathbb{U}_n$. Pour un élément z de $\mathbb{U}$, on définit $m_z = \text{Inf}\left\{n \in \mathbb{N}^* \mid z^n = 1\right\}$. Pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n = \{z \in \mathbb{U} \mid m_z = n\}$.

e. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$. Montrer qu'il existe une suite $(z_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{U}^{\mathbb{N}}$ telle que $\displaystyle\lim_{k \to +\infty} z_k = z$.

f. Montrer que P_n est un ensemble fini ; puis que $|P_n| = \varphi(n)$.

g. Montrer que $\mathbb{U} = \displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} P_n$ et que $P_n \cap P_m = \emptyset$ si $n \neq m$.

7 *ENS Cachan PSI 2023* Mathys Bureau

On se donne un réel $p \geqslant 1$. Si $p > 1$, on lui associe $q \in \mathbb{R}$ tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction positive et continue telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} (f(t))^p e^t dt$ converge.

En cas de convergence, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n f(t) dt$.

a. Soit $t \in]0;1[$, $(u, v) \in (\mathbb{R}_+)^2$, montrer que $u^t v^{1-t} \leqslant tu + (1-t)v$. Indication : on pourra utiliser une convexité ou montrer que $\forall u \in \mathbb{R}_+,\ \forall t \in]0;1[,\ u^t \leqslant tu + (1-t)$.

b. Soit $A \in \mathbb{R}_+$, $g, h : [0;A] \to \mathbb{R}$ continues. Montrer que $\displaystyle\int_0^A |g(t)h(t)| dt \leqslant \frac{1}{p}\int_0^A |g(t)|^p dt + \frac{1}{q}\int_0^A |h(t)|^q dt$ si $p > 1$. En déduire que $\displaystyle\int_0^A |g(t)h(t)| dt \leqslant \left(\int_0^A |g(t)|^p\right)^{1/p} \times \left(\int_0^A |h(t)|^q\right)^{1/q}$.

c. Si $p > 1$, montrer que u_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et qu'il existe une constante $K \in \mathbb{R}_+$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant K\left(\dfrac{p}{q}\right)^n ((nq)!)^{1/q}$. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} |u_n|^{-1/n}$ diverge.

d. Si $p = 1$, montrer que $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} |u_n|^{-1/n}$ diverge.

8 *ENS Cachan PSI 2023* Antoine Campos

Soit un entier $m \geqslant 2$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $A^{(n)} = (a_{i,j}^{(n)})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $a_{i,j}^{(n)} = \dfrac{1}{i+j-1}$.

a. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{\sqrt{k(m-k)}} \geqslant \int_1^{m-1} \frac{1}{\sqrt{x(m-x)}} dx$.

b. Calculer $\displaystyle\int_1^{m-1} \frac{1}{\sqrt{x(m-x)}}$. Indication : on pourra poser $x = \dfrac{m}{1+t^2}$.

c. Montrer que si $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifie $V \neq 0$, alors $V^T A^{(n)} V > 0$. En déduire que $Sp(A) \subset \mathbb{R}_+^*$.

9 *ENS Cachan PSI 2023* Rémi Darrieumerle

Soit $E = C^0([0;1], \mathbb{R})$. On considère l'application T telle que $\forall f \in E,\ \forall x \in \mathbb{R},\ T(f)(x) = \displaystyle\int_0^x f(t) dt$.

Pour $f \in \mathbb{E}$, on note $||f|| = \displaystyle\sup_{x \in [0;1]} |f(x)|$.

Pour $f \in E$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x, y) \in [0;1]^2$, on note $F_n(x, y) = \displaystyle\int_0^y \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) dt$.

a. Montrer que F_n est de classe C^1 sur $[0;1]^2$.

b. Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto F_n(x, x)$.

c. Majorer $||T^n(f)||$ en fonction de $||f||$.

d. Pour $f \in E$, on définit $h = f - T(f)$. Exprimer la fonction f comme somme d'une série de fonctions qui converge normalement.

e. Pour $g \in E$, montrer que l'équation $(E_g)\ :\ g = f - T(f)$ possède une unique solution dans E.

10 *ENS Cachan PSI 2023* Raphaël Déniel

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N,\ u_n > 0,\ v_n > 0$.
Pour tout entier $n \geqslant N$, on pose $w_n = v_n - \dfrac{v_{n+1}u_{n+1}}{u_n}$.

a. On suppose que $\exists c \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall n \geqslant N,\ w_n \geqslant c$ et que $\sum\limits_{n\geqslant N} \dfrac{1}{v_n}$ converge, montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

b. On suppose que $\forall n \geqslant N,\ w_n \leqslant 0$ et que $\sum\limits_{n\geqslant N} \dfrac{1}{v_n}$ diverge, montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge.

c. On suppose que $\exists c \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall n \geqslant N,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1 - \dfrac{1+c}{n}$, montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

d. On suppose que $\forall n \geqslant N,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1 - \dfrac{1}{n}$, montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge.

e. Soit $A \in \mathbb{R}$, $s > 1$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée tels que $\forall n \geqslant N,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{A}{n} + \dfrac{f(s)}{n^s}$. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge si et seulement si $A > 1$.

f. Soit $\alpha > 0$, montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left(\dfrac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n}\right)^{\alpha}$ converge.

11 *ENS Cachan PSI 2023* Marius Desvalois et Elae Terrien

Soit $c \in \mathbb{R}_+^*$, $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe C^1, on considère l'équation $(E)\ :\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + c\dfrac{\partial u}{\partial x} = f(x,t)$ et son équation homogène associée $(E_0)\ :\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + c\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$. On dit que u vérifie les conditions $(*)$ si u est solution de (E) avec la condition initiale $u(x,0) = u_0(x)$.

a. Montrer que l'unique solution de (E_0) vérifiant $u(x,0) = u_0(x)$ est $u : (x,t) \mapsto u_0(x - ct)$.

b. Montrer que $u : (x,t) \mapsto u_0(x_0) + \displaystyle\int_0^t f(x_0 + c\theta, \theta)d\theta$ vérifie $(*)$ si $x = x_0 + ct$.

c. En déduire que l'unique fonction u vérifiant $(*)$ est $u : (x,t) \mapsto u_0(x-ct) + \displaystyle\int_0^t f(x - c(t-\theta), \theta)d\theta$.

d. Monter que si $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est de classe C^2, on a $\left(\dfrac{\partial}{\partial t} + c\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\left(\dfrac{\partial u}{\partial t} - c\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

e. En déduire que toute solution de classe C^2 de $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ est, avec des fonctions u_1 et u_2 de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, de la forme $u : (x,t) \mapsto u_1(x-ct) + u_2(x+ct)$.

On dit que $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe C^2 vérifie (1) si $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,\ u(x,0) = g(x)$ et $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = h(x)$ où g est de classe C^1 et h de classe C^0. Soit u vérifiant (1). On pose $v = \dfrac{\partial u}{\partial t} - c\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

f. Montrer que v est solution de $(*)$ où on donnera la fonction f et la condition initiale u_0.

g. Exprimer alors $v(x,t)$ en fonction des données du problème (1).

h. Montrer que $u(x,t) = g(x+ct) + g(x-ct) + \displaystyle\int_{x-ct}^{x+ct} h(u)du$.

12 *ENS Cachan PSI 2023* Alban Dujardin I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\mathrm{Sp}(A) \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z - a_{i,i}| \leqslant \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}| \right\}$.
Indication : écrire le système $Au = \lambda u$ en une ligne i quelconque.

13 *ENS Cachan PSI 2023* Alban Dujardin II

Soit $a > 0$ et, en cas de convergence, $I(a) = \int_0^{+\infty} \exp\left(-t^2 - \frac{a^2}{t^2}\right) dt$ et $J(a) = \int_0^{+\infty} \frac{a}{t^2} \exp\left(-t^2 - \frac{a^2}{t^2}\right) dt$.

On rappelle la valeur de l'intégrale de Gauss : $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

a. Montrer l'existence de $I(a)$ et $J(a)$.

b. Montrer que $I(a) = J(a)$.

c. Montrer que $I(a) = \frac{e^{-2a}}{2} \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{a}{t^2}\right) \exp\left(-\left(t - \frac{a}{t}\right)^2\right) dt$.

d. En déduire que $I(a) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2a}$.

14 *ENS Cachan PSI 2023* Alban Dujardin III

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = -\mathrm{id}_E$.

a. Donner un exemple de tel endomorphisme u si $\dim(E) = 2$.

b. Montrer que u n'a aucune valeur propre réelle. Montrer que $\dim(E) = 2p$ est pair.

c. Montrer l'existence de $(e_1, \cdots, e_p) \in E^p$ telle que $\mathcal{B} = (e_1, u(e_1), \cdots, e_p, u(e_p))$ est une base de E.

15 *ENS Cachan PSI 2023* Juan Dupierris I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et U un convexe de $\mathbb{R}^n$.

a. Soit $f, g : U \to \mathbb{R}$ convexe. On définit $h : U \to \mathbb{R}$ par $h(v) = \mathrm{Max}\big(f(v), g(v)\big)$. Montrer que h est convexe.

Dans la suite, on prend $n = 2$ et on considère $F : U \to \mathbb{R}$ convexe.
Pour $y \in \mathbb{R}$, quand $C_y = U \cap (\mathbb{R} \times \{y\})$ est non vide, on pose $f(y) = \sup_{x \in C_y} (F(x, y))$.

b. Montrer que f est définie sur un convexe C et que f est convexe sur C.

c. Déterminer C et f dans les trois cas suivants :

- $F : U = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $F(x, y) = xy + ax + by$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
- $F : U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $F(x, y) = xy - \frac{1}{x}$.
- $F : U = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $F(x, y) = xy - e^x$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

16 *ENS Cachan PSI 2023* Juan Dupierris II

Montrer, pour $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1, que f convexe $\iff \forall (u, v) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ f(v) \geqslant f(u) + (\nabla(f)(u))^T (v - u)$.

17 *ENS Cachan PSI 2023* Juan Dupierris III

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(A, B) \in (S_n^+(\mathbb{R}))^2$.

a. Si A inversible, montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale avec $P^T A P = I_n$ et $P^T B P = D$.

b. Montrer que $\forall t \in [0; 1],\ \det(tA + (1-t)B) \geqslant \big(\det(A)\big)^t \big(\det(B)\big)^{1-t}$.

c. En déduire la concavité de $\ln \circ \det$ sur $S_n^+(\mathbb{R})$.

