



PRÉPARATION ORAUX

PSI 1

MILLÉSIME

2023 / 2024



EXERCICES PAR THÈME

- 1 : intégrales et analyse (13 exercices : 1-13)page 3
- 2 : algèbre linéaire et générale (9 exercices : 14-22)page 6
- 3 : séries numériques, séries de fonctions, séries entières (27 exercices : 23-49) page 8
- 4 : espaces vectoriels normés (7 exercices : 50-56) page 15
- 5 : réduction des endomorphismes (30 exercices : 57-86) page 17
- 6 : théorèmes de domination (15 exercices : 87-101)page 23
- 7 : espaces préhilbertiens réels, espaces euclidiens (23 exercices : 102-124) page 26
- 8 : probabilités et variables aléatoires (16 exercices : 125-140)page 31
- 9 : équations différentielles et calcul différentiel (16 exercices : 141-156) page 36

ORAUX 2024 THÈME 1

INTÉGRALE ET ANALYSE

1 X PSI 2023 Raphaël Dénier II

Soit une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ paire et de classe C^4 .

Montrer qu'il existe une fonction $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $\forall x \in \mathbb{R}, g(x^2) = f(x)$.

2 ENS Cachan PSI 2023 Mathys Bureau

On se donne un réel $p \geq 1$. Si $p > 1$, on lui associe $q \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive et continue telle que $\int_0^{+\infty} (f(t))^p e^t dt$ converge.

En cas de convergence, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \int_0^{+\infty} t^n f(t) dt$.

a. Soit $t \in]0; 1[$, $(u, v) \in (\mathbb{R}_+)^2$, montrer que $u^t v^{1-t} \leq tu + (1-t)v$. Indication : on pourra utiliser une convexité ou montrer que $\forall u \in \mathbb{R}_+, \forall t \in]0; 1[, u^t \leq tu + (1-t)$.

b. Soit $A \in \mathbb{R}_+, g, h : [0; A] \rightarrow \mathbb{R}$ continues. Montrer que $\int_0^A |g(t)h(t)| dt \leq \frac{1}{p} \int_0^A |g(t)|^p dt + \frac{1}{q} \int_0^A |h(t)|^q dt$ si $p > 1$. En déduire que $\int_0^A |g(t)h(t)| dt \leq \left(\int_0^A |g(t)|^p dt \right)^{1/p} \times \left(\int_0^A |h(t)|^q dt \right)^{1/q}$.

c. Si $p > 1$, montrer que u_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et qu'il existe une constante $K \in \mathbb{R}_+$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq K \left(\frac{p}{q} \right)^n ((nq)!)^{1/q}$. En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} |u_n|^{-1/n}$ diverge.

d. Si $p = 1$, montrer que $\sum_{n \geq 1} |u_n|^{-1/n}$ diverge.

3 ENS Cachan PSI 2023 Alban Dujardin II

Soit $a > 0$ et, en cas de convergence, $I(a) = \int_0^{+\infty} \exp\left(-t^2 - \frac{a^2}{t^2}\right) dt$ et $J(a) = \int_0^{+\infty} \frac{a}{t^2} \exp\left(-t^2 - \frac{a^2}{t^2}\right) dt$.

On rappelle la valeur de l'intégrale de GAUSS : $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

a. Montrer l'existence de $I(a)$ et $J(a)$.

b. Montrer que $I(a) = J(a)$.

c. Montrer que $I(a) = \frac{e^{-2a}}{2} \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{a}{t^2}\right) \exp\left(-\left(t - \frac{a}{t}\right)^2\right) dt$.

d. En déduire que $I(a) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2a}$.

4 Centrale Maths1 PSI 2023 Elae Terrien

a. Pour tout réel $x \in]-1; +\infty[$, montrer la convergence de $\int_0^1 \frac{t^x \ln(t) dt}{t-1}$.

On définit $H :]-1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par $H(x) = \int_0^1 \frac{t^x \ln(t) dt}{t-1}$.

b. Montrer que H est décroissante sur $] - 1; +\infty[$.

c. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} H(x) = 0$.

d. Donner un équivalent simple de $H(x)$ quand x tend vers -1^+ . Indication : considérer $H(x) - H(x+1)$.

e. Donner un équivalent simple de $H(x)$ quand x tend vers $+\infty$. Indication : considérer $H(x) - H(x+1)$.

5 Mines PSI 2023 Maddie Bisch I

a. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge.

b. Montrer que $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt$.

6 Mines PSI 2023 Marius Desvalois II

a. Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue. Montrer que $\left(\int_0^1 f^3 \right)^2 \leq \int_0^1 f^5 \times \int_0^1 f$. Cas d'égalité ?

b. Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f(0) = 0$ et $\forall x \in [0; 1], f'(x) \in [0; 1]$. Montrer $\int_0^1 f^3 \leq \left(\int_0^1 f \right)^2$.

c. Quel est le cas d'égalité dans l'inégalité de la question précédente ?

7 Mines PSI 2023 Jonathan Filocco II

a. Montrer qu'il existe un unique $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\int_1^{+\infty} \frac{\lambda - \sin(t)}{t} dt$ converge.

Soit $T > 0$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et T -périodique.

b. Montrer qu'il existe un unique $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\int_1^{+\infty} \frac{\lambda - f(t)}{t} dt$ converge.

8 Mines PSI 2023 Clément Gallice I et Chloé Vagner I

Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et strictement positive.

a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe une unique subdivision $(x_0, \dots, x_n)$ du segment $[a; b]$ qui vérifient les conditions $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t) dt = \frac{1}{n} \int_a^b f(t) dt$.

b. Montrer la convergence de $\left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n f(x_k) \right)_{n \geq 1}$ et calculer sa limite.

9 Mines PSI 2023 Gabriel Hofman I

On pose $\omega = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{\omega x} dx$.

a. Calculer I_n . En déduire une fonction $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ non nulle telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} g(t)t^n dt = 0$.

b. Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$ continue (avec $a < b$ réels) telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_a^b f(t)t^n dt = 0$.

Montrer que $f = 0$. Indication : on admet que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists P \in \mathbb{C}[X]$, $\forall t \in [a; b]$, $|f(t) - P(t)| \leq \varepsilon$.

Question subsidiaire : montrer que si $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et positive et que $\int_a^b f(t)dt = 0$, alors $f = 0$.

10 Mines PSI 2023 Marie-Lys Ruzic I

On pose, pour tout $x \geq 0$, $f(x) = \int_0^x \frac{|\sin(t)|}{t} dt$.

Trouver un équivalent simple de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

11 CCINP PSI 2023 Paul Bats II

En cas de convergence, on pose $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(x)) dx$ et $J = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(x) \cos(x)) dx$.

a. Montrer que I existe.

b. Montrer que $J = 2I$.

c. Calculer I .

12 CCINP PSI 2023 Pierre Dobeli I

Pour $n \in \mathbb{N}$, en cas de convergence, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{nt}}{(1+e^t)^{n+1}} dt$.

a. Montrer l'existence de I_n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

b. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a $I_n = \frac{1}{n2^n} + \frac{n-1}{n} I_{n-1}$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = nI_n$.

c. Trouver une relation entre J_n et J_{n-1} .

d. Calculer J_1 . En déduire que $\forall n \geq 1$, $I_n = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$.

e. Déterminer un équivalent de I_n en $+\infty$.

13 Mines-Télécom PSI 2023 Armand Dépée II

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{\sqrt{x}} dx$.

a. Montrer que u_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Montrer que $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge.

c. Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

d. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} u_n$.

e. Montrer que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{n}}$ (question rajoutée).

ORAUX 2024 THÈME 2

ALGÈBRE LINÉAIRE ET GÉNÉRALE

14 X PSI 2023 Raphaël Déniel I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$, factoriser le polynôme $P = (X + a)^n - (X - a)^n$.

15 ENS Cachan PSI 2023 Alban Dujardin III

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = -\text{id}_E$.

- a. Donner un exemple de tel endomorphisme u si $\dim(E) = 2$.
- b. Montrer que u n'a aucune valeur propre réelle. Montrer que $\dim(E) = 2p$ est pair.
- c. Montrer l'existence de $(e_1, \dots, e_p) \in E^p$ telle que $\mathcal{B} = (e_1, u(e_1), \dots, e_p, u(e_p))$ est une base de E .

16 Mines PSI 2023 Paul-Antoine Baury-Carpentier II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $C(A) = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid AB = BA\}$.

- a. Soit $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$. Déterminer la dimension de $C(A)$ si $A = I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$.
- b. Soit $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ avec $a_1, \dots, a_n$ distincts. Déterminer la dimension de $C(A)$.

17 Mines PSI 2023 Maddie Bisch II

Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ et $P_n = (X - 1)^n - X^n + 1$.

Déterminer les valeurs de n pour lesquelles P_n admet une racine double.

18 Mines PSI 2023 Mathys Bureau II

Pour un entier $n \geq 2$ et $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on note F_n^p le nombre de parties A à p éléments de $\llbracket 1; n \rrbracket$ telles que l'on ait la propriété suivante (C) : $\forall i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket, i \in A \text{ ou } i+1 \in A$. Calculer F_n^p .

19 Mines PSI 2023 Alban Dujardin II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$. Soit $D : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$ définie par $D(P) = P'$.

- a. Trouver toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telles que $AM = MA$.
- b. Trouver tous les sous-espaces de $\mathbb{R}_n[X]$ qui sont stables par D .
- c. Déterminer la dimension de l'ensemble des endomorphismes f de $\mathbb{R}_n[X]$ tels que $D \circ f = f \circ D$.