18 *ENS Cachan PSI 2023* Lilian Dupouy

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \cdots, X_n$ des variables aléatoires discrètes réelles admettant un moment d'ordre 2. On pose $E = \mathrm{Vect}(X_1, \cdots, X_n)$ et on définit $f : E^2 \to \mathbb{R}$ par $f(X, Y) = \mathbb{E}(XY)$.

On pose $G = \{X \in E \mid \mathbb{E}(X^2) = 0\}$ et on considère un sous-espace vectoriel F de E tel que $E = F \oplus G$.

a. Montrer que f est bilinéaire, symétrique et positive. Est-elle définie positive ?

b. La fonction $f|_F$ est-elle un produit scalaire sur F ?

c. Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour $(f, g) \in F^2$.

d. Soit Z une variable aléatoire discrète réelle admettant un moment d'ordre 2 et telle que $\mathbb{E}(Z^2) > 0$. Montrer que $\mathbb{P}(Z > 0) \geqslant \dfrac{\mathbb{E}(Z)^2}{\mathbb{E}(Z^2)}$.

On note G un graphe non orienté, S l'ensemble de ses sommets (numérotés de 1 à n). Chaque sommet peut être relié aux autres, de manière indépendante, la probabilité d'une liaison est $p_n \in]0; 1[$.

Soit i et j deux sommets distincts de ce graphe, on note $X_{i,j} = 1$ si une arête existe entre les sommets i et j et $X_{i,j} = 0$ sinon : la variable aléatoire $X_{i,j}$ suit donc une loi de Bernoulli de paramètre p_n.

On note $Z_n = \mathrm{card}\big(\{i \in [\![1; n]\!] \mid \forall j \in [\![1; n]\!] \setminus \{i\},\ X_{i,j} = 0\}\big)$ le nombre de sommets isolés (aucune arête ne part de ce sommet).

e. On prend un sommet i, quelle est la loi régissant le nombre d'arêtes issues de ce sommet ?

f. Montrer que $\mathbb{E}(Z) = n(1 - p)^{n-1}$.

g. Comportement asymptotique de $\mathbb{E}(Z)$ quand n tend vers $+\infty$ en fonction de c.

h. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(Z_n > 0) = 0$ si $\exists c > 1,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geqslant n_0,\ p_n \geqslant c\dfrac{\ln(n)}{n}$ (on écrit $p_n \gg \dfrac{\ln(n)}{n}$).

i. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(Z_n > 0) = 1$ si $\exists c < 1,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geqslant n_0,\ p_n \leqslant c\dfrac{\ln(n)}{n}$ (on écrit $p_n \ll \dfrac{\ln(n)}{n}$).

19 *ENS Cachan PSI 2023* Tom Graciet

On admet le théorème de Heine : "soit $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ continue, alors f est uniformément continue, c'est-à-dire $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall (x, y) \in [a; b]^2,\ |x - y| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$".

Dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geqslant 2}$ telles que :

- $\forall n \geqslant 2,\ X_n(\Omega) = \left\{0, \dfrac{1}{n}, \cdots, \dfrac{n-1}{n}\right\}$.
- $\forall n \geqslant 2,\ \forall k \in [\![0; n-1]\!],\ \mathbb{P}\Big(X_n = \dfrac{k}{n}\Big) = \alpha_n\big(e^{k/n} - 1\big)$ avec $\alpha_n \in \mathbb{R}_+$.

a. Calculer α_n en fonction de n. Donner un équivalent de α_n quand n tend vers $+\infty$.

b. Calculer la fonction de répartition F_n de X_n sur $\mathbb{R}$.

c. Montrer que $(F_n)_{n \geqslant 2}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction continue f à déterminer.

d. Montrer que $(F_n)_{n \geqslant 2}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

Indication : utiliser la croissance de F_n et le théorème de Heine.

20 *ENS Cachan PSI 2023* Antoine Jeanselme

Pour $k \in \mathbb{N}$ et $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose, $G_k(x_1, x_2) = \int_0^1 t^k e^{x_1 t + x_2 t^2} dt$ et $H_k(x_1, x_2) = \dfrac{G_k(x_1, x_2)}{G_0(x_1, x_2)}$ en cas de convergence. On définit aussi, pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $F(x_1, x_2) = \ln\left(G_0(x_1, x_2)\right) - H_1(a, b)x_1 - H_2(a, b)x_2$.

a. Montrer que G_k et H_k admettent des dérivées partielles et que $\dfrac{\partial H_k}{\partial x_i} = H_{k+i} - H_k H_i$ pour $i \in \{1, 2\}$.

b. Montrer que (a, b) est un point critique de F.

On admet que F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

c. Montrer que $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(x_1, x_2) = \dfrac{1}{G_0(x_1, x_2)} \displaystyle\int_0^1 (s^i - H_j(x_1, x_2)(s^i - H_i(x_1, x_2))e^{x_1 s + x_2 s^2} ds$ si $i \neq j$.

Pour $(u_1, u_2) \neq (0, 0) \in \mathbb{R}^2$, soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h(t) = F(a + u_1 t, b + u_2 t)$.

d. Montrer que $h'(0) = 0$ et $\forall t \in \mathbb{R},\ h''(t) > 0$.

e. En déduire que F admet en (a, b) un minimum local.

f. F admet-elle d'autres extremums ?

21 *ENS Cachan PSI 2023* Paul Picard

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Si $g \in \mathcal{L}(E)$, on pose $\varphi_f(g) = f \circ g - g \circ f$.

a. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $g \in \mathcal{L}(E)$, calculer $\varphi_f^n(g)$.

b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ f^{n+1} \circ g - g \circ f^{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f^k \circ (f \circ g - g \circ f) \circ f^{n-k}$.

c. On suppose que $f \notin GL(E)$, montrer que f nilpotente $\iff$ φ_f nilpotente.

d. Montrer que si f n'admet qu'une seule valeur propre, alors φ_f est nilpotente. La réciproque est-elle vraie ?

22 *ENS Cachan PSI 2023* Chloé Vagner

On note C_0 l'ensemble des suites réelles ayant une limite nulle : $C_0 = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0\}$.

Soit $||a||_\infty = \operatorname{Sup}\limits_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$ si $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\Phi : C_0 \to C_0$ définie par $\Phi(a) = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $b_n = \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$.

a. Montrer que Φ est continue et qu'elle conserve la positivité.

Soit $a \in C_0$ telle que $(a^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge uniformément et la suite de suites $(a^p)_{p\in\mathbb{N}} \in (C_0)^{\mathbb{N}}$ définie par $a^0 = a$ et $\forall p \in \mathbb{N},\ a^{p+1} = \Phi(a^p)$.

b. Montrer que l'unique point fixe de Φ est la suite nulle.

c. Montrer que $(a^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la suite constante $(a_0)_{n\in\mathbb{N}}$.

d. En déduire que $(a^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge uniformément si et seulement si $a_0 = 0$.

Si $a \in C_0$, on lui associe $f_a : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$.

e. Que peut-on dire du rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} a_k x^k$?

f. Montrer que $f_{Phi(a)}$, qu'on note Tf_a, vérifie $Tf_a(x) = \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^x \dfrac{f_a(t)}{1-t} dt$.

g. En posant $y = \dfrac{x}{1-x}$ pour $x \in]0; 1[$, montrer que $Tg(x) = \dfrac{1}{y} \displaystyle\int_0^y g(t)(1-t)dt$ où $g : t \mapsto (1-t)f_a(t)$.

23 *ENS Cachan PSI 2023* Antoine Vallade

Soit $f \in C^0([a;b], \mathbb{C}) = E$, F un sous-espace vectoriel de dimension n de E.

a. Montrer que $\exists q \in F,\ ||f - q||_{\infty,[a;b]} = \underset{p \in F}{\mathrm{Inf}} ||f - p||_{\infty,[a;b]}$ qu'on note $d(f, F)$.

Soit des réels $t_1, \cdots, t_n$ tels que $a \leqslant t_1 < \cdots < t_n \leqslant b$.
Pour tout entier $i \in [\![1;n]\!]$, on définit $\delta_i : F \to \mathbb{C}$ par $\delta_i(g) = g(t_i)$.
On définit les deux assertions suivantes :

(i) $\exists! q \in F,\ ||f - q|| = d(x, F)$.

(ii) $\forall p \in F,\ (\forall i \in [\![1;n]\!],\ p(t_i) = 0) \Longrightarrow p = 0$.

b. Montrer que $(\delta_1, \cdots, \delta_n)$ est liée.

Il existe donc $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \neq (0, \cdots, 0) \in \mathbb{C}^n$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_i = 0$.

c. Soit $q_0 \in F$ telle que $q_0 \neq 0$ et $\forall i \in [\![1;n]\!],\ q_0(t_i) = 0$. Soit $w \in F$ telle que $\forall i \in [\![1;n]\!],\ w(t) = \dfrac{\overline{\alpha_i}}{|\alpha_i|}\delta_i(t)$ si $\alpha_i \neq 0$ et $w(t_i) = 0$ sinon et $||w|| \leqslant 1$. Soit $f(t) = w(t)\left(1 - \dfrac{|q_0(t)|}{2||q_0||}\right)$. Calculer $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i(h(t_i) - q_0(t_i))$. En déduire que $d(h, F) \geqslant 1$, puis que $d(h, F) = 1$. Montrer que $\forall c \in \left[0; \dfrac{1}{2||q_0||}\right],\ ||f - q|| = ||f - q_0||$.
Que vient-on de prouver ?

d. Montrer la réciproque.

ORAUX 2024
CENTRALE MATHS 1

24 *Centrale Maths1 PSI 2023* Paul Bats

On définit la fonction $f : I = \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[\to \mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\sin(x) + 1}{\cos(x)}$.

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{N}[X]$ tel que $\forall x \in I,\ f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(\sin(x))}{\cos^{n+1}(x)}$.

b. Montrer que la série de Taylor de f converge sur I.

c. Montrer que f est développable en série entière sur I.

Questions de cours :

- Donner le développement en série entière de Arctan.
- Donner la formule de Taylor reste intégral.
- Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et $g : t \mapsto f\big(\cos(t), \mathrm{Arctan}(t), 2^t\big)$. Calculer $g'(t)$.
- Rappeler le théorème des valeurs intermédiaires.

25 *Centrale Maths1 PSI 2023* Paul-Antoine Baury-Carpentier

On considère le système $(E)\ :\ y' = 2xy + 1$ et $y(0) = 0$.

a. Justifier qu'il existe une unique solution f de (E) définie sur $\mathbb{R}$ et que f est impaire.

b. Trouver le développement en série entière de f sur $\mathbb{R}$.

c. Donner une expression de f sous forme intégrale.

d. En déduire un autre développement en série entière de f.