20 Mines PSI 2023 Jonathan Filocco I

- a. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, A un sous-espace vectoriel de $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$. On suppose que $\bigcap_{\ell \in A} \text{Ker}(\ell) = \{0_E\}$. Montrer que $A = E^*$.
- b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(f_1, \dots, f_n)$ une famille de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que $(f_1, \dots, f_n)$ est libre si et seulement s'il existe une famille $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ telle que la matrice $(f_i(x_j))_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible.

21 CCINP PSI 2023 Juan Dupierris II et Gabriel Hofman II

Soit E un espace de dimension finie et $(p, q) \in (\mathcal{L}(E))^2$ tel que $p + q = \text{id}_E$ et $\text{rang}(p) + \text{rang}(q) \leq \dim(E)$.

- a. Montrer que $E = \text{Im}(p) \oplus \text{Im}(q)$.
- b. Montrer que p et q sont des projecteurs.

22 Mines-Télécom PSI 2023 Olivier Farje I

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$.

- a. Montrer qu'il existe un vecteur $a \in E$ tel que $\mathcal{B} = (a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$ est une base de E .
- b. L'application f est-elle bijective ?

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M^2 \neq 0$ et $M^3 = 0$.

- c. Montrer que M est semblable à $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- d. Montrer que les matrices qui commutent avec M sont des polynômes en M .

ORAUX 2024 THÈME 3

SÉRIES NUMÉRIQUES, SÉRIES DE FONCTIONS ET SÉRIES ENTIÈRES

23 *ENS Cachan PSI 2023* Raphaël Dénier

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $u_n > 0$, $v_n > 0$.

Pour tout entier $n \geq N$, on pose $w_n = v_n - \frac{v_{n+1}u_{n+1}}{u_n}$.

- a. On suppose que $\exists c \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall n \geq N$, $w_n \geq c$ et que $\sum_{n \geq N} \frac{1}{v_n}$ converge, montrer que $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.
- b. On suppose que $\forall n \geq N$, $w_n \leq 0$ et que $\sum_{n \geq N} \frac{1}{v_n}$ diverge, montrer que $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge.
- c. On suppose que $\exists c \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall n \geq N$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 - \frac{1+c}{n}$, montrer que $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.
- d. On suppose que $\forall n \geq N$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 - \frac{1}{n}$, montrer que $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge.
- e. Soit $A \in \mathbb{R}$, $s > 1$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bornée tels que $\forall n \geq N$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{A}{n} + \frac{f(s)}{n^s}$. Montrer que $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge si et seulement si $A > 1$.
- f. Soit $\alpha > 0$, montrer que $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n} \right)^\alpha$ converge.

24 *Centrale Maths1 PSI 2023* Paul Bats

On définit la fonction $f : I = \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[\rightarrow \mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{\sin(x) + 1}{\cos(x)}$.

- a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{N}[X]$ tel que $\forall x \in I$, $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin(x))}{\cos^{n+1}(x)}$.
- b. Montrer que la série de TAYLOR de f converge sur I .
- c. Montrer que f est développable en série entière sur I .

Questions de cours :

- Donner le développement en série entière de Arctan .
- Donner la formule de TAYLOR reste intégral.
- Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et $g : t \mapsto f(\cos(t), \text{Arctan}(t), 2^t)$. Calculer $g'(t)$.
- Rappeler le théorème des valeurs intermédiaires.

25 Centrale Maths1 PSI 2023 Maddie Bisch

- a. Existe-t-il une suite géométrique $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $g_{n+1} - g_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{g_n}}$?
- b. Existe-t-il $(A, \alpha) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tel qu'en posant $v_n = An^\alpha$, on ait $v_{n+1} - v_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{v_n}}$?
- Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{\sqrt{u_n}}$.
- Soit $\beta > 0$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, le réel $p_n = \left(\frac{1}{u_n}\right)^\beta - \left(\frac{1}{u_{n+1}}\right)^\beta$.
- c. Montrer que $\sum_{n \geq 0} p_n$ est une série convergente à termes positifs telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$.
- d. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n} \leq u_n \leq 2n$.
- e. Déterminer les valeurs de β pour lesquelles $\sum_{n \geq 0} p_n u_n$ est convergente.

26 Centrale Maths1 PSI 2023 Rebecca Blé et Lilian Dupouy

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n n}{n^2 + |x|}$.
- a. Étudier la convergence simple de $\sum_{n \geq 1} f_n$.
- b. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante positive, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq (-1)^n \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k \leq a_n$.
- c. Montrer la convergence uniforme de $\sum_{n \geq 1} f_n$.
- Indication : poser $N(x) = \inf(\{n \in \mathbb{N}^* \mid \forall k \geq n, |f_{k+1}(x)| \leq |f_k(x)|\})$.
- Questions de cours : rappeler le théorème des valeurs intermédiaires.

27 Centrale Maths1 PSI 2023 Raphaël Dénier

- Pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \cos(n^2 x) e^{-n}$.
- On admet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que l'on a $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n!$.
- a. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
- b. Pour $p \in \mathbb{N}$, donner une expression de $f^{(4p)}(0)$ sous forme de série.
- c. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\int_0^{8p} t^{8p} e^{-t} dt \leq \sum_{n=1}^{8p} n^{8p} e^{-n}$ et que $\int_{8p}^{+\infty} t^{8p} e^{-t} dt \leq \sum_{n=8p}^{+\infty} n^{8p} e^{-n}$.
- d. Montrer, pour tout $r \in \mathbb{R}_+$, que $\sum_{p \geq 0} \frac{f^{(4p)}(0) r^{4p}}{(4p)!}$ diverge.
- e. Que vaut le rayon de convergence de la série de TAYLOR de la fonction f ?

28 Centrale Maths1 PSI 2023 Jonathan Filocco

- Pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on note $\varphi(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} \cos(t) dt$ et $\psi(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} \sin(t) dt$.
- a. Justifier l'existence de $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ pour tout x et en donner les valeurs.
- b. Déterminer les solutions bornées sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E) : $y' - y + \cos(x) = 0$.
- Soit la fonction $f_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_0(x) = a \cos(x) + b \sin(x)$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_{n+1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_{n+1}(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f_n(t) dt$.
- c. Étudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

29 Centrale Maths1 PSI 2023 Antoine Jeanselme

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \frac{x}{(1+x)^n}$.

- a. Montrer la convergence simple de $\sum_{n \geq 0} f_n$ sur $[0; 1]$.
- b. Est-ce qu'il y a convergence uniforme de $\sum_{n \geq 0} f_n$ sur $]0; 1[$?
- c. Existence et calcul de $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x) dx$.

30 Centrale Maths1 PSI 2023 Fares Kerautret

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ ait un rayon de convergence $R = +\infty$.

On définit alors l'application $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ par $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

- a. Montrer que $\forall r > 0, \forall p \in \mathbb{N}, \int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-ip t} dt = 2\pi a_p r^p$.
- b. Si f est bornée sur $\mathbb{C}$, montrer que $\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall r > 0, \forall p \in \mathbb{N}, |a_p| \leq \frac{M}{r^p}$. En déduire que f est constante.
- c. S'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ et $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tels que $\forall z \in \mathbb{C}, |f(z)| \leq \alpha |z|^q + \beta$, montrer que f est polynomiale.
- d. Si $\forall z \in \mathbb{C}, |f(z)| \leq e^{\operatorname{Re}(z)}$, montrer qu'il existe $k \in \mathbb{C}$ tel que $\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = ke^z$.

31 Centrale Maths1 PSI 2023 Antoine Notelle-Maire

Soit $I = [0; 1]$ et l'équation (E) : $u(x) = 1 + \int_0^x u(t - t^2) dt$ d'inconnue $u \in C^0(I, \mathbb{R})$.

On définit la suite de fonctions $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur I par $u_0(x) = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n(t - t^2) dt$.

- a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, 0 \leq u_{n+1}(x) - u_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.
- b. On pose $f_n = u_{n+1} - u_n$. Montrer que $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur I .
- c. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction u .
- d. Prouver que u est solution de (E). Résoudre entièrement (E).

32 Mines PSI 2023 Antoine Campos I

Pour x et s réels, en cas de convergence, on pose $f(x, s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^s}$.

- a. Donner les domaines de définition de $x \mapsto f(x, 0)$ et $x \mapsto f(x, 1)$ et en trouver des expressions simples.
- b. Donner le rayon de convergence R_s de la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^s}$.
- c. Donner les domaines de définition I_s de $x \mapsto f(x, s)$.
- d. Établir un lien entre $f(x, s)$ et $f(x, s-1)$.
- e. Trouver une expression simple de $f(x, -1)$ et $f(x, -2)$.
- f. Déterminer un équivalent en 1^- de $f(x, -p)$ pour $p \in \mathbb{N}$.

33 Mines PSI 2023 Rémi Darrieumerle I

En cas de convergence, pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\eta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ et $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \frac{1}{n^x}$.

- a. Déterminer les ensembles de définition de η et ζ .
- b. Pour $x > 1$, exprimer $\eta(x)$ en fonction de $\zeta(x)$.
- c. Montrer que η est de classe C^1 sur son ensemble de définition.
- d. Trouver deux réels a et b tels que $\zeta(x) \underset{x \rightarrow 1^+}{=} \frac{a}{x-1} + b + o(1)$.

34 Mines PSI 2023 Raphaël Dénier I

Pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{n(2n+1)}$.

- a. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{n(2n+1)}$.
- b. $S(R)$ et $S(-R)$ sont-ils définis ? Quel est donc le domaine I de définition de S ?
- c. D'après le cours, la fonction S est continue sur quel intervalle au moins ?
- d. S est-elle continue sur I ?
- e. Calculer $S(x)$ pour $x \in]-R; R[$ à l'aide de fonctions usuelles.
- f. Calculer $a = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}$. Quel est le signe de a ? Était-ce prévisible ?