26 *Centrale Maths1 PSI 2023* Bader Ben Amira

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique avec sa base canonique $\mathcal{B}_0$.
Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A$.
On définit les deux endomorphismes p et q de E tels que $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(p)$ et ${}^tA = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(q)$.

a. Montrer que $\forall (x, y) \in E^2,\ \big(p(x)|y\big) = \big(x|q(y)\big)$.

b. Soit $\mathcal{B} = (v_1, \cdots, v_n)$ une base orthonormée de E. Montrer que $\mathrm{Tr}\ (q \circ p) = \sum\limits_{k=1}^{n} ||p(v_k)||^2$.

c. Montrer que si p est un projecteur orthogonal, $\mathrm{Tr}\ (q \circ p) = \mathrm{Tr}\ (p)$.

d. Dans le cas général, montrer que $\mathrm{Tr}\ (q \circ p) \geqslant \mathrm{Tr}\ (p)$.

e. Montrer que $\mathrm{Tr}\ (q \circ p) = \mathrm{Tr}\ (p) \iff p$ est orthogonal.

27 *Centrale Maths1 PSI 2023* Arthur Biot

Pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(xt)}{t(1 + t^2)}\,dt$.

a. Donner l'ensemble de définition D de F et montrer que F est continue sur D.

b. Montrer que F est de classe C^1 sur D et calculer $F'(x)$.

c. En déduire une expression simple de $F(x)$ pour $x \in D$.

28 *Centrale Maths1 PSI 2023* Maddie Bisch

a. Existe-t-il une suite géométrique $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $g_{n+1} - g_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{g_n}}$?

b. Existe-t-il $(A,\alpha) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tel qu'en posant $v_n = An^\alpha$, on ait $v_{n+1} - v_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{v_n}}$?

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{\sqrt{u_n}}$.

Soit $\beta > 0$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, le réel $p_n = \left(\dfrac{1}{u_n}\right)^\beta - \left(\dfrac{1}{u_{n+1}}\right)^\beta$.

c. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} p_n$ est une série convergente à termes positifs telle que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$.

d. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sqrt{n} \leqslant u_n \leqslant 2n$.

e. Déterminer les valeurs de β pour lesquelles $\sum\limits_{n\geqslant 0} p_n u_n$ est convergente.

29 *Centrale Maths1 PSI 2023* Rebecca Blé et Lilian Dupouy

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : x \mapsto \dfrac{(-1)^n n}{n^2 + |x|}$.

a. Étudier la convergence simple de $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$.

b. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante positive, montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant (-1)^n \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k a_k \leqslant a_n$.

c. Montrer la convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$.

Indication : poser $N(x) = \mathrm{Inf}\{n \in \mathbb{N}^* \mid \forall k \geqslant n,\ |f_{k+1}(x)| \leqslant |f_k(x)|\}$.

Questions de cours :

- Rappeler le théorème des valeurs intermédiaires.

30 *Centrale Maths1 PSI 2023* Mathys Bureau et Pierre Dobeli

Pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{1+t^2}\,dt$.

a. Déterminer le domaine de définition D de f.

b. Pour $x \in D$, on pose $g(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^x}{1+t^2}\,dt$. Montrer que g est développable en série entière sur D.

c. Montrer que f est développable en série entière sur D.

31 *Centrale Maths1 PSI 2023* Antoine Campos

Soit $S = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$. On note, pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $D(a,b) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

a. Montrer que S est semblable à une matrice $D(a,b)$ que vous déterminerez.

b. Montrer que S est semblable à une matrice à diagonale nulle que vous déterminerez.

c. En étudiant l'application $\phi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $\phi(M) = D(1,2)M - MD(1,2)$, montrer qu'il existe un couple $(C,D) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2$ tel que $S = CD - DC$.

32 *Centrale Maths1 PSI 2023* Rémi Darrieumerle

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une solution sur I de l'équation $(E)\ :\ y' = y^2 + y + 1$.

a. Montrer la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{u^2+u+1}$ et déterminer sa valeur.

b. Montrer que I est borné.

c. Trouver une expression de f à l'aide de fonctions usuelles.

33 *Centrale Maths1 PSI 2023* Raphaël Déniel

Pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \cos(n^2 x) e^{-n}$.

On admet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que l'on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n!$.

a. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

b. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, calculer $f^{(4p)}(0)$.

c. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\displaystyle\int_0^{8p} t^{8p} e^{-t} dt \leqslant \sum_{n=1}^{8p} n^{8p} e^{-n}$ et que $\displaystyle\int_{8p}^{+\infty} t^{8p} e^{-t} dt \leqslant \sum_{n=8p}^{+\infty} n^{8p} e^{-n}$.

d. Montrer, pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$, que $\displaystyle\sum_{p \geqslant 0} \frac{f^{(4p)}(0)\, r^{4p}}{(4p)!}$ diverge.

e. Que vaut le rayon de convergence de la série de TAYLOR de la fonction f ?

34 *Centrale Maths1 PSI 2023* Marius Desvalois

Soit $E = \mathbb{C}^4$, $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que $u^2 = v^2 = \mathrm{id}_E$ et $u \circ v = -v \circ u$.

a. Montrer que $\mathrm{Tr}\ (u) = \mathrm{Tr}\ (v) = 0$.

b. Montrer que u est diagonalisable et que -1 et 1 sont valeurs propres doubles de u.

c. Soit (x, y) une base de $E_1(u)$. Montrer que la famille $(v(x), v(y))$ est une base de $E_{-1}(u)$ et que la famille $(x, y, v(x), v(y))$ est une base de E.

d. Montrer que $u \circ v$ est diagonalisable et donner les éléments propres de $u \circ v$.

35 *Centrale Maths1 PSI 2023* Alban Dujardin I

Pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(tx)}{t(1+t^2)} dt$.

a. Donner l'ensemble de définition D de F.

b. Montrer que F est de classe C^1 sur $[0; \infty[$.

c. En déduire une expression simple de $F(x)$ pour $x \in D$.

b. Déterminer la valeur de $J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln\big(\sin(\theta)\big) d\theta$.

36 *Centrale Maths1 PSI 2023* Alban Dujardin II

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que f admette un minimum local en (x_0, y_0).

Déterminer le signe du laplacien $\Delta f(x_0, y_0)$.

37 *Centrale Maths1 PSI 2023* Juan Dupierris

On étudie un dé équilibré qui comporte quatre faces : une marquée 0, deux marquées 1 et une marquée 2.

On lance $n \in \mathbb{N}^*$ fois ce dé et on note X_n (resp. Y_n) le nombre de 1 (resp. 0) obtenus.

a. Donner les lois de X_n et Y_n. Quelles sont leurs espérances ?

b. Donner la loi de $X_n + Y_n$.

c. Donner la loi de (X_n, Y_n).

d. Donner la covariance de X_n et Y_n.

38 *Centrale Maths1 PSI 2023* Olivier Farje

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et une urne avec initialement N boules rouges. On tire successivement dans l'urne :

Si on tire une boule rouge, on la remplace par une verte.

Si on tire une boule verte, on la remet dans l'urne.

On note X_p le nombre de boules rouges dans l'urne à l'issue du p-ième tirage. On pose $X_0 = N$.

On note Y le rang où on enlève la dernière boule rouge ($Y = 0$ si ce rang n'existe pas).

a. Montrer que $\forall n \geqslant 0,\ \forall k \geqslant 0,\ \mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \dfrac{N-k}{N}\mathbb{P}(X_n = k) + \dfrac{k+1}{N}\mathbb{P}(X_n = k+1)$.

b. En déduire une relation entre $\mathbb{E}(X_{n+1})$ et $\mathbb{E}(X_n)$.

c. Donner $\mathbb{E}(X_n)$ en fonction de n et N et en déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n \geqslant 1)$ et de $\lim\limits_{N\to+\infty} \dfrac{\mathbb{E}(X_N)}{N}$.

d. Montrer que $(Y = 0) \subset \displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} (X_k \geqslant 1)$, puis en déduire la valeur de $\mathbb{P}(Y = 0)$.

39 *Centrale Maths1 PSI 2023* Jonathan Filocco

Pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on note $\varphi(x) = e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t}\cos(t)dt$ et $\psi(x) = e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t}\sin(t)dt$.

a. Justifier l'existence de $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ pour tout x et en donner les valeurs.

b. Déterminer les solutions bornées sur $\mathbb{R}$ de l'équation $(E)\ :\ y' - y + \cos(x) = 0$.

Soit la fonction $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_0(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_{n+1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_{n+1}(x) = e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t} f_n(t)dt$.

c. Étudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

40 *Centrale Maths1 PSI 2023* Clément Gallice

Soit E l'ensemble des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $P \in E$, on pose $L(P) : x \mapsto e^x \displaystyle\int_{-\infty}^{x} P(t)e^{-t}dt$.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que f est intégrable en $-\infty$.

a. Montrer que $F : x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(x)$ pour tout réel x.

b. Montrer que L est un endomorphisme de E.

c. Déterminer les éléments propres de L.

41 *Centrale Maths1 PSI 2023* Tom Graciet et Chloé Vagner

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par $f(x_1, \cdots, x_n) = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right) \exp\left(-\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2\right)$.

a. Trouver les points critiques de f_n.

b. On note a_n le point critique dont les coordonnées sont toutes strictement positives. Montrer que f_n admet un extremum local en a_n.

c. Que se passe-t-il en les autres points critiques ?

42 *Centrale Maths1 PSI 2023* Gabriel Hofman

On pose $F = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & x \end{pmatrix} \;\middle|\; (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

a. Quelles sont les matrices de F qui sont diagonalisables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

b. Quelles sont les matrices de F dont l'endomorphisme canoniquement associé est un projecteur orthogonal ?

Soit X, Y, Z des variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi uniforme sur $[\![1; 6]\!]$.

c. Quelle est la probabilité que $M = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & X \end{pmatrix}$ soit inversible ?

43 *Centrale Maths1 PSI 2023* Antoine Jeanselme

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : [0; 1] \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{(1+x)^n}$.

a. Montrer la convergence simple de $\sum\limits_{n \geqslant 0} f_n$ sur $[0; 1]$.

b. Est-ce qu'il y a convergence uniforme de $\sum\limits_{n \geqslant 0} f_n$ sur $]0; 1]$?

c. Existence et calcul de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x) dx$.

44 *Centrale Maths1 PSI 2023* Fares Kerautret

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n z^n$ ait un rayon de convergence $R = +\infty$.