35 Mines PSI 2023 Alban Dujardin I

En cas de convergence, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(nx)}{n^2}$.

- a. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
- b. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.
- c. Trouver un équivalent de $f'(x)$, puis de $f(x)$, quand x tend vers 0^+ .
- d. Quelles sont les variations de f ?
- e. Trouver les limites de f en $\pm\infty$.
- f. Tracer la courbe représentative de f .

36 Mines PSI 2023 Juan Dupierris I

On définit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $a_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k a_{n-k}$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n x^n}{n!}$.

- a. Montrer que le rayon de convergence R de $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n x^n}{n!}$ vérifie $R \geq 1$.
- b. Décomposer f^2 en série entière.
- c. En déduire la valeur de f et des a_n pour tout entier naturel n .

37 Mines PSI 2023 Tom Graciet II

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

a. Déterminer le développement asymptotique de H_n à la précision $o(1)$.

b. En déduire la limite de $(H_{2n} - H_n)_{n \geq 1}$.

c. Retrouver la limite de $(H_{2n} - H_n)_{n \geq 1}$ avec une somme de RIEMANN.

d. Grâce au développement de H_n , calculer $S_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, $S_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n-1)}$ et $S_3 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sum_{k=1}^n k^2}$.

38 Mines PSI 2023 Fares Kerautret II

a. Montrer que $g : x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}$ est développable en série entière.

b. Encadrer le rayon de convergence R de la série précédente.

39 Mines PSI 2023 Arthur Melnitchenko II

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \geq 0$, $u_{n+1} = u_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$.

On admet le résultat (C), pour une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \neq 0$, alors $\sum_{k=0}^{n-1} u_k \underset{+\infty}{\sim} n\ell$.

a. Déterminer un équivalent de u_n et en déduire le rayon de convergence R de $\sum_{n \geq 0} u_n x^n$.

b. Calculer $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$.

c. Montrer le résultat (C).

40 Mines PSI 2023 Sacha Meslier I

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \int_0^1 \frac{t^n}{2+t^2} dt$.

Soit f la somme de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ dont on note R le rayon de convergence.

a. Montrer que $R \geq 1$.

b. Donner une expression simple de $f(x)$ pour $x \in]-1; 1[$ à l'aide de fonctions usuelles.

c. Montrer que $R = 1$.

41 Mines PSI 2023 Paul Picard II

Pour $n \geq 1$, on pose $a_n = \int_n^{+\infty} \frac{\text{th}(t)}{t^2} dt$. On note $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ s'il y a convergence.

a. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$.

b. f est-elle continue en -1 ?

c. Montrer que $f(x) \underset{1^-}{\sim} -\ln(1-x)$.

42 Mines PSI 2023 Nathan Roy I

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ par $f_n(x) = e^{-n^\alpha} e^{inx}$.

En cas de convergence, pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

a. Pour quelles valeurs de α a-t-on convergence simple de $\sum_{n \geq 1} f_n$ sur $\mathbb{R}$?

b. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et calculer $\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$.

c. En utilisant FUBINI, montrer que f est développable en série entière si $\alpha \geq 1$.

d. Si $\alpha \in]0; 1[$, trouver une minoration de $|f^{(k)}(0)|$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ qui fait intervenir $N = \left\lfloor \left(\frac{k}{\alpha}\right)^{1/\alpha} \right\rfloor$.

En déduire que f n'est pas développable en série entière.

43 Mines PSI 2023 Elae Terrien I

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note v_n le nombre de n -uplets $(a_1, \dots, a_n)$ tels que :

- $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, a_k = \pm 1$.
- $\sum_{k=1}^n a_k = 0$.
- $\forall p \in \llbracket 1; n \rrbracket, \sum_{k=1}^p a_k \geq 0$.

a. Justifier que $v_{2n+1} = 0$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Par convention, on pose $v_0 = u_0 = 1$. On note, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = v_{2n}$.

b. Calculer u_1, u_2, u_3 .

c. Trouver, pour $n \in \mathbb{N}$, une relation liant $u_{n+1}, u_n, \dots, u_1, u_0$.

d. En s'intéressant à $\sum_{n \geq 0} u_n x^n$, trouver une expression simple de u_n .

44 CCINP PSI 2023 Paul-Antoine Baury-Carpentier II

Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\exists C > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |\varphi(x)| \leq \frac{C}{1+x^2}$.

On pose $f : x \mapsto \varphi(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} (\varphi(x+n) + \varphi(x-n))$. Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et 1-périodique.

a. Montrer que f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que f est 1-périodique.

c. Montrer que $\varphi \times g$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)g(x)dx = \int_0^1 f(x)g(x)dx$.

45 CCINP PSI 2023 Rémi Darrieumerle I et Chloé Vagner I

En cas de convergence, pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}$. On admet que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

a. Déterminer le domaine de définition de f .

b. Montrer que f est continue sur son ensemble de définition.

c. Déterminer un équivalent de f en 1^- .

46 CCINP PSI 2023 Hugo Delval II

On note $f_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ en cas de convergence.

- Déterminer l'ensemble D_f de définition de f .
- Montrer que $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement sur $[a; +\infty[$ pour tout $a > 0$.
- f est-elle continue sur D_f ? Calculer sa limite en $+\infty$.
- Montrer que $\int_n^{n+1} e^{-x\sqrt{t}} dt \leq f_n(x) \leq \int_{n-1}^n e^{-x\sqrt{t}} dt$. En déduire un équivalent de f en 0^+ .
- Étudier la convergence normale et uniforme de $\sum_{n \geq 0} f_n$ sur D_f .

47 CCINP PSI 2023 Armand Dépée I

Soit les trois suites réelles $(u_n)_{n \geq 1}$, $(v_n)_{n \geq 1}$, $(w_n)_{n \geq 1}$ et $(x_n)_{n \geq 1}$ définies par :

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}, \quad v_n = \frac{(-1)^n}{n} u_n, \quad w_n = \frac{(-1)^n}{n} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}} \quad \text{et} \quad x_n = (-1)^n w_n.$$

- Justifier que $(u_n)_{n \geq 1}$ est bien définie et qu'elle tend vers 0.
- Justifier que $\sum_{n \geq 1} v_n$ converge.
- Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} w_n$?
- Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} x_n$?

48 CCINP PSI 2023 Fares Kerautret I

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \frac{e^{-x} x^n}{n!}$.

En cas de convergence, on note $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

- Étudier la convergence simple de $(f_n)_{n \geq 0}$ sur $\mathbb{R}_+$.
- Étudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n \geq 0}$ sur $\mathbb{R}_+$.
- Étudier la convergence simple de $\sum_{n \geq 0} f_n$ sur $\mathbb{R}_+$. Calculer $f(x)$.
- Soit $a > 0$, montrer que $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement sur $[0; a]$.
- Montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme de $\sum_{n \geq 0} f_n$ sur $\mathbb{R}_+$.

49 CCINP PSI 2023 Sacha Meslier II

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \sin(nx e^{-nx^2})$.

- Montrer que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers une fonction F à déterminer.
- Montrer que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément sur tout segment $[a; 1]$ avec $a \in]0; 1[$.
- En considérant $f_n\left(\frac{1}{n}\right)$, que dire de la convergence uniforme de $(f_n)_{n \geq 1}$ sur $[-1; 1]$?

ORAUX 2024 THÈME 4

ESPACES VECTORIELS NORMÉS

50 *ENS Cachan PSI 2023* Juan Dupierris I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et U un convexe de $\mathbb{R}^n$.

a. Soit $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ convexe. On définit $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ par $h(v) = \text{Max}(f(v), g(v))$. Montrer que h est convexe.

Dans la suite, on prend $n = 2$ et on considère $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ convexe.

Pour $y \in \mathbb{R}$, quand $C_y = U \cap (\mathbb{R} \times \{y\})$ est non vide, on pose $f(y) = \sup_{x \in C_y} (F(x, y))$.

b. Montrer que f est définie sur un convexe C et que f est convexe sur C .

c. Déterminer C et f dans les trois cas suivants :

- $F : U = \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $F(x, y) = xy + ax + by$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
- $F : U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $F(x, y) = xy - \frac{1}{x}$.
- $F : U = \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $F(x, y) = xy - e^x$.

51 *ENS Cachan PSI 2023* Chloé Vagner

On note C_0 l'ensemble des suites réelles ayant une limite nulle : $C_0 = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0\}$.

Soit $\|a\|_{\infty} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$ si $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\Phi : C_0 \rightarrow C_0$ définie par $\Phi(a) = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $b_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n a_k$.

a. Montrer que Φ est continue et qu'elle conserve la positivité.

Soit $a \in C_0$ telle que $(a^p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge uniformément et la suite de suites $(a^p)_{p \in \mathbb{N}} \in (C_0)^{\mathbb{N}}$ définie par $a^0 = a$ et $\forall p \in \mathbb{N}, a^{p+1} = \Phi(a^p)$.

b. Montrer que l'unique point fixe de Φ est la suite nulle.

c. Montrer que $(a^p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la suite constante $(a_0)_{n \in \mathbb{N}}$.

d. En déduire que $(a^p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge uniformément si et seulement si $a_0 = 0$.

Si $a \in C_0$, on lui associe $f_a : x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$.

e. Que peut-on dire du rayon de convergence de $\sum_{k \geq 0} a_k x^k$?

f. Montrer que $f_{\Phi(a)}$, qu'on note Tf_a , vérifie $Tf_a(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{f_a(t)}{1-t} dt$.

g. En posant $y = \frac{x}{1-x}$ pour $x \in]0; 1[$, montrer que $Tg(x) = \frac{1}{y} \int_0^y g(t)(1-t) dt$ où $g : t \mapsto (1-t)f_a(t)$.

52 ENS Cachan PSI 2023 Antoine Vallade

Soit $f \in C^0([a; b], \mathbb{C}) = E$, F un sous-espace vectoriel de dimension n de E .

a. Montrer que $\exists q \in F$, $\|f - q\|_{\infty, [a; b]} = \inf_{p \in F} \|f - p\|_{\infty, [a; b]}$ qu'on note $d(f, F)$.

Soit des réels $t_1, \dots, t_n$ tels que $a \leq t_1 < \dots < t_n \leq b$.

Pour tout entier $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on définit $\delta_i : F \rightarrow \mathbb{C}$ par $\delta_i(g) = g(t_i)$.

On définit les deux assertions suivantes :

(i) $\exists! q \in F$, $\|f - q\| = d(f, F)$.

(ii) $\forall p \in F$, $(\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, p(t_i) = 0) \implies p = 0$.

b. Montrer que $(\delta_1, \dots, \delta_n)$ est liée.

Il existe donc $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq (0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_i = 0$.

c. Soit $q_0 \in F$ telle que $q_0 \neq 0$ et $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $q_0(t_i) = 0$. Soit $w \in F$ telle que $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $w(t_i) = \frac{\overline{\alpha_i}}{|\alpha_i|} \delta_i(t)$

si $\alpha_i \neq 0$ et $w(t_i) = 0$ sinon et $\|w\| \leq 1$. Soit $f(t) = w(t) \left(1 - \frac{|q_0(t)|}{2\|q_0\|}\right)$. Calculer $\sum_{i=1}^n \alpha_i (h(t_i) - q_0(t_i))$. En

déduire que $d(h, F) \geq 1$, puis que $d(h, F) = 1$. Montrer que $\forall c \in \left[0; \frac{1}{2\|q_0\|}\right]$, $\|f - q\| = \|f - q_0\|$.

Que vient-on de prouver ?

d. Montrer la réciproque.

53 Mines PSI 2023 Pierre Dobeli II

a. Montrer que $O(n)$ n'est pas convexe.

b. Montrer que $O(n)$ est un fermé borné.

c. Caractériser géométriquement l'endomorphisme canoniquement associé à $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

54 Mines PSI 2023 Maxence Prieur I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A, B deux matrices de $M_n(\mathbb{C})$.

Pour $n+1$ complexes distincts $a_0, a_1, \dots, a_n$, on définit $\Phi : \mathbb{C}_n[X] \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ par $\Phi(P) = (P(a_0), \dots, P(a_n))$.

a. Montrer que Φ est une bijection.

b. En déduire que $\forall i \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $\exists! L_i \in \mathbb{C}_n[X]$, $(L_i(a_i) = 1 \text{ et } \forall j \in \llbracket 0; n \rrbracket \setminus \{i\}, L_i(a_j) = 0)$.

c. Pour $M \in M_n(\mathbb{C})$, trouver une expression de χ_M en fonction de $L_0, \dots, L_n$.

d. Montrer que l'application $f : M \rightarrow \chi_M$ est continue.

e. Montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

55 Mines PSI 2023 Antoine Vallade I

Soit E un espace normé, X une partie de E et C un convexe de E .

a. Montrer que $\overset{\circ}{X} \subset X \subset \overline{X}$.

b. Montrer que $\overset{\circ}{C}$ et $\overline{C}$ sont aussi des convexes.

56 CCINP PSI 2023 Olivier Farje I

Soit $E = \{f \in C^1([0; 1], \mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$ et N_1, N_2 les deux applications définies sur E par $N_1(f) = \|f + f'\|_{\infty}$ et $N_2(f) = \|f'\|_{\infty}$ (les normes infinies sont calculées sur $[0; 1]$).

a. Montrer que N_1 et N_2 sont des normes.

b. Montrer que N_1 et N_2 sont équivalentes.

ORAUX 2024 THÈME 5

RÉDUCTION

57 ENS Cachan PSI 2023 Paul Bats et Farès Kerautret

Soit un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$.

- a. Si A est diagonalisable et $P \in \mathbb{C}[X]$, montrer que $P(A)$ est diagonalisable.
- b. Si A est diagonalisable à valeurs propres distinctes, quelles sont les matrices inversibles U telles que $U^{-1}AU$ est diagonale ?
- c. Si A et B sont simultanément diagonalisables, et que les valeurs propres de B sont toutes distinctes, montre qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A = P(B)$.
- d. Si A et B sont simultanément diagonalisables, montrer qu'il existe une matrice $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et deux polynômes P_A et P_B dans $\mathbb{C}[X]$ tels que $A = P_A(C)$ et $B = P_B(C)$.
- e. Si A n'est pas diagonalisable et si on note r_λ la multiplicité d'une valeur propre λ de A , montrer qu'on a l'équivalence, pour $P \in \mathbb{C}[X]$: $(P(A) \text{ diagonalisable}) \iff (\forall \lambda \in \text{Sp}(A), P'(\lambda) = \dots = P^{(r_\lambda-1)}(\lambda) = 0)$.
- f. La matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ est-elle un carré dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?
- g. Montrer, si A est inversible, que A diagonalisable $\iff (\exists k \in \mathbb{N}^*, A^k \text{ diagonalisable})$.

58 ENS Cachan PSI 2023 Alban Dujardin I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\text{Sp}(A) \subset \bigcup_{i=1}^n \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{i,i}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{i,j}| \right\}$.

Indication : écrire le système $Au = \lambda u$ en une ligne i quelconque.

59 ENS Cachan PSI 2023 Paul Picard

Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Si $g \in \mathcal{L}(E)$, on pose $\varphi_f(g) = f \circ g - g \circ f$.

- a. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $g \in \mathcal{L}(E)$, calculer $\varphi_f^n(g)$.
- b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, f^{n+1} \circ g - g \circ f^{n+1} = \sum_{k=0}^n f^k \circ (f \circ g - g \circ f) \circ f^{n-k}$.
- c. On suppose que $f \notin \text{GL}(E)$, montrer que f nilpotente $\iff \varphi_f$ nilpotente.
- d. Montrer que si f n'admet qu'une seule valeur propre, alors φ_f est nilpotente. La réciproque est-elle vraie ?

60 Centrale Maths1 PSI 2023 Antoine Campos

Soit $S = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$. On note, pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $D(a, b) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

- a. Montrer que S est semblable à une matrice $D(a, b)$ que vous déterminerez.
- b. Montrer que S est semblable à une matrice à diagonale nulle que vous déterminerez.
- c. En étudiant l'application $\phi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $\phi(M) = D(1, 2)M - MD(1, 2)$, montrer qu'il existe un couple $(C, D) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2$ tel que $S = CD - DC$.

61 Centrale Maths1 PSI 2023 Marius Desvalois

Soit $E = \mathbb{C}^4$, $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que $u^2 = v^2 = \text{id}_E$ et $u \circ v = -v \circ u$.

- a. Montrer que $\text{Tr}(u) = \text{Tr}(v) = 0$.
- b. Montrer que u est diagonalisable et que -1 et 1 sont valeurs propres doubles de u .
- c. Soit (x, y) une base de $E_1(u)$. Montrer que la famille $(v(x), v(y))$ est une base de $E_{-1}(u)$ et que la famille $(x, y, v(x), v(y))$ est une base de E .
- d. Montrer que $u \circ v$ est diagonalisable et donner les éléments propres de $u \circ v$.

62 Centrale Maths1 PSI 2023 Clément Gallice

Soit E l'ensemble des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $P \in E$, on pose $L(P) : x \mapsto e^x \int_{-\infty}^x P(t)e^{-t} dt$.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que f est intégrable en $-\infty$.

- a. Montrer que $F : x \mapsto \int_{-\infty}^x f(t)dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(x)$ pour tout réel x .
- b. Montrer que L est un endomorphisme de E .
- c. Déterminer les éléments propres de L .

63 Centrale Maths1 PSI 2023 Sacha Meslier

Soit un entier $q \geq 2$ et deux familles $(a_1, \dots, a_q)$ et $(b_1, \dots, b_{q-1})$ de réels strictement positifs. On définit

alors la matrice $A = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & a_q \\ b_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{q-1} & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$.

- a. Justifier que 0 n'est pas valeur propre de A .
- b. Montrer que A^q a tous ses coefficients strictement positifs.
- c. Donner la dimension des sous-espaces propres associés aux valeurs propres complexes de A .
- d. Montrer que A admet une unique valeur propre strictement positive.

64 Mines PSI 2023 Bader Ben Amira I

Soit un entier $n \geq 2$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour $P \in E$, on pose $T(P) = P(1)(X^2 - X) + P(-1)(X^2 + X)$.

- a. Montrer que T est un endomorphisme de E et donner sa matrice dans la base canonique de E .
- b. Déterminer $\text{Ker}(T)$ et $\text{Im}(T)$.
- c. En déduire les sous-espaces propres de T . T est-il diagonalisable ?

65 Mines PSI 2023 Arthur Biot III

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$.

- a. La matrice A est-elle diagonalisable ?
- b. Déterminer une matrice triangulaire T semblable à A .
- c. Quelle est la dimension du commutant $C(A) = \{B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \mid AB = BA\}$?

66 Mines PSI 2023 Rebecca Blé III

Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^2 + M^T = I_n$.

- a. Montrer que M est diagonalisable. Donner les valeurs propres possibles de M .
- b. La matrice M est-elle forcément symétrique ?