On définit alors l'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ par $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

a. Montrer que $\forall r > 0,\ \forall p \in \mathbb{N},\ \int_0^{2\pi} f\left(re^{it}\right) e^{ipt} dt = 2\pi r^p a_p$.

b. Si f est bornée sur $\mathbb{C}$, montrer que $\exists M \in \mathbb{R}_+,\ \forall r > 0,\ \forall p \in \mathbb{N},\ |a_p| \leqslant \dfrac{M}{r^p}$. En déduire que f est constante.

c. S'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ et $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tels que $\forall z \in \mathbb{C},\ |f(z)| \leqslant \alpha |z|^q + \beta$, montrer que f est polynomiale.

d. Si $\forall z \in \mathbb{C},\ |f(z)| \leqslant e^{\mathrm{Re}\,(z)}$, montrer qu'il existe $k \in \mathbb{C}$ tel que $\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = ke^z$.

45 *Centrale Maths1 PSI 2023* Esteban Maurer

Pour une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on pose $M = \mathrm{Max}\left(|a|, |d|, \dfrac{|b| + |c|}{2}\right)$.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A et $X_0 = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre associé.

a. On suppose que $b = c$, quelle condition nécessaire et suffisante doivent satisfaire les coefficients de A pour que A soit une matrice symétrique positive.

b. Calculer $X_0^T A X_0$. En déduire que $|\lambda| \leqslant 2M$.

46 *Centrale Maths1 PSI 2023* Sacha Meslier

Soit un entier $q \geqslant 2$ et deux familles $(a_1, \cdots, a_q)$ et $(b_1, \cdots, b_{q-1})$ de réels strictement positifs. On définit alors la matrice $A = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & a_q \\ b_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{q-1} & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$.

a. Justifier que 0 n'est pas valeur propre de A.

b. Montrer que A^q a tous ses coefficients strictement positifs.

c. Donner la dimension des sous-espaces propres associés aux valeurs propres complexes de A.

d. Montrer que A admet une unique valeur propre strictement positive.

47 *Centrale Maths1 PSI 2023* Antoine Notelle-Maire

Soit $I = [0; 1]$ et l'équation (E) : $u(x) = 1 + \int_0^x u\big(t - t^2\big)dt$ d'inconnue $u \in C^0(I, \mathbb{R})$.

On définit la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur I par $u_0(x) = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n(t - t^2)dt$.

a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ 0 \leqslant u_{n+1}(x) - u_n(x) \leqslant \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.

b. On pose $f_n = u_{n+1} - u_n$. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur I.

c. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction u.

d. Prouver que u est solution de (E). Résoudre entièrement (E).

48 *Centrale Maths1 PSI 2023* Paul Picard

a. Tracer dans le plan la courbe Γ d'équation $y^2 = 4x$.

b. Déterminer une équation de la tangente T_t en un point $M_t = (t^2, 2t)$ de Γ.

c. Déterminer les coordonnées du point N_t qui est l'intersection de T_t et de la droite D passant par le point $A = (-3, 2)$ et parallèle à (Ox).

d. Quel lieu parcourt le point N_t quand t varie ?

49 *Centrale Maths1 PSI 2023* Maxence Prieur

Pour $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$, on pose $< P, Q >= \sum\limits_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1)$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

a. Montrer que $< ., . >$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

b. Montrer que $\big((X-1)^k\big)_{k\in[\![0;n]\!]}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

c. Déterminer $(\mathbb{R}_n[X])^\perp$.

50 *Centrale Maths1 PSI 2023* Nathan Roy

Pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $F(x) = \int_1^{+\infty} \dfrac{dt}{t^{x+1} + t + 1}$.

a. Donner le domaine de définition D de F.

b. Montrer que F est dérivable sur D et donner sa dérivée.

c. Montrer que $F(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(3)}{2x}$.

51 *Centrale Maths1 PSI 2023* Marie-Lys Ruzic

Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et le vecteur $b = (1,1,1) \in \mathbb{R}^3$ associé à B. Pour $x \in \mathbb{R}^3$, on lui associe canoniquement le vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On définit l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ pas $f(x) = ||u(x) - b||^2$.

a. L'équation $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ admet-elle une solution ?

b. Montrer que f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^3$.

c. Ce minimum est-il atteint en un unique point de $\mathbb{R}^3$?

d. Montrer l'équivalence entre (i) : $u(x) - b \in (\mathrm{Im}(u))^\perp$ et (ii) : $A^T AX = A^T B$.

e. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f admette son minimum en $x \in \mathbb{R}^3$.

52 *Centrale Maths1 PSI 2023* Arthur Séguette

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(n+x)}{(n+x)\sqrt{x}} dx$.

a. Vérifier que la suite $(I_n)_{n \geqslant 0}$ est bien définie.

b. Déterminer la limite de $(I_n)_{n \geqslant 0}$.

c. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(n+x)}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

d. En déduire un équivalent de I_n.

53 *Centrale Maths1 PSI 2023* Elae Terrien

a. Pour tout réel $x \in]-1;+\infty[$, montrer la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^x \ln(t) dt}{t-1}$.

On définit $H :]-1;+\infty[\to \mathbb{R}$ par $H(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x \ln(t) dt}{t-1}$.

b. Montrer que H est décroissante sur $]-1;+\infty[$.

c. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} H(x) = 0$.

d. Donner un équivalent simple de $H(x)$ quand x tend vers -1^+. Indication : considérer $H(x) - H(x+1)$.

e. Donner un équivalent simple de $H(x)$ quand x tend vers $+\infty$. Indication : considérer $H(x) - H(x+1)$.

54 *Centrale Maths1 PSI 2023* Antoine Vallade

Soit $\lambda > 0$ et X une variable aléatoire sur un espace probabilisé suivant la loi de Poisson de paramètre λ. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes sur le même espace probabilisé et suivant toutes la loi de X. On pose $N = \mathrm{Inf}\{n \in \mathbb{N}^* \mid X_n > X_0\}$.

a. Montrer à l'aide de la formule de Taylor reste intégral que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X > k) \leqslant \dfrac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}$.

b. La variable aléatoire N admet-elle une espérance finie ?

ORAUX 2024
MINES

55 *Mines PSI 2023* Paul Bats I

En cas de convergence, pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+x)}$.

a. Trouver le domaine de définition D de f.

b. Montrer que f est de classe C^∞ sur D.

c. Pour $x \in D$, calculer $xf(x) - f(x+1)$.

d. En déduire des équivalents de f en 0^+ et en $+\infty$.

e. Montrer que $\forall x > 0,\ f(x) = \int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$.

56 *Mines PSI 2023* Paul Bats II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$ qu'on munit du produit scalaire $(A, B) \mapsto (A|B) = \int_0^1 A(t)B(t)dt$.

Pour $P \in E$, on définit le polynôme $u(P)$ par $u(P)(x) = \int_0^1 (x+t)^n P(t)dt$.

a. Montrer que u est linéaire et à valeurs dans E.

b. Montrer que u est autoadjoint.

c. Montrer que u est bijectif.

57 *Mines PSI 2023* Paul-Antoine Baury-Carpentier I

Pour tout réel x, on note $\lceil x \rceil$ le plus petit entier relatif k tel que $x \leqslant k$.
Soit X une variable aléatoire discrète réelle positive admettant une espérance finie et on pose $Y = \lceil X \rceil$.

a. Montrer que $0 \leqslant \mathbb{E}(X) \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k)$.

b. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de variables aléatoires discrètes réelles positives telle que X_0 admet une espérance finie et telle que $\forall \omega \in \Omega, \lim_{n\to+\infty} X_n(\omega) = 0$. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n > k) = 0$.

c. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n) = 0$.

58 *Mines PSI 2023* Paul-Antoine Baury-Carpentier II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $C(A) = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid AB = BA\}$.

a. Soit $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ tel que $i \neq j$. Déterminer la dimension de $C(A)$ si $A = I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$.

b. Soit $A = \mathrm{diag}(a_1, \cdots, a_n)$ avec $a_1, \cdots, a_n$ distincts. Déterminer la dimension de $C(A)$.

59 *Mines PSI 2023* Bader Ben Amira I

Soit un entier $n \geqslant 2$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour $P \in E$, on pose $T(P) = P(1)(X^2 - X) + P(-1)(X^2 + X)$.

a. Montrer que T est un endomorphisme de E et donner sa matrice dans la base canonique de E.

b. Déterminer $\mathrm{Ker}(T)$ et $\mathrm{Im}(T)$.

c. En déduire les sous-espaces propres de T. T est-il diagonalisable ?

60 *Mines PSI 2023* Bader Ben Amira II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de classe C^2 et $F : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = f(||x||)$.

On suppose que $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\partial^2 F}{\partial {x_k}^2} = 0$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Déterminer f.

61 *Mines PSI 2023* Arthur Biot I

On répète une expérience de Bernoulli indépendante de même paramètre $p \in]0;1[$. On note X_n le nombre d'expériences nécessaires pour obtenir le n-ième succès.

a. X_1 est-elle une variable aléatoire discrète ?

b. Donner la loi, l'espérance et la variance de X_1.

c. Déterminer la loi de X_n pour $n \geqslant 2$. Calculer $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{V}(X_n)$.

d. Soit $Y_1, \cdots, Y_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la même loi que X_1 et $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$. Calculer $\mathbb{E}(S_n)$ et $\mathbb{V}(S_n)$. Expliquer.

62 *Mines PSI 2023* Arthur Biot II

Déterminer toutes les fonctions f, continues sur $\mathbb{R}$, qui vérifient $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + \int_0^x (x - t)f(t)dt = 1$.

63 *Mines PSI 2023* Arthur Biot III

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$.

a. La matrice A est-elle diagonalisable ?

b. Déterminer une matrice triangulaire T semblable à A.

c. Quelle est la dimension du commutant $C(A) = \{B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \mid AB = BA\}$?

64 *Mines PSI 2023* Maddie Bisch I

a. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge.

b. Montrer que $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt$.

65 *Mines PSI 2023* Maddie Bisch II

Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ et $P_n = (X - 1)^n - X^n + 1$.

Déterminer les valeurs de n pour lesquelles P_n admet une racine double.

66 *Mines PSI 2023* Rebecca Blé I

Soit $\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux telle que :

- $\forall x \in \mathbb{R},\ \omega(x) \geqslant 0$.
- Il existe un intervalle I non vide tel que $\forall x \in I,\ \omega(x) > 0$.
- $\forall n \in \mathbb{N},\ \lim\limits_{x \to \pm\infty} x^n \omega(x) = 0$.