67 Mines PSI 2023 Mathys Bureau I

Soit $E = C^\infty([0; 1], \mathbb{R})$ et T définie sur E par $T(f) = \frac{1}{2} \left(f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) \right)$.

- a. Montrer que f est un endomorphisme de E .
- b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0; 1]$ et $f \in E$, donner une expression de $T^n(f)(x)$ sous forme de somme.
- c. Déterminer la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} T^n(f)(0)$.
- d. Trouver de même, pour $x \in [0; 1]$, la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} T^n(f)(x)$.
- e. Montrer que 1 est valeur propre de T et déterminer $E_1(T)$.
- f. Soit $k \in \mathbb{R}$ tel que $|k| > 1$, est-ce que k peut être valeur propre de T ?
- g. Pour $f \in E$, calculer $(T(f))'$. Déterminer $E_{1/2}(T)$.

68 Mines PSI 2023 Hugo Delval I

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$, on pose $A_n = \begin{pmatrix} 1 & -a/n \\ a/n & 1 \end{pmatrix}$.

- a. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{i\alpha}{n}\right)^n$.
- b. Diagonaliser A_n .
- c. En déduire la convergence et la limite de la suite $(A_n^n)_{n \geq 1}$.

69 Mines PSI 2023 Raphaël Dénier II et Tom Graciet I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\forall Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \exists ! X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), AX - XB = Y$.
- (ii) $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), AX = XB \implies X = 0$.
- (iii) $\chi_B(A)$ est une matrice inversible.
- (iv) A et B n'ont aucune valeur propre commune.

70 Mines PSI 2023 Clément Gallice II et Chloé Vagner II

Soit V un hyperplan de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui ne contient que des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On pose la partie $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On munit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique.

- a. Donner un exemple de tel hyperplan V .
- b. Montrer que $F \cap V \neq \{0\}$. En déduire que $I_2 \in V$.
- c. Donner la dimension de $V^\perp$. En déduire qu'il existe $Q \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $QVQ^{-1} = S_2(\mathbb{R})$.

71 *Mines PSI 2023* Fares Kerautret I

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

- Donner tous les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par A .
- Quelle est la structure de $C(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$? Déterminer sa dimension.
- Quelles sont les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (resp. $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$) telles que $M^2 = A$?

72 *Mines PSI 2023* Esteban Maurer II

- Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})^2$ tel que $AB = BA$. Montrer que B est un polynôme en A ou A un polynôme en B .
- Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})^2$ tel que $AB = BA$. Est-ce que B est un polynôme en A ou A un polynôme en B ?
- Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})^2$ tel que $AB = BA$. Est-ce que B est un polynôme en A ou A un polynôme en B ?

73 *Mines PSI 2023* Arthur Melnitchenko I

Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\det(A) = 32$ et $A^2 - 6A + 8I_3 = 0$.

On définit $\varphi_A : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par la relation $\varphi_A(B) = AB$. Déterminer $\text{Tr}(\varphi_A)$.

74 *Mines PSI 2023* Sacha Meslier II

Soit $k \in \mathbb{C}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- Si $k \in \mathbb{R}$, la matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$? Si oui, la diagonaliser.
- Si $k \in \mathbb{C}$, pour quelles valeurs de k la matrice A est-elle diagonalisable ?

75 *Mines PSI 2023* Antoine Notelle-Maire II

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & \sin(2\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(2\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & 0 & \sin(2\alpha) \end{pmatrix}$. Étudier la diagonalisabilité de $A(\alpha)$ en fonction de α .

76 *Mines PSI 2023* Marie-Lys Ruzic II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et un ensemble $G \subset \text{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que :

- $\forall A \in G, A^{-1} \in G$.
- $\forall A \in G, \exists p \in \mathbb{N}^*, A^p = I_n$.
- $\forall (A, B) \in G^2, AB \in G$ et $AB = BA$.

On note F le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ engendré par les matrices de G , $r = \dim(F)$ et $(M_1, \dots, M_r)$ une base de F . On définit $\varphi : G \rightarrow \mathbb{C}^r$ par $\varphi(A) = (\text{Tr}(AM_1), \dots, \text{Tr}(AM_r))$.

- Montrer que φ est injective.
- Montrer que $\text{Im}(\varphi)$ est fini.
- En déduire que G est fini.

77 CCINP PSI 2023 Paul Bats I

Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et $f \in \mathcal{L}(E)$.

- a. Montrer que si f est diagonalisable alors f^2 est diagonalisable.
- b. Si f^2 est diagonalisable, f l'est-elle forcément ?
- c. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $\mu^2 = \lambda$, montrer que $\text{Ker}(f^2 - \lambda \text{id}_E) = \text{Ker}(f - \mu \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(f + \mu \text{id}_E)$.
- d. Montrer que si f^2 est diagonalisable et inversible, alors f est diagonalisable.

78 CCINP PSI 2023 Bader Ben Amira II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $E_{i,j}$ la matrice élémentaire classique telle que $BR = (E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ forme la base canonique de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- a. Donner la définition d'un projecteur.
- b. Pour $(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2$, est-ce que $E_{i,j}$ est une matrice de projecteur ?
- c. Montrer que si M est diagonalisable, M est une combinaison linéaire de matrices de projecteurs.

d. Montrer que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont des matrices de projecteurs.

Vous donnerez les éléments géométriques caractéristiques de ces deux projections.

- e. Une matrice écrite comme combinaison de matrices de projecteurs est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

79 CCINP PSI 2023 Maddie Bisch I et Rebecca Blé I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ tel que $\text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B) = \emptyset$.

- a. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(A) = 0$, montrer que $\forall \lambda \in \text{Sp}(A), P(\lambda) = 0$.
- b. Montrer que $\chi_A(B) \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$.
- c. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que $AM = MB \iff M = 0$.
- d. Montrer que $\forall C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \exists ! M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), AM - MB = C$.

80 CCINP PSI 2023 Armand Dépée II

Soit un entier $n \geq 2$ et un complexe α . On pose $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $a_{i,j} = \alpha^{i+j-2}$.

- a. Si $\alpha \in \mathbb{R}$, montrer que A est diagonalisable.
- b. Calculer le rang de A , en déduire ses valeurs propres.
- c. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.

81 CCINP PSI 2023 Pierre Dobeli II

a. $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

- b. Trouver ses éléments propres.
- c. Trouver $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $R^2 = A$. Montrer que les matrices R qui conviennent sont diagonalisables.

82 CCINP PSI 2023 Olivier Farje II et Arthur Melnitchenko I et Marie-Lys Ruzic I

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A .

- a. Montrer que A n'est pas diagonalisable mais trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- b. Trouver toutes les droites de $\mathbb{R}^3$ stables par a .

Soit dans les deux questions suivantes un plan P de $\mathbb{R}^3$ stable par a . On définit alors l'endomorphisme a' de P induit par a dans P , qu'on note $a' = a_P$.

- c. Montrer que $\chi_{a'}$ divise χ_a .
- d. En déduire que $P \subset \text{Ker}((a - 3\text{id}_{\mathbb{R}^3})^2)$.
- e. Quels sont les plans stables par a ?

83 CCINP PSI 2023 Jonathan Filocco II et Antoine Vallade II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_n = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall (i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2$, $a_{i,j} = i$ si $i = j$ et $a_{i,j} = 1$ sinon,

c'est-à-dire $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & n \end{pmatrix}$. On note P_n le polynôme caractéristique de A_n .

- a. Justifier que A_n est diagonalisable.
- b. Trouver le spectre de A_2 .
- c. Montrer que $\forall n \geq 3$, $P_n = (X - n + 1)P_{n-1} - X(X - 1) - (X - n + 2)$.
- d. En déduire que A_n admet au moins une valeur propre dans $]0; 1[$, $]1; 2[$, ..., $]n - 2; n - 1[$ et $]n; +\infty[$.
Indication : montrer que, pour $k \in \llbracket 0; n - 1 \rrbracket$, le réel $(-1)^k P_n(k)$ a le même signe que $P_n(0)$ et que $P_n(n) < 0$.
- e. En déduire, autrement qu'à la première question, que A_n est diagonalisable.

84 CCINP PSI 2023 Fares Kerautret II

Soit un entier n impair tel que $n \geq 3$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$.

Pour $P \in E$, on pose $\Phi(P) = P(1 - X) + P(0)X^n$.

- a. Montrer que $\Phi \in \mathcal{L}(E)$. Déterminer la matrice A de Φ dans la base canonique de E .
- b. Calculer A^2 et montrer que A^2 est triangulaire.
- c. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A , montrer que λ^2 est une valeur propre de A^2 .
- d. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A^2 , montrer que l'une des racines carrées de λ est valeur propre de A .
- e. Déterminer les valeurs propres de Φ .

85 CCINP PSI 2023 Chloé Vagner II

a. Calculer χ_M avec $M = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 5 & -3 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

b. M est-elle trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

c. M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

d. Résoudre le système $\begin{cases} x' = 4x - 3x + 3z \\ y' = 5x - 3y + 4z \\ z' = -x + 2y - z \end{cases}$.

86 Mines-Télécom PSI 2023 Armand Dépée I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - 3A - 5I_n = 0$. Montrer que $\det(A) > 0$.

ORAUX 2024 THÈME 6

THÉORÈMES DE DOMINATION

87 Centrale Maths1 PSI 2023 Arthur Biot

Pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)} dt$.

- a. Donner l'ensemble de définition D de F et montrer que F est continue sur D .
- b. Montrer que F est de classe C^1 sur D et calculer $F'(x)$.
- c. En déduire une expression simple de $F(x)$ pour $x \in D$.

88 Centrale Maths1 PSI 2023 Mathys Bureau et Pierre Dobeli

Pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{1+t^2} dt$.

- a. Déterminer le domaine de définition D de f .
- b. Pour $x \in D$, on pose $g(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t^x}{1+t^2} dt$. Montrer que g est développable en série entière sur D .
- c. Montrer que f est développable en série entière sur D .

89 Centrale Maths1 PSI 2023 Alban Dujardin I

Pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(tx)}{t(1+t^2)} dt$.

- a. Donner l'ensemble de définition D de F .
- b. Montrer que F est de classe C^1 sur $[0; \infty[$.
- c. En déduire une expression simple de $F(x)$ pour $x \in D$.
- b. Déterminer la valeur de $J = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(\theta)) d\theta$.

90 Centrale Maths1 PSI 2023 Nathan Roy

Pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+1} + t + 1}$.

- a. Donner le domaine de définition D de F .
- b. Montrer que F est dérivable sur D et donner sa dérivée.
- c. Montrer que $F(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(3)}{2x}$.

91 Centrale Maths1 PSI 2023 Arthur Séguette

Pour tout entier naturel n , on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(n+x)}{(n+x)\sqrt{x}} dx$.

- a. Vérifier que la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ est bien définie.
- b. Déterminer la limite de $(I_n)_{n \geq 0}$.
- c. Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(n+x)}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
- d. En déduire un équivalent de I_n .

92 Mines PSI 2023 Paul Bats I

En cas de convergence, pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+x)}$.

- a. Trouver le domaine de définition D de f .
- b. Montrer que f est de classe C^∞ sur D .
- c. Pour $x \in D$, calculer $xf(x) - f(x+1)$.
- d. En déduire des équivalents de f en 0^+ et en $+\infty$.
- e. Montrer que $\forall x > 0, f(x) = \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt$.

93 Mines PSI 2023 Raphaël Déniel III et Tom Graciet III

Montrer que $\int_0^1 \frac{\ln(x) \ln(1-x)}{x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

94 Mines PSI 2023 Pierre Dobeli I

Pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence on pose $f(x) = \int_0^{2\pi} \ln(1+x \sin(t)) dt$.

- a. Déterminer le domaine de définition D de f . Montrer que f est paire sur D .
- b. Étudier la dérivabilité de f sur D .
- c. En déduire que f est développable en série entière sur D et donner son développement.

95 Mines PSI 2023 Esteban Maurer I

Pour $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{k+1}\right)^n$ et $v_n = \int_2^n \left(1 - \frac{1}{x}\right)^n dx$.

- a. Montrer que $v_n \underset{+\infty}{\sim} n \int_0^1 e^{-1/t} dt$.
- b. En déduire un équivalent simple de u_n .

96 Mines PSI 2023 Antoine Notelle-Maire I

Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, on note $I(x) = \int_0^\pi \ln(x^2 - 2x \cos(\theta) + 1) d\theta$.

On se propose de calculer la valeur de $I(x)$ par deux méthodes.

- a. Justifier l'existence de $I(x)$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
- b. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, I(x) = 2 \int_0^\pi \ln(|x - e^{i\theta}|) d\theta$.

Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n(x) = \frac{2\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln(|x - e^{\frac{ik\pi}{n}}|)$.

- c. Montrer que $S_n(x) = \frac{2\pi}{n} \ln(|x^n - 1|)$. En déduire la valeur de $I(x)$.
- d. Montrer que I est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ et calculer $I'(x)$. En déduire à nouveau la valeur de $I(x)$.

97 Mines PSI 2023 Paul Picard I

Pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^3 e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}} dt$.

- Déterminer le domaine de définition D de f . Étudier la monotonie de f sur D .
- Sur quel domaine la fonction f est-elle continue ? dérivable ? Étudier la monotonie de f' .
- Déterminer la limite de f en $+\infty$.
- Calculer, pour $x > 0$, la valeur de $g(x) = \int_0^{+\infty} t^3 e^{-xt} dt$.
- En déduire que $f(x) \sim_{+\infty} \frac{6}{x^4}$. Indication : on pourra s'intéresser à $|f(x) - g(x)|$.
- Déterminer la limite de f en 0^+ .

98 Mines PSI 2023 Maxence Prieur II

Pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $f(x) = \int_0^1 |\ln(t)|^x dt$.

- Déterminer le domaine de définition D de f .
- Montrer que f est de classe C^∞ sur D .
- Exprimer f en fonction de Γ . En déduire la valeur de $f(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

99 CCINP PSI 2023 Bader Ben Amira I

Soit $f :]0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{x^x}$ et, pour $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, on pose $I_{n,p} = \int_0^1 x^p \ln^n(x) dx$.

- Montrer l'existence de $I_{n,p}$ pour toutes valeurs des entiers naturels n et p .
- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \mathbb{N}, I_{n,p} = -\frac{n}{p+1} I_{n-1,p}$.
- Montrer que f est intégrable sur $]0; 1]$.
- Montrer que $\int_0^1 \frac{1}{x^x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$.

100 CCINP PSI 2023 Rebecca Blé II

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{\sin(xt)}{t} dt$.

- Montrer que φ est définie sur $\mathbb{R}$.
- Montrer que φ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Mettre $\varphi'(x)$ et $\varphi(x)$ sous forme de fonctions usuelles.

101 CCINP PSI 2023 Arthur Melnitchenko II et Marie-Lys Ruzic II

Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{1+e^t} dt$ existe et que $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{1+e^t} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{1+n^2}$.

ORAUX 2024 THÈME 7

ESPACES PRÉHILBERTIENS RÉELS ET ESPACES EUCLIDIENS

102 ENS Cachan PSI 2023 Antoine Campos

Soit un entier $m \geq 2$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $A^{(n)} = (a_{i,j}^{(n)})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $a_{i,j}^{(n)} = \frac{1}{i+j-1}$.

a. Montrer que $\sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{\sqrt{k(m-k)}} \geq \int_1^{m-1} \frac{1}{\sqrt{x(m-x)}} dx$.

b. Calculer $\int_1^{m-1} \frac{1}{\sqrt{x(m-x)}} dx$. Indication : on pourra poser $x = \frac{m}{1+t^2}$.

c. Montrer que si $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifie $V \neq 0$, alors $V^T A^{(n)} V > 0$. En déduire que $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$.

103 ENS Cachan PSI 2023 Juan Dupierris III

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(A, B) \in (S_n^+(\mathbb{R}))^2$.

a. Si A inversible, montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale avec $P^T A P = I_n$ et $P^T B P = D$.

b. Montrer que $\forall t \in [0, 1]$, $\det(tA + (1-t)B) \geq (\det(A))^t (\det(B))^{1-t}$.

c. En déduire la concavité de $\ln \circ \det$ sur $S_n^+(\mathbb{R})$.

104 Centrale Maths1 PSI 2023 Bader Ben Amira

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique avec sa base canonique $\mathcal{B}_0$.

Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A$.

On définit les deux endomorphismes p et q de E tels que $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(p)$ et ${}^t A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(q)$.

a. Montrer que $\forall (x, y) \in E^2$, $(p(x)|y) = (x|q(y))$.

b. Soit $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ une base orthonormée de E . Montrer que $\text{Tr}(q \circ p) = \sum_{k=1}^n \|p(v_k)\|^2$.

c. Montrer que si p est un projecteur orthogonal, $\text{Tr}(q \circ p) = \text{Tr}(p)$.

d. Dans le cas général, montrer que $\text{Tr}(q \circ p) \geq \text{Tr}(p)$.

e. Montrer que $\text{Tr}(q \circ p) = \text{Tr}(p) \iff p$ est orthogonal.

105 Centrale Maths1 PSI 2023 Esteban Maurer

Pour une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on pose $M = \max(|a|, |d|, \frac{|b|+|c|}{2})$.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A et $X_0 = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre associé.

a. On suppose que $b = c$, quelle condition nécessaire et suffisante doivent satisfaire les coefficients de A pour que A soit une matrice symétrique positive.

b. Calculer $X_0^T A X_0$. En déduire que $|\lambda| \leq 2M$.

106 Centrale Maths1 PSI 2023 Maxence Prieur

Pour $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$, on pose $\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1)$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
- Montrer que $((X-1)^k)_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.
- Déterminer $(\mathbb{R}_n[X])^\perp$.

107 Centrale Maths1 PSI 2023 Marie-Lys Ruzic

Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et le vecteur

$b = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$ associé à B . Pour $x \in \mathbb{R}^3$, on lui associe canoniquement le vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

On définit l'application $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(x) = \|u(x) - b\|^2$.

- L'équation $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ admet-elle une solution ?
- Montrer que f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^3$.
- Ce minimum est-il atteint en un unique point de $\mathbb{R}^3$?
- Montrer l'équivalence entre (i) : $u(x) - b \in (\text{Im}(u))^\perp$ et (ii) : $A^T A X = A^T B$.
- Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f admette son minimum en $x \in \mathbb{R}^3$.

108 Mines PSI 2023 Paul Bats II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$ qu'on munit du produit scalaire $(A, B) \mapsto (A|B) = \int_0^1 A(t)B(t)dt$.

Pour $P \in E$, on définit le polynôme $u(P)$ par $u(P)(x) = \int_0^1 (x+t)^n P(t)dt$.

- Montrer que u est linéaire et à valeurs dans E .
- Montrer que u est autoadjoint.
- Montrer que u est bijectif.

109 Mines PSI 2023 Rebecca Blé I

Soit $\omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux telle que :

- $\forall x \in \mathbb{R}, \omega(x) \geq 0$.
- Il existe un intervalle I non vide tel que $\forall x \in I, \omega(x) > 0$.
- $\forall n \in \mathbb{N}, \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^n \omega(x) = 0$.