On pose $E = \mathbb{R}[X]$ et, pour $(P, Q) \in E^2$, on définit $< P, Q >= \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)\omega(t)dt$.

a. Donner une exemple de telle fonction ω.

b. Montrer que $< . , . >$ définit un produit scalaire sur E. E est-il euclidien ?

c. Montrer qu'il existe une famille orthonormale $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ \deg(P_n) = n$.

d. Montrer l'unicité de $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si on impose les polynômes P_n unitaires.

e. Calculer P_0, P_1, P_2 avec la fonction ω donnée à la question **a.**.

67 *Mines PSI 2023* Rebecca Blé II

Soit $\Omega = (\mathbb{R}_+^*)^2$, $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 + y^2 + \dfrac{a}{xy}$.

a. Montrer que f est de classe C^1 sur Ω.

b. Calculer le gradient de f en tout point de Ω.

c. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en $(0, 0)$?

d. Étudier les extrema de f.

68 *Mines PSI 2023* Rebecca Blé III

Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^2 + M^T = I_n$.

a. Montrer que M est diagonalisable. Donner les valeurs propres possibles de M.

b. La matrice M est-elle forcément symétrique ?

69 *Mines PSI 2023* Mathys Bureau I

Soit $E = C^\infty([0; 1], \mathbb{R})$ et T définie sur E par $T(f) = \dfrac{1}{2}\left(f\left(\dfrac{x}{2}\right) + f\left(\dfrac{x+1}{2}\right)\right)$.

a. Montrer que f est un endomorphisme de E.

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0; 1]$ et $f \in E$, donner une expression de $T^n(f)(x)$ sous forme de somme.

c. Déterminer la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} T^n(f)(0)$.

d. Trouver de même, pour $x \in [0; 1]$, la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} T^n(f)(x)$.

e. Montrer que 1 est valeur propre de T et déterminer $E_1(T)$.

f. Soit $k \in \mathbb{R}$ tel que $|k| > 1$, est-ce que k peut être valeur propre de T ?

g. Pour $f \in E$, calculer $\big(T(f)\big)'$. Déterminer $E_{1/2}(T)$.

70 *Mines PSI 2023* Mathys Bureau II

Pour un entier $n \geqslant 2$ et $p \in [\![0; n]\!]$, on note F_n^p le nombre de parties A à p éléments de $[\![1; n]\!]$ telles que l'on ait la propriété suivante (C) : $\forall i \in [\![1; n-1]\!], i \in A$ ou $i + 1 \in A$. Calculer F_n^p.

71 *Mines PSI 2023* Antoine Campos I

Pour x et s réels, en cas de convergence, on pose $f(x,s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^s}$.

a. Donner les domaines de définition de $x \mapsto f(x,0)$ et $x \mapsto f(x,1)$ et en trouver des expressions simples.

b. Donner le rayon de convergence R_s de la série entière $\sum_{n \geqslant 1} \frac{x^n}{n^s}$.

c. Donner les domaines de définition I_s de $x \mapsto f(x,s)$.

d. Établir un lien entre $f(x,s)$ et $f(x,s-1)$.

e. Trouver une expression simple de $f(x,-1)$ et $f(x,-2)$.

f. Déterminer un équivalent en 1^- de $f(x,-p)$ pour $p \in \mathbb{N}$.

72 *Mines PSI 2023* Antoine Campos II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. on suppose que les valeurs propres de S comptées avec leur ordre de multiplicité se trouvent sur la diagonale de S.
Montrer que S est diagonale.

73 *Mines PSI 2023* Rémi Darrieumerle I

En cas de convergence, pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\eta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ et $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \frac{1}{n^x}$.

a. Déterminer les ensembles de définition de η et ζ.

b. Pour $x > 1$, exprimer $\eta(x)$ en fonction de $\zeta(x)$.

c. Montrer que η est de classe C^1 sur son ensemble de définition.

d. Trouver deux réels a et b tels que $\zeta(x) \underset{x \to 1^+}{=} \frac{a}{x-1} + b + o(1)$.

74 *Mines PSI 2023* Rémi Darrieumerle II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in S_n(\mathbb{R})$, $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, on pose $\theta(X) = \frac{X^T A X}{X^T B X}$.

a. Montrer que θ est bornée.

b. La fonction θ admet-elle une limite quand X tend vers 0 ?

75 *Mines PSI 2023* Hugo Delval I

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$, on pose $A_n = \begin{pmatrix} 1 & -a/n \\ a/n & 1 \end{pmatrix}$.

a. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, calculer $\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{i\alpha}{n}\right)^n$.

b. Diagonaliser A_n.

c. En déduire la convergence et la limite de la suite $(A_n^n)_{n \geqslant 1}$.

76 *Mines PSI 2023* Hugo Delval II

Soit (E) : $x^2 y'' - 2x(x^2+1)y' + (x^2-1)y = 0$.

a. Trouver les solutions de (E) développables en série entière.

b. Parmi les solutions de la question précédente, reconnaître une fonction usuelle.

c. Quelles sont les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$?

77 *Mines PSI 2023* Raphaël Déniel I

Pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{n(2n+1)}$.

a. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{n(2n+1)}$.

b. $S(R)$ et $S(-R)$ sont-ils définis ? Quel est donc le domaine I de définition de S ?

c. D'après le cours, la fonction S est continue sur quel intervalle au moins ?

d. S est-elle continue sur I ?

e. Calculer $S(x)$ pour $x \in]-R; R[$ à l'aide de fonctions usuelles.

f. Calculer $a = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}$. Quel est le signe de a ? Était-ce prévisible ?

78 *Mines PSI 2023* Raphaël Déniel II et Tom Graciet I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\forall Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \exists! X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ AX - XB = Y$.

(ii) $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ AX = XB \Longrightarrow X = 0$.

(iii) $\chi_B(A)$ est une matrice inversible.

(iv) A et B n'ont aucune valeur propre commune.

79 *Mines PSI 2023* Raphaël Déniel III et Tom Graciet III

Montrer que $\int_0^1 \frac{\ln(x)\ln(1-x)}{x}\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

80 *Mines PSI 2023* Marius Desvalois I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A, B deux matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire $(A, B) \in (S_n(\mathbb{R}))^2$.

a. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $R \in S_n(\mathbb{R})$ telle que $A = R^2$.

b. Dans le cas où cette condition est réalisée, combien y a-t-il de matrices $R \in S_n(\mathbb{R})$ telles que $A = R^2$?

c. On suppose que $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$ et $\mathrm{Sp}(B) \subset \mathbb{R}_+$, montrer que $\mathrm{Tr}\,(AB) \geqslant 0$.

81 *Mines PSI 2023* Marius Desvalois II

a. Soit $f : [0;1] \to \mathbb{R}_+$ continue. Montrer que $\int_0^1 f^3 \leqslant \int_0^1 f^5 \times \int_0^1 f$. Cas d'égalité ?

b. Soit $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f(0) = 0$ et $\forall x \in [0;1],\ f'(x) \in [0;1]$. Montrer $\int_0^1 f^3 \leqslant \left(\int_0^1 f\right)^2$.

82 *Mines PSI 2023* Pierre Dobeli I

Pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence on pose $f(x) = \int_0^{2\pi} \ln\big(1 + x\sin(t)\big)dt$.

a. Déterminer le domaine de définition D de f. Montrer que f est paire sur D.

b. Étudier la dérivabilité de f sur D.

c. En déduire que f est développable en série entière sur D et donner son développement.

83 *Mines PSI 2023* Pierre Dobeli II

a. Montrer que $O(n)$ n'est pas convexe.

b. Montrer que $O(n)$ est un fermé borné.

c. Caractériser géométriquement l'endomorphisme canoniquement associé à $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

84 *Mines PSI 2023* Alban Dujardin I

En cas de convergence, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(nx)}{n^2}$.

a. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.

c. Trouver un équivalent de $f'(x)$, puis de $f(x)$, quand x tend vers 0^+.

d. Quelles sont les variations de f ?

e. Trouver les limites de f en $\pm\infty$.

f. Tracer la courbe représentative de f.

85 *Mines PSI 2023* Alban Dujardin II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$. Soit $D : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ définie par $D(P) = P'$.

a. Trouver toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telles que $AM = MA$.

b. Trouver tous les sous-espaces de $\mathbb{R}_n[X]$ qui sont stables par D.

c. Déterminer la dimension de l'ensemble des endomorphismes f de $\mathbb{R}_n[X]$ tels que $D \circ f = f \circ D$.

86 *Mines PSI 2023* Juan Dupierris I

On définit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $a_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k a_{n-k}$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$.

a. Montrer que le rayon de convergence R de $\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n!} x^n$ vérifie $R \geqslant 1$.

b. Décomposer f^2 en série entière.

c. En déduire la valeur de f et des a_n pour tout entier naturel n.

87 *Mines PSI 2023* Juan Dupierris II

E désigne un espace euclidien de dimension finie non nulle.

a. Montrer que si p est une projection orthogonale, alors p est symétrique.

b. Soit p, q deux projecteurs orthogonaux. Montrer que $p \circ q \circ p$ est symétrique.

c. Montrer que $(\mathrm{Im}\,(p) + \mathrm{Ker}(q))^\perp = \mathrm{Im}\,(q) \cap \mathrm{Ker}(p)$.

d. Montrer que $p \circ q$ est diagonalisable à valeurs propres dans $[0;1]$.

88 *Mines PSI 2023* Lilian Dupouy I

Soit $\varphi_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi_0(x) = e^{-x^2}$.

On pose, pour $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, la quantité $(P|Q) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x^2}dx$.

a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists! H_n \in \mathbb{R}[X],\ \varphi_0^{(n)}(x) = (-1)^n H_n(x)\varphi_0(x)$.

b. Déterminer le degré et le coefficient dominant de H_n.

c. Montrer que $(P, Q) \mapsto (P|Q)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

d. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall P \in \mathbb{R}[X],\ (P|H_n) = (P'|H_{n-1})$.

e. En déduire que la famille $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale.

f. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer $||H_n||^2$.

g. Déterminer la nature et la somme de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n!} H_n(x)$.

89 *Mines PSI 2023* Lilian Dupouy II

Soit un entier $n \in \mathbb{N}^*$. On s'intéresse à une urne contenant n boules non discernables numérotées de 1 à n. On effectue des tirages et, à chaque tirage, on supprime de l'urne les boules dont le numéro est supérieur ou égal à celui de la boule tirée. On note X_n le nombre de tirages nécessaires pour vider entièrement l'urne.

a. Calculer $\mathbb{E}(X_1)$ et $\mathbb{E}(X_2)$.

b. Montrer que $\forall n \geqslant 2,\ \mathbb{E}(X_n) = 1 + \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}(X_k)$.

c. Trouver un équivalent de $\mathbb{E}(X_n)$ quand n tend vers $+\infty$.

Question supplémentaire : montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$.