On pose $E = \mathbb{R}[X]$ et, pour $(P, Q) \in E^2$, on définit $\langle P, Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)\omega(t)dt$.

- Donner un exemple de telle fonction ω .
- Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E . E est-il euclidien ?
- Montrer qu'il existe une famille orthonormale $(P_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \deg(P_n) = n$.
- Montrer l'unicité de $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si on impose les polynômes P_n unitaires.
- Calculer P_0, P_1, P_2 avec la fonction ω donnée à la question **a.**.

110 Mines PSI 2023 Antoine Campos II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. on suppose que les valeurs propres de S comptées avec leur ordre de multiplicité se trouvent sur la diagonale de S .

Montrer que S est diagonale.

111 Mines PSI 2023 Rémi Darrieumerle II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in S_n(\mathbb{R})$, $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Pour $X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, on pose $\theta(X) = \frac{X^T A X}{X^T B X}$.

- a. Montrer que θ est bornée.
- b. La fonction θ admet-elle une limite quand X tend vers 0 ?

112 Mines PSI 2023 Marius Desvalois I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A, B deux matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire $(A, B) \in (S_n(\mathbb{R}))^2$.

- a. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $R \in S_n(\mathbb{R})$ telle que $A = R^2$.
- b. Dans le cas où cette condition est réalisée, combien y a-t-il de matrices $R \in S_n(\mathbb{R})$ telles que $A = R^2$?
- c. On suppose que $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$ et $\text{Sp}(B) \subset \mathbb{R}_+$, montrer que $\text{Tr}(AB) \geq 0$.

113 Mines PSI 2023 Juan Dupierris II

E désigne un espace euclidien de dimension finie non nulle.

- a. Montrer que si p est une projection orthogonale, alors p est symétrique.
- b. Soit p, q deux projecteurs orthogonaux. Montrer que $p \circ q \circ p$ est symétrique.
- c. Montrer que $(\text{Im}(p) + \text{Ker}(q))^\perp = \text{Im}(q) \cap \text{Ker}(p)$.
- d. Montrer que $p \circ q$ est diagonalisable à valeurs propres dans $[0; 1]$.

114 Mines PSI 2023 Lilian Dupouy I

Soit $\varphi_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi_0(x) = e^{-x^2}$.

On pose, pour $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, la quantité $(P|Q) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x^2} dx$.

- a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists! H_n \in \mathbb{R}[X]$, $\varphi_0^{(n)}(x) = (-1)^n H_n(x) \varphi_0(x)$.
- b. Déterminer le degré et le coefficient dominant de H_n .
- c. Montrer que $(P, Q) \mapsto (P|Q)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
- d. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $(P|H_n) = (P'|H_{n-1})$.
- e. En déduire que la famille $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthogonale.
- f. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\|H_n\|^2$.
- g. Déterminer la nature et la somme de $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} H_n(x)$.

115 Mines PSI 2023 Gabriel Hofman II

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}^*$, on pose $M_{\alpha, m} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \cdots & \alpha \\ \alpha & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \alpha \\ \alpha & \cdots & \alpha & 1 \end{pmatrix} \in M_m(\mathbb{R})$.

- a. Donner le spectre de $M_{\alpha, m}$.

Soit E un espace euclidien de dimension n et une famille $(u_1, \dots, u_{n+1})$ de $n+1$ vecteurs de E telle que $\forall (i, j) \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket^2$, $(u_i | u_j) = \alpha \neq 1$ si $i \neq j$ et $\|u_i\|^2 = 1$.

- b. Déterminer la valeur de α en fonction de n (qu'on notera α_n).
- c. Construire des vecteurs $u_1, \dots, u_{n+1}$ de E tels que $\forall (i, j) \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket^2$, $(u_i | u_j) = \alpha_n$ si $i \neq j$ et $\|u_i\|^2 = 1$.

116 Mines PSI 2023 Antoine Jeanselme II

Soit $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $M_n = (a^{|i-j|})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- a. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que M_2 soit définie positive.
- b. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que M_3 soit définie positive.
- c. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que M_4 soit définie positive.

117 Mines PSI 2023 Nathan Roy II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.

- a. Montrer que : A positive $\iff \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A = B^T B$.
- b. Montrer que : A définie positive $\iff \exists B \in GL_n(\mathbb{R}), A = B^T B$.
- c. On suppose A définie positive, montrer que $N : X \mapsto \sqrt{X^T A X}$ définit une norme sur $\mathbb{R}^n$.

118 Mines PSI 2023 Elae Terrien II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in (GL_n(\mathbb{R}))^2$, on dit que $A \sim B$ s'il existe une matrice $Q \in O(n)$ telle que $A = QB$.

Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible.

- a. Montrer qu'il existe $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $M \sim S$.
- b. La matrice S est-elle unique ?

119 Mines PSI 2023 Antoine Vallade II

Soit E un espace euclidien et $f : E \rightarrow E$ telle que $\forall (x, y) \in E^2, \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$.

On veut établir qu'il existe un unique couple $(u, g) \in E \times O(E)$ tel que $(P) : \forall x \in E, f(x) = u + g(x)$.

- a. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $f(x, y) = (1 - y, 3 + x)$. Trouver l'unique couple $(u, g) \in E \times O(E)$ tel que $(P) : \forall v \in E, f(v) = u + g(v)$.
- b. Si $(u, g) \in E \times O(E)$ vérifie (P) , donner des expressions de u et g en fonction de f .
- c. Si $u \in E$ et $g : E \rightarrow E$ ont les expressions trouvées à la question précédente, montrer que :

(i) $\forall x \in E, f(x) = u + g(x)$.

(ii) $\forall (x, y) \in E^2, (g(x)|g(y)) = (x|y)$.

(iii) $g \in O(E)$.

120 CCINP PSI 2023 Paul-Antoine Baury-Carpentier I

Soit $\varphi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(A, B) = \text{Tr}(A^T B)$.

On pose aussi $\Sigma = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

- a. Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- b. Montrer que Σ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- c. Exhiber une base orthonormale de $\Sigma^\perp$.
- d. Trouver la distance de la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ à $\Sigma^\perp$. Et celle de M à Σ ?

121 *CCINP PSI 2023* Rémi Darrieumerle II

On donne $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.

- Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$ en distinguant selon la parité de n .
- Montrer que $\varphi : (P, Q) \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2} dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
- Déterminer $d(X^3, \mathbb{R}_2[X])$.

122 *CCINP PSI 2023* Hugo Delval I

Soit $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\text{Sp}(M) = \{m_{1,1}, \dots, m_{n,n}\}$ (valeurs propres comptées avec leur ordre de multiplicité).

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 2 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

On note S_n (resp. A_n) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Les matrices A et B sont-elles dans $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$?
- L'ensemble $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
- Montrer que si $M \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ est symétrique, alors M est diagonale en considérant $\text{Tr}(M^2)$.
- Déterminer $\mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \cap A_n$.

123 *CCINP PSI 2023* Marius Desvalois II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $(\cdot | \cdot) : \mathbb{R}_n[X]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $(P|Q) = \sum_{k=0}^n a_k b_k$ si $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^n b_k X^k$.

- Montrer que $(\cdot | \cdot)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
- Calculer $d(1, H)$ où $H = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(1) = 0\}$.

124 *CCINP PSI 2023* Pierre Dobeli III

Soit $n \geq 2$ et $J_n = (1)_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Justifier que J_n est diagonalisable.
- Diagonaliser J_n très rapidement.

ORAUX 2024 THÈME 8

PROBABILITÉ ET VARIABLES ALÉATOIRES

125 *X PSI 2023* Paul Picard I

Un jeu peut être dans seulement deux états notés 0 et 1. Et on passe de l'un à l'autre par des étapes discrètes numérotées par des entiers naturels.

On passe de l'état 0 à l'état 1 avec une probabilité $p \in]0; 1[$.

On passe de l'état 1 à l'état 0 avec une probabilité $q \in]0; 1[$.

a. Calculer la probabilité p_n d'être à l'état 1 à l'instant n .

b. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$.

126 *ENS Cachan PSI 2023* Arthur Biot et Maddie Bisch

Soit un entier $n \geq 2$ et $n = p_1^{s_1} \cdots p_r^{s_r}$ sa décomposition en produit de nombres premiers. Pour tout diviseur $d \in \llbracket 1; n \rrbracket$ de n , on pose $A_d = \left\{ kd \mid k \in \left\{ 1, \dots, \frac{n}{d} \right\} \right\}$.

Soit l'univers $\Omega = \llbracket 1; n \rrbracket$ qu'on munit de la probabilité uniforme : pour $A \subset \Omega$, $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{n}$ où $|A| = \text{card}(A)$.

On pose $B = \{k \in \llbracket 1; n \rrbracket \mid \text{pgcd}(k, n) = 1\}$ et on note $\varphi(n) = |B|$ le cardinal de B .

a. Soit d et d' deux diviseurs de n premiers entre eux tels que $(d, d') \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$. Montrer que $A_d \cap A_{d'} = A_{dd'}$. En déduire que A_d et $A_{d'}$ sont indépendants.

b. Exprimer B en fonction de $A_{p_1}, \dots, A_{p_r}$.

c. En déduire une expression de $\varphi(n)$ en fonction de $p_1, \dots, p_r$.

d. Montrer que si deux entiers n et m de $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ sont premiers entre eux, on a $\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$.

Pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ et on définit $\mathbb{U} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathbb{U}_n$. Pour un élément z de $\mathbb{U}$,

on définit $m_z = \inf \{n \in \mathbb{N}^* \mid z^n = 1\}$. Pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n = \{z \in \mathbb{U} \mid m_z = n\}$.

e. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$. Montrer qu'il existe une suite $(z_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{U}^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{k \rightarrow +\infty} z_k = z$.

f. Montrer que P_n est un ensemble fini ; puis que $|P_n| = \varphi(n)$.

g. Montrer que $\mathbb{U} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} P_n$ et que $P_n \cap P_m = \emptyset$ si $n \neq m$.

127 *ENS Cachan PSI 2023* Lilian Dupouy

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires discrètes réelles admettant un moment d'ordre 2. On pose $E = \text{Vect}(X_1, \dots, X_n)$ et on définit $f : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(X, Y) = \mathbb{E}(XY)$.

On pose $G = \{X \in E \mid \mathbb{E}(X^2) = 0\}$ et on considère un sous-espace vectoriel F de E tel que $E = F \oplus G$.

- Montrer que f est bilinéaire, symétrique et positive. Est-elle définie positive ?
- La fonction $f|_F$ est-elle un produit scalaire sur F ?
- Rappeler l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ pour $(f, g) \in F^2$.
- Soit Z une variable aléatoire discrète réelle admettant un moment d'ordre 2 et telle que $\mathbb{E}(Z^2) > 0$. Montrer que $\mathbb{P}(Z > 0) \geq \frac{\mathbb{E}(Z)^2}{\mathbb{E}(Z^2)}$.

On note G un graphe non orienté, S l'ensemble de ses sommets (numérotés de 1 à n). Chaque sommet peut être relié aux autres, de manière indépendante, la probabilité d'une liaison est $p_n \in]0; 1[$.

Soit i et j deux sommets distincts de ce graphe, on note $X_{i,j} = 1$ si une arête existe entre les sommets i et j et $X_{i,j} = 0$ sinon : la variable aléatoire $X_{i,j}$ suit donc une loi de BERNOULLI de paramètre p_n .

On note $Z_n = \text{card}(\{i \in \llbracket 1; n \rrbracket \mid \forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket \setminus \{i\}, X_{i,j} = 0\})$ le nombre de sommets isolés (aucune arête ne part de ce sommet).

- On prend un sommet i , quelle est la loi régissant le nombre d'arêtes issues de ce sommet ?
- Montrer que $\mathbb{E}(Z) = n(1 - p)^{n-1}$.
- Comportement asymptotique de $\mathbb{E}(Z)$ quand n tend vers $+\infty$ en fonction de c .
- Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Z_n > 0) = 0$ si $\exists c > 1, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_0, p_n \geq c \frac{\ln(n)}{n}$ (on écrit $p_n \gg \frac{\ln(n)}{n}$).
- Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Z_n > 0) = 1$ si $\exists c < 1, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_0, p_n \leq c \frac{\ln(n)}{n}$ (on écrit $p_n \ll \frac{\ln(n)}{n}$).

128 *ENS Cachan PSI 2023* Tom Graciet

On admet le théorème de HEINE : "soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, alors f est uniformément continue, c'est-à-dire $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in [a; b]^2, |x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ ".

Dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geq 2}$ telles que :

- $\forall n \geq 2, X_n(\Omega) = \left\{0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}\right\}$.
- $\forall n \geq 2, \forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, \mathbb{P}\left(X_n = \frac{k}{n}\right) = \alpha_n(e^{k/n} - 1)$ avec $\alpha_n \in \mathbb{R}_+$.

- Calculer α_n en fonction de n . Donner un équivalent de α_n quand n tend vers $+\infty$.
- Calculer la fonction de répartition F_n de X_n sur $\mathbb{R}$.
- Montrer que $(F_n)_{n \geq 2}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction continue f à déterminer.
- Montrer que $(F_n)_{n \geq 2}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

Indication : utiliser la croissance de F_n et le théorème de HEINE.

129 *Centrale Maths1 PSI 2023* Juan Dupierriis

On étudie un dé équilibré qui comporte quatre faces : une marquée 0, deux marquées 1 et une marquée 2.

On lance $n \in \mathbb{N}^*$ fois ce dé et on note X_n (resp. Y_n) le nombre de 1 (resp. 0) obtenus.

- a. Donner les lois de X_n et Y_n . Quelles sont leurs espérances ?
- b. Donner la loi de $X_n + Y_n$.
- c. Donner la loi de (X_n, Y_n) .
- d. Donner la covariance de X_n et Y_n .

130 *Centrale Maths1 PSI 2023* Olivier Farje

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et une urne avec initialement N boules rouges. On tire successivement dans l'urne :

Si on tire une boule rouge, on la remplace par une verte.

Si on tire une boule verte, on la remet dans l'urne.

On note X_p le nombre de boules rouges dans l'urne à l'issue du p -ième tirage. On pose $X_0 = N$.

On note Y le rang où on enlève la dernière boule rouge ($Y = 0$ si ce rang n'existe pas).

a. Montrer que $\forall n \geq 0, \forall k \geq 0, \mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \frac{N-k}{N} \mathbb{P}(X_n = k) + \frac{k+1}{N} \mathbb{P}(X_n = k+1)$.

b. En déduire une relation entre $\mathbb{E}(X_{n+1})$ et $\mathbb{E}(X_n)$.

c. Donner $\mathbb{E}(X_n)$ en fonction de n et N et en déduire la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n \geq 1)$ et de $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}(X_N)}{N}$.

d. Montrer que $(Y = 0) \subset \bigcap_{k=1}^n (X_k \geq 1)$, puis en déduire la valeur de $\mathbb{P}(Y = 0)$.

131 *Centrale Maths1 PSI 2023* Gabriel Hofman

On pose $F = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & x \end{pmatrix} \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

- a. Quelles sont les matrices de F qui sont diagonalisables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?
- b. Quelles sont les matrices de F dont l'endomorphisme canoniquement associé est un projecteur orthogonal ?

Soit X, Y, Z des variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi uniforme sur $[[1; 6]]$.

c. Quelle est la probabilité que $M = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & X \end{pmatrix}$ soit inversible ?

132 *Centrale Maths1 PSI 2023* Antoine Vallade

Soit $\lambda > 0$ et X une variable aléatoire sur un espace probabilisé suivant la loi de POISSON de paramètre λ . Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes sur le même espace probabilisé et suivant toutes la loi de X . On pose $N = \inf\{n \in \mathbb{N}^* \mid X_n > X_0\}$.

- a. Montrer à l'aide de la formule de TAYLOR reste intégral que $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X > k) \leq \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}$.
- b. La variable aléatoire N admet-elle une espérance finie ?

133 *Mines PSI 2023* Paul-Antoine Baury-Carpentier I

Pour tout réel x , on note $\lceil x \rceil$ le plus petit entier relatif k tel que $x \leq k$.

Soit X une variable aléatoire discrète réelle positive admettant une espérance finie et on pose $Y = \lceil X \rceil$.

a. Montrer que $0 \leq \mathbb{E}(X) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k)$.

b. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de variables aléatoires discrètes réelles positives telle que X_0 admet une espérance finie et telle que $\forall \omega \in \Omega, \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n(\omega) = 0$. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n > k) = 0$.

c. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X_n) = 0$.

134 *Mines PSI 2023* Arthur Biot I

On répète une expérience de BERNOULLI indépendante de même paramètre $p \in]0; 1[$. On note X_n le nombre d'expériences nécessaires pour obtenir le n -ième succès.

a. X_1 est-elle une variable aléatoire discrète ?

b. Donner la loi, l'espérance et la variance de X_1 .

c. Déterminer la loi de X_n pour $n \geq 2$. Calculer $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{V}(X_n)$.

d. Soit $Y_1, \dots, Y_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la même loi que X_1 et $S_n = Y_1 + \dots + Y_n$. Calculer $\mathbb{E}(S_n)$ et $\mathbb{V}(S_n)$. Expliquer.

135 *Mines PSI 2023* Lilian Dupouy II

Soit un entier $n \in \mathbb{N}^*$. On s'intéresse à une urne contenant n boules non discernables numérotées de 1 à n . On effectue des tirages et, à chaque tirage, on supprime de l'urne les boules dont le numéro est supérieur ou égal à celui de la boule tirée. On note X_n le nombre de tirages nécessaires pour vider entièrement l'urne.

a. Calculer $\mathbb{E}(X_1)$ et $\mathbb{E}(X_2)$.

b. Montrer que $\forall n \geq 2, \mathbb{E}(X_n) = 1 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}(X_k)$.

c. Trouver un équivalent de $\mathbb{E}(X_n)$ quand n tend vers $+\infty$.

Question supplémentaire : montrer que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln(n)$.

136 *CCINP PSI 2023* Marius Desvalois I

Soit $\alpha \in]0; 1[, \lambda > 0$ et X, Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que, pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, on ait $\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^i \alpha^j (1 - \alpha)^{i-j}}{j!(i-j)!}$ si $0 \leq j \leq i$ et $\mathbb{P}(X = i, Y = j) = 0$ sinon. On pose $Z = X - Y$.

a. Déterminer la loi de X .

b. Déterminer la loi de Y .

c. X et Y sont-elles indépendantes ?

d. Déterminer la loi de Z .

e. Pour $(j, k) \in \mathbb{N}^2$, calculer $\mathbb{P}_{(Z=k)}(Y = j)$.

f. Conclure.

137 *CCINP PSI 2023* Juan Dupierris I et Gabriel Hofman I

Une entreprise commercialise deux produits A et B. Le service après-vente reçoit des appels concernant ces deux produits, 20% pour le produit A et 80% pour