90 *Mines PSI 2023* Jonathan Filocco I

a. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, A un sous-espace vectoriel de $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$. On suppose que $\displaystyle\bigcap_{\ell\in A} \mathrm{Ker}(\ell) = \{0_E\}$. Montrer que $A = E^*$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(f_1, \cdots, f_n)$ une famille de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que $(f_1, \cdots, f_n)$ est libre si et seulement s'il existe une famille $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ telle que la matrice $\big(f_i(x_j)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible.

91 *Mines PSI 2023* Jonathan Filocco II

a. Montrer qu'il existe un unique $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\lambda - \sin(t)}{t} dt$ converge.

Soit $T > 0$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et T-périodique.

b. Montrer qu'il existe un unique $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\lambda - f(t)}{t} dt$ converge.

92 *Mines PSI 2023* Clément Gallice I et Chloé Vagner I

Soit $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ continue et strictement positive.

a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe une unique subdivision $(x_0, \cdots, x_n)$ du segment $[a; b]$ qui vérifient les conditions $\forall k \in [\![1; n]\!],\ \displaystyle\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)dt = \frac{1}{n}\int_a^b f(t)dt$.

b. Montrer la convergence de $\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(x_k)\right)_{n\geqslant 1}$ et calculer sa limite.

93 *Mines PSI 2023* Clément Gallice II et Chloé Vagner II

Soit V un hyperplan de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui ne contient que des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On pose la partie $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \,\middle|\, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On munit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique.

a. Donner un exemple de tel hyperplan V.

b. Montrer que $F \cap V \neq \{0\}$. En déduire que $I_2 \in V$.

c. Donner la dimension de $V^\perp$. En déduire qu'il existe $Q \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $QVQ^{-1} = S_2(\mathbb{R})$.

94 *Mines PSI 2023* Tom Graciet II

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

a. Déterminer le développement asymptotique de H_n à la précision $o(1)$.

b. En déduire la limite de $(H_{2n} - H_n)_{n\geqslant 1}$.

c. Retrouver la limite de $(H_{2n} - H_n)_{n\geqslant 1}$ avec une somme de Riemann.

d. Grâce au développement de H_n, calculer $S_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, $S_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n-1)}$ et $S_3 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} k^2}$.

95 *Mines PSI 2023* Gabriel Hofman I

On pose $\omega = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{\omega x} dx$.

a. Calculer I_n. En déduire une fonction $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ non nulle telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^{+\infty} g(t)t^n dt = 0$.

b. Soit $f : [a;b] \to \mathbb{C}$ continue (avec $a < b$ réels) telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ \int_a^b f(t)t^n = 0$.

Montrer que $f = 0$. Indication : on admet que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists P \in \mathbb{C}[X],\ \forall t \in [a;b],\ |f(t) - P(t)| \leqslant \varepsilon$.

Question subsidiaire : montrer que si $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ est continue et positive et que $\int_a^b f(t)dt = 0$, alors $f = 0$.

96 *Mines PSI 2023* Gabriel Hofman II

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}^*$, on pose $M_{\alpha,m} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \cdots & \alpha \\ \alpha & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \alpha \\ \alpha & \cdots & \alpha & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$.

a. Donner le spectre de $M\alpha, m$.

Soit E un espace euclidien de dimension n et une famille $(u_1, \cdots, u_{n+1})$ de $n+1$ vecteurs de E telle que $\forall (i,j) \in [\![1;n+1]\!]^2,\ (u_i|u_j) = \alpha \neq 1$ si $i \neq j$ et $||u_i||^2 = 1$.

b. Déterminer la valeur de α en fonction de n (qu'on notera α_n).

c. Construire des vecteurs $u_1, \cdots, u_{n+1}$ de E tels que $\forall (i,j) \in [\![1;n+1]\!]^2,\ (u_i|u_j) = \alpha_n$ si $i \neq j$ et $||u_i||^2 = 1$.

97 *Mines PSI 2023* Antoine Jeanselme I

Soit l'équation $(E)\ :\ x^2y'' - 2y = 3x^2$.

a. Trouver les solutions polynomiales de l'équation homogène (E_0) associée à (E).

b. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.

c. Déterminer les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

98 *Mines PSI 2023* Antoine Jeanselme II

Soit $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $M_n = (a^{|i-j|})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que M_2 soit définie positive.

b. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que M_3 soit définie positive.

c. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que M_4 soit définie positive.

99 *Mines PSI 2023* Fares Kerautret I

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Donner tous les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par A.

b. Quelle est la structure de $C(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$? Déterminer sa dimension.

c. Quelles sont les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (resp. $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$) telles que $M^2 = A$?

100 *Mines PSI 2023* Fares Kerautret II

a. Montrer que $g : x \mapsto \dfrac{1}{\cos(x)}$ est développable en série entière.

b. Encadrer le rayon de convergence R de la série précédente.

101 *Mines PSI 2023* Esteban Maurer I

Pour $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\dfrac{k}{k+1}\right)^n$ et $v_n = \int_2^n \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^n dx$.

a. Montrer que $v_n \underset{+\infty}{\sim} n \int_0^1 e^{-1/t} dt$.

b. En déduire un équivalent simple de u_n.

102 *Mines PSI 2023* Esteban Maurer II

a. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})^2$ tel que $AB = BA$. Montrer que B est un polynôme en A ou A un polynôme en B.

b. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})^2$ tel que $AB = BA$. Est-ce que B est un polynôme en A ou A un polynôme en B ?

c. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})^2$ tel que $AB = BA$. Est-ce que B est un polynôme en A ou A un polynôme en B ?

103 *Mines PSI 2023* Arthur Melnitchenko I

Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\det(A) = 32$ et $A^2 - 6A + 8I_3 = 0$.

On définit $\varphi_A : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par la relation $\varphi_A(B) = AB$. Déterminer $\mathrm{Tr}\,(\varphi_A)$.

104 *Mines PSI 2023* Arthur Melnitchenko II

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \geqslant 0,\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} + \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!}$.

On admet le résultat (C), pour une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, si $\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell \neq 0$, alors $\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{+\infty}{\sim} n\ell$.

a. Déterminer un équivalent de u_n et en déduire le rayon de convergence R de $\sum_{n \geqslant 0} u_n x^n$.

b. Calculer $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$.

c. Montrer le résultat (C).

105 *Mines PSI 2023* Sacha Meslier I

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{2+t^2}\,dt$.

Soit f la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ dont on note R le rayon de convergence.

a. Montrer que $R \geqslant 1$.

b. Donner une expression simple de $f(x)$ pour $x \in]-1;1[$ à l'aide de fonctions usuelles.

c. Montrer que $R = 1$.

106 *Mines PSI 2023* Sacha Meslier II

Soit $k \in \mathbb{C}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Si $k \in \mathbb{R}$, la matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$? Si oui, la diagonaliser.

b. Si $k \in \mathbb{C}$, pour quelles valeurs de k la matrice A est-elle diagonalisable ?

107 *Mines PSI 2023* Antoine Notelle-Maire I

Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$, on note $I(x) = \displaystyle\int_0^\pi \ln(x^2 - 2x\cos(\theta) + 1)\,d\theta$.

On se propose de calculer la valeur de $I(x)$ par deux méthodes.

a. Justifier l'existence de $I(x)$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$.

b. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\},\ I(x) = 2\displaystyle\int_0^\pi \ln\left(|x - e^{i\theta}|\right)d\theta$.

Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n(x) = \dfrac{2\pi}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(|x - e^{\frac{ik\pi}{n}}|\right)$.

c. Montrer que $S_n(x) = \dfrac{2\pi}{n}\ln\left(|x^n - 1|\right)$. En déduire la valeur de $I(x)$.

d. Montrer que I est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$ et calculer $I'(x)$. En déduire à nouveau la valeur de $I(x)$.

108 *Mines PSI 2023* Antoine Notelle-Maire II

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & \sin(2\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(2\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & 0 & \sin(2\alpha) \end{pmatrix}$. Étudier la diagonalisabilité de $A(\alpha)$ en fonction de α.

109 *Mines PSI 2023* Paul Picard I

Pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^3 e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}}\,dt$.

a. Déterminer le domaine de définition D de f. Étudier la monotonie de f sur D.

b. Sur quel domaine la fonction f est-elle continue ? dérivable ? Étudier la monotonie de f'.

c. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

d. Calculer, pour $x > 0$, la valeur de $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^3 e^{-xt}\,dt$.

e. En déduire que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{6}{x^4}$. Indication : on pourra s'intéresser à $|f(x) - g(x)|$.

f. Déterminer la limite de f en 0^+.

110 *Mines PSI 2023* Paul Picard II

Pour $n \geqslant 1$, on pose $a_n = \int_n^{+\infty} \frac{\operatorname{th}(t)}{t^2} dt$. On note $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ s'il y a convergence.

a. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geqslant 1} a_n x^n$.

b. f est-elle continue en -1 ?

c. Montrer que $f(x) \underset{1^-}{\sim} -\ln(1-x)$.

111 *Mines PSI 2023* Maxence Prieur I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A, B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Pour $n+1$ complexes distincts $a_0, a_1, \cdots, a_n$, on définit $\Phi : \mathbb{C}_n[X] \to \mathbb{C}^{n+1}$ par $\Phi(P) = \big(P(a_0), \cdots, P(a_n)\big)$.

a. Montrer que Φ est une bijection.

b. En déduire que $\forall i \in [\![0; n]\!],\ \exists! L_i \in \mathbb{C}_n[X],\ \big(L_i(a_i) = 1 \text{ et } \forall j \in [\![0; n]\!] \setminus \{i\},\ L_i(a_j) = 0\big)$.

c. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, trouver une expression de χ_M en fonction de $L_0, \cdots, L_n$.

d. Montrer que l'application $f : M \to \chi_M$ est continue.

e. Montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

112 *Mines PSI 2023* Maxence Prieur II

Pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $f(x) = \int_0^1 |\ln(t)|^x dt$.

a. Déterminer le domaine de définition D de f.

b. Montrer que f est de classe C^∞ sur D.

c. Exprimer f en fonction de Γ. En déduire la valeur de $f(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

113 *Mines PSI 2023* Nathan Roy I

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par $f_n(x) = e^{-n^\alpha} e^{inx}$.

En cas de convergence, pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

a. Pour quelles valeurs de α a-t-on convergence simple de $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ sur $\mathbb{R}$?

b. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et calculer $\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$.

c. En utilisant Fubini, montrer que f est développable en série entière si $\alpha \geqslant 1$.

d. Montrer que si $\alpha \in]0; 1[$, on a $\forall k \in \mathbb{N},\ |f^{(k)}(0)| \geqslant e^{-N^\alpha} e^{\cdot\cdot}$ avec $N = \lfloor k^{1/\alpha} \rfloor$.

En déduire que f n'est pas développable en série entière.

114 *Mines PSI 2023* Nathan Roy II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.

a. Montrer que : A positive $\Longleftrightarrow \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ A = B^T B$.

b. Montrer que : A définie positive $\Longleftrightarrow \exists B \in GL_n(\mathbb{R}),\ A = B^T B$.

c. On suppose A définie positive, montrer que $X \mapsto \sqrt{X^T A X}$ définit une norme sur $\mathbb{R}^n$.

115 *Mines PSI 2023* Marie-Lys Ruzic I

On pose, pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{|\sin(t)|}{t} dt$.

Trouver un équivalent simple de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

116 *Mines PSI 2023* Marie-Lys Ruzic II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et un ensemble $G \subset GL_n(\mathbb{C})$ tel que :

- $\forall A \in G,\ A^{-1} \in G$.
- $\forall A \in G,\ \exists p \in \mathbb{N}^*,\ A^p = I_n$.
- $\forall (A, B) \in G^2,\ AB \in G$ et $AB = BA$.

On note F le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ engendré par les matrices de G, $r = \dim(F)$ et $(M_1, \cdots, M_r)$ une base de F.

On définit $\varphi : G \to \mathbb{C}^r$ par $\varphi(A) = \big(\mathrm{Tr}\,(AM_1), \cdots, \mathrm{Tr}\,(AM_r)\big)$.

a. Montrer que φ est injective.

b. Montrer que $\mathrm{Im}\,(\varphi)$ est fini.

c. En déduire que G est fini.

117 *Mines PSI 2023* Elae Terrien I

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note v_n le nombre de n-uplets $(a_1, \cdots, a_n)$ tels que :

- $\forall k \in [\![1; n]\!],\ a_k = \pm 1$.
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = 0$.
- $\forall p \in [\![1; n]\!],\ \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_k \geqslant 0$.

a. Justifier que $v_{2n+1} = 0$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Par convention, on pose $v_0 = u_0 = 1$. On note, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = v_{2n}$.

b. Calculer u_1, u_2, u_3.

c. Trouver, pour $n \in \mathbb{N}$, une relation liant $u_{n+1}, u_n, \cdots, u_1, u_0$.

d. En s'intéressant à $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} u_n x^n$, trouver une expression simple de u_n.

118 *Mines PSI 2023* Elae Terrien II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in (GL_n(\mathbb{R}))^2$, on dit que $A \sim B$ s'il existe une matrice $Q \in O(n)$ telle que $A = QB$.

Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible.

a. Montrer qu'il existe $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $M \sim S$.

b. La matrice S est-elle unique ?

119 *Mines PSI 2023* Antoine Vallade I

Soit E un espace normé, X une partie de E et C un convexe de E.

a. Montrer que $\mathring{X} \subset X \subset \overline{X}$.

b. Montrer que $\mathring{C}$ et $\overline{C}$ sont aussi des convexes.

120 *Mines PSI 2023* Antoine Vallade II

Soit E un espace euclidien et $f : E \to E$ telle que $\forall (x, y) \in E^2,\ ||f(x) - f(y)|| = ||x - y||$.

On veut établir qu'il existe un unique couple $(u, g) \in E \times O(E)$ tel que $(P)\ :\ \forall x \in E,\ f(x) = u + g(x)$.

a. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $f(x, y) = (1 - y, 3 + x)$. Trouver l'unique couple $(u, g) \in E \times O(E)$ tel que $(P)\ :\ \forall v \in E,\ f(v) = u + g(v)$.

b. Si $(u, g) \in E \times O(E)$ vérifie (P), donner des expressions de u et g en fonction de f.

c. Si $u \in E$ et $g : E \to E$ ont les expressions trouvées à la question précédente, montrer que :

(i) $\forall x \in E,\ f(x) = u + g(x)$.

(ii) $\forall (x, y) \in E^2,\ (g(x)|g(y)) = (x|y)$.

(iii) $g \in O(E)$.

ORAUX 2024
CCINP

121 *CCINP PSI 2023* Paul Bats I

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et $f \in \mathcal{L}(E)$.

a. Montrer que si f est diagonalisable alors f^2 est diagonalisable.

b. Si f^2 est diagonalisable, f l'est-elle forcément ?

c. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $\mu^2 = \lambda$, montrer que $\mathrm{Ker}(f^2 - \lambda \mathrm{id}_E) = \mathrm{Ker}(f - \mu \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f + \mu \mathrm{id}_E)$.

d. Montrer que si f^2 est diagonalisable et inversible, alors f est diagonalisable.

122 *CCINP PSI 2023* Paul Bats II

En cas de convergence, on pose $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln\big(\sin(x)\big)dx$ et $J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln\big(\sin(x)\cos(x)\big)dx$.

a. Montrer que I existe.

b. Montrer que $J = 2I$.

c. Calculer I.

123 *CCINP PSI 2023* Paul-Antoine Baury-Carpentier I

Soit $\varphi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(A, B) = \mathrm{Tr}\,(A^T B)$.

On pose aussi $\Sigma = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \;\middle|\; (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

a. Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

b. Montrer que Σ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

c. Exhiber une base orthonormale de $\Sigma^\perp$.

d. Trouver la distance de la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ à $\Sigma^\perp$. Et celle de M à Σ ?

124 *CCINP PSI 2023* Paul-Antoine Baury-Carpentier II

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. On pose $f : x \mapsto \varphi(x) + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \big(\varphi(x+n) + \varphi(x-n)\big)$.

a. Montrer que f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que f est 1-périodique.

c. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et 1-périodique. Montrer que φ_g est intégrable sur $\mathbb{R}$.

125 *CCINP PSI 2023* Bader Ben Amira I

Soit $f :]0;1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{x^x}$ et, pour $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, on pose $I_{n,p} = \displaystyle\int_0^1 x^p \ln^n(x)dx$.

a. Montrer l'existence de $I_{n,p}$ pour toutes valeurs des entiers naturels n et p.

b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall p \in \mathbb{N},\ I_{n,p} = -\dfrac{n}{p+1} I_{n-1,p}$.

c. Montrer que f est intégrable sur $]0;1]$.

d. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^x}dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$.

126 *CCINP PSI 2023* Bader Ben Amira II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $E_{i,j}$ la matrice élémentaire classique telle que $BR = (E_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ forme la base canonique de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a. Donner la définition d'un projecteur.

b. Pour $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, est-ce que $E_{i,j}$ est une matrice de projecteur ?

c. Montrer que si M est diagonalisable, M est une combinaison linéaire de matrices de projecteurs.

d. Montrer que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont des matrices de projecteurs.

Vous donnerez les éléments géométriques caractéristiques de ces deux projections.

e. Une matrice écrite comme combinaison de matrices de projecteurs est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

127 *CCINP PSI 2023* Maddie Bisch I et Rebecca Blé I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ tel que $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \emptyset$.

a. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(A) = 0$, montrer que $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A),\ P(\lambda) = 0$.

b. Montrer que $\chi_A(B) \in GL_n(\mathbb{C})$.

c. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que $AM = MB \iff M = 0$.

d. Montrer que $\forall C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \exists! M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ AM - MB = C$.

128 *CCINP PSI 2023* Maddie Bisch II

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

a. Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.

b. Calculer les dérivées partielles premières de f sur $\mathbb{R}^2$.

c. La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

d. Calculer les dérivées partielles seconde de f en $(0,0)$. Qu'en déduire sur la fonction f ?

129 *CCINP PSI 2023* Rebecca Blé II

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{\sin(xt)}{t} dt$.

a. Montrer que φ est définie sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que φ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

c. Mettre $\varphi'(x)$ et $\varphi(x)$ sous forme de fonctions usuelles.

130 *CCINP PSI 2023* Rémi Darrieumerle I et Chloé Vagner I

En cas de convergence, pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}$. On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

a. Déterminer le domaine de définition de f.

b. Montrer que f est continue sur son ensemble de définition.

c. Déterminer un équivalent de f en 1^-.

131 *CCINP PSI 2023* Rémi Darrieumerle II

On donne $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$.

a. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2}\,dt$ en distinguant selon la parité de n.

b. Montrer que $\varphi : (P, Q) \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2}\,dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

c. Déterminer $d(X^3, \mathbb{R}_2[X])$.

132 *CCINP PSI 2023* Hugo Delval I

Soit $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{Sp}(M) = \{m_{1,1}, \cdots, m_{n,n}\}$ (valeurs propres comptées avec leur ordre de multiplicité).

$$\text{On pose } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 2 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

On note S_n (resp. A_n) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a. Les matrices A et B sont-elles dans $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$?

b. L'ensemble $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

c. Montrer que si $M \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ est symétrique, alors M est diagonale en considérant $\mathrm{Tr}\,(M^2)$.

d. Déterminer $\mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \cap A_n$.

133 *CCINP PSI 2023* Hugo Delval II

On note $f_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ en cas de convergence.

a. Déterminer l'ensemble D_f de définition de f.

b. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur $[a; +\infty[$ pour tout $a > 0$.

c. f est-elle continue sur D_f ? Calculer sa limite en $+\infty$.

d. Montrer que $\displaystyle\int_n^{n+1} e^{-x\sqrt{t}}dt \leqslant f_n(x) \leqslant \int_{n-1}^{n} e^{-x\sqrt{t}}dt$. En déduire un équivalent de f en 0^+.

e. Étudier la convergence normale et uniforme de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ sur D_f.

134 *CCINP PSI 2023* Armand Dépée I

Soit les trois suites réelles $(u_n)_{n\geqslant 1}$, $(v_n)_{n\geqslant 1}$, $(w_n)_{n\geqslant 1}$ et $(x_n)_{n\geqslant 1}$ définies par :

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}},\ v_n = \frac{(-1)^n}{n}u_n,\ w_n = \frac{(-1)^n}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}} \ \text{ et } \ x_n = (-1)^n w_n.$$

a. Justifier que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est bien définie et qu'elle tend vers 0.

b. Justifier que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge.

c. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} w_n$?

d. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} x_n$?

135 *CCINP PSI 2023* Armand Dépée II

Soit un entier $n \geqslant 2$ et un complexe α. On pose $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $a_{i,j} = \alpha^{i+j-2}$.

a. Si $\alpha \in \mathbb{R}$, montrer que A est diagonalisable.

b. Calculer le rang de A, en déduire ses valeurs propres.

c. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.

136 *CCINP PSI 2023* Marius Desvalois I

Soit $\alpha \in]0;1[$, $\lambda > 0$ et X, Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que, pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, on ait $\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^i \alpha^j (1-\alpha)^{i-j}}{j!(i-j)!}$ si $0 \leqslant j \leqslant i$ et $\mathbb{P}(X = i, Y = j) = 0$ sinon. On pose $Z = X - Y$.

a. Déterminer la loi de X.

b. Déterminer la loi de Y.

c. X et Y sont-elles indépendantes ?

d. Déterminer la loi de Z.

e. Pour $(j,k) \in \mathbb{N}^2$, calculer $\mathbb{P}_{(Z=k)}(Y = j)$.

f. Conclure.

137 *CCINP PSI 2023* Marius Desvalois II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $(\,.\,|\,.\,) : \mathbb{R}_n[X]^2 \to \mathbb{R}$ définie par $(P|Q) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_k$ si $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k X^k$.

a. Montrer que $(\,.\,|\,.\,)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

b. Calculer $d(1, H)$ où $H = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(1) = 0\}$.

138 *CCINP PSI 2023* Pierre Dobeli I

Pour $n \in \mathbb{N}$, en cas de convergence, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{nt}}{(1+e^t)^{n+1}}\,dt$.

a. Montrer l'existence de I_n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

b. Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, on a $I_n = \dfrac{1}{n2^n} + \dfrac{n-1}{n} I_{n-1}$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = nI_n$.

c. Trouver une relation entre J_n et J_{n-1}.

d. Calculer J_1. En déduire que $\forall n \geqslant 1,\ I_n = \dfrac{1}{n}\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)$.

e. Déterminer un équivalent de I_n en $+\infty$.

139 *CCINP PSI 2023* Pierre Dobeli II

a. $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

b. Trouver ses éléments propres.

c. Trouver $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $R^2 = A$. Montrer que les matrices R qui conviennent sont diagonalisables.

140 *CCINP PSI 2023* Pierre Dobeli III

Soit $n \geqslant 2$ et $J_n = (1)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a. Justifier que J_n est diagonalisable.

b. Diagonaliser J_n très rapidement.

141 *CCINP PSI 2023* Juan Dupierris I et Gabriel Hofman I

Une entreprise commercialise deux produits A et B. Le service après-vente reçoit des appels concernant ces deux produits, 20% pour le produit A et 80% pour le produit B. On note X_A (resp. X_B) la variable aléatoire qui compte le nombre d'appels avant d'en avoir un qui concerne le produit A (resp. B).

On note L la variable aléatoire qui compte la longueur de la première chaîne d'appels sur un même produit. Par exemple, si on reçoit les appels AAABBAB...., alors $X_A = 1$, $X_B = 4$, $L = 3$.

a. Déterminer la loi de X_A. Montrer que X_A admet une espérance et une variance finies et les calculer. Faire de même pour X_B.

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, décomposer $(L = n)$ en distinguant selon le $(n+1)$-ième appel.

En déduire que $\mathbb{P}(L = n) = 0,8\,\mathbb{P}(X_A = n) + 0,2\,\mathbb{P}(X_B = n)$.

c. En déduire que L admet une espérance finie et la calculer.

142 *CCINP PSI 2023* Juan Dupierris II et Gabriel Hofman II

Soit E un espace de dimension finie et $(p, q) \in (\mathcal{L}(E))^2$ tel que $p + q = \mathrm{id}_E$ et $\mathrm{rang}\,(p) + \mathrm{rang}\,(q) \leqslant \dim(E)$.

a. Montrer que $E = \mathrm{Im}\,(p) \oplus \mathrm{Im}\,(q)$.

b. Montrer que p et q sont des projecteurs.

143 *CCINP PSI 2023* Olivier Farje I

Soit $E = \left\{f \in C^1\left([0;1], \mathbb{R}\right) \mid f(0) = 0\right\}$ et N_1, N_2 les deux applications définies sur E par $N_1(f) = ||f + f'||_\infty$ et $N_2(f) = ||f'||_\infty$ (les normes infinies sont calculées sur $[0;1]$).

a. Montrer que N_1 et N_2 sont des normes.

b. Montrer que N_1 et N_2 sont équivalentes.

144 *CCINP PSI 2023* Olivier Farje II et Arthur Melnitchenko I et Marie-Lys Ruzic I

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

a. Montrer que A n'est pas diagonalisable mais trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

b. Trouver toutes les droites de $\mathbb{R}^3$ stables par a.

Soit dans les deux questions suivantes un plan P de $\mathbb{R}^3$ stable par a. On définit alors l'endomorphisme a' de P induit par a dans P, qu'on note $a' = a_P$.

c. Montrer que $\chi_{a'}$ divise χ_a.

d. En déduire que $P \subset \mathrm{Ker}\left((a - 3\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})^2\right)$.

e. Quels sont les plans stables par a ?

145 *CCINP PSI 2023* Jonathan Filocco I

Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de boules (numéros de 1 à X) dans une urne, telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ avec $\forall i \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X = i) = \frac{i}{2^{i+1}}$. On procède à un tirage et on note Y le numéro de la boule tirée.

a. Montrer que la définition de la loi de X est cohérente.

b. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

c. Déterminer la loi conjointe de X et Y.

d. Calculer la loi de Y et son espérance.

146 *CCINP PSI 2023* Jonathan Filocco II et Antoine Vallade II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_n = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ a_{i,j} = i$ si $i = j$ et $a_{i,j} = 1$ sinon, c'est-à-dire $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & n \end{pmatrix}$. On note P_n le polynôme caractéristique de A_n.

a. Justifier que A_n est diagonalisable.

b. Trouver le spectre de A_2.

c. Montrer que $\forall n \geqslant 3,\ P_n = (X - n + 1)P_{n-1} - X(X-1) - (X - n + 2)$.

d. En déduire que A_n admet au moins une valeur propre dans les intervalles $]0;1[$, $]1;2[$, ...,$]n-2;n-1[$ et $]n;+\infty[$. Indication : on pourra montrer que, pour $k \in [\![0;n-1]\!]$, le réel $(-1)^k P_n(k)$ a le même signe que $P_n(0)$ et que $P_n(n) < 0$.

e. En déduire, autrement qu'à la première question, que A_n est diagonalisable.

147 *CCINP PSI 2023* Fares Kerautret I

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \dfrac{e^{-x}x^n}{n!}$.

En cas de convergence, on note $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

a. Étudier la convergence simple de $(f_n)_{n \geqslant 0}$ sur $\mathbb{R}_+$.

b. Étudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n \geqslant 0}$ sur $\mathbb{R}_+$.

c. Étudier la convergence simple de $\sum\limits_{n \geqslant 0} f_n$ sur $\mathbb{R}_+$. Calculer $f(x)$.

d. Soit $a > 0$, montrer que $\sum\limits_{n \geqslant 0} f_n$ converge normalement sur $[0;a]$.

e. Montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme de $\sum\limits_{n \geqslant 0} f_n$ sur $\mathbb{R}_+$.

148 *CCINP PSI 2023* Fares Kerautret II

Soit un entier n impair tel que $n \geqslant 3$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$.

Pour $P \in E$, on pose $\Phi(P) = P(1 - X) + P(0)X^n$.

a. Montrer que $\Phi \in \mathcal{L}(E)$. Déterminer la matrice A de Φ dans la base canonique de E.

b. Calculer A^2 et montrer que A^2 est triangulaire.

c. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A, montrer que λ^2 est une valeur propre de A^2.

d. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A^2, montrer que l'une des racines carrées de λ est valeur propre de A.

e. Déterminer les valeurs propres de Φ.

149 *CCINP PSI 2023* Arthur Melnitchenko II et Marie-Lys Ruzic II

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{1+e^t}\,dt$ existe et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{1+e^t}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{1+n^2}$.

150 *CCINP PSI 2023* Sacha Meslier I

On joue à pile ou face, avec une probabilité $p \in]0;1[$ de faire pile et $1-p$ de faire face. On effectue $n \geqslant 2$ lancers. On note N le nombre de séries obtenues. Par exemple $N = 3$ si, pour $n = 10$, on a les tirages $\mathsf{PPPPFFFFPP}$ et $N = 5$ si, pour $n = 10$, on tire $\mathsf{FPPFFPPPFF}$.

Pour tout entier $k \in [\![1;n-1]\!]$, on définit I_k telle que $I_k = 0$ si les lancers k et $k+1$ donnent des résultats identiques et $I_k = 1$ sinon.

a. Déterminer $N(\Omega)$.

b. Calculer $\mathbb{P}(N=1)$ et $\mathbb{P}(N=2)$.

c. Pour $k \in [\![1;n-1]\!]$, donner la loi de I_k.

d. Écrire N en fonction des I_k.

e. Déterminer l'espérance et la variance de N.

151 *CCINP PSI 2023* Sacha Meslier II

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : [-1;1] \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \sin\left(nx\,e^{-nx^2}\right)$.

a. Montrer que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers une fonction F à déterminer.

b. Montrer que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur tout segment $[a;1]$ avec $a \in]0;1[$.

c. En considérant $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right)$, que dire de la convergence uniforme de $(f_n)_{n\geqslant 1}$ sur $[-1;1]$?

152 *CCINP PSI 2023* Chloé Vagner II

Soit $M = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 5 & -3 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer χ_M.

b. M est-elle trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

c. M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

d. Résoudre le système $\begin{cases} x' = & 4x - 3x + 3z \\ y' = & 5x - 3y + 4z \\ z' = & -x + 2y - z \end{cases}$.

153 *CCINP PSI 2023* Antoine Vallade I

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\forall i \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = i) = \frac{\alpha\, i}{2^i}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

a. Calculer α.

b. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

c. Calculer $\mathbb{V}(X)$.

ORAUX 2024
PETITES MINES

154 *Mines-Télécom PSI 2023* Armand Dépée I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - 3A - 5I_n = 0$. Montrer que $\det(A) > 0$.

155 *Mines-Télécom PSI 2023* Armand Dépée II

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-x)^n}{\sqrt{x}}\,dx$.

a. Montrer que u_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge.

c. Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

d. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{2n+2}{2n+3}u_n$.

e. Montrer qu'il existe $k > 0$ tel que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{n}}$ (question rajoutée).

156 *Mines-Télécom PSI 2023* Olivier Farje I

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$.

a. Montrer qu'il existe un vecteur $a \in E$ tel que $\mathcal{B} = (a, f(a), \cdots, f^{n-1}(a))$ est une base de E.

b. L'application f est-elle bijective ?

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M^2 \neq 0$ et $M^3 = 0$.

c. Montrer que M est semblable à $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

d. Montrer que les matrices qui commutent avec M sont des polynômes en M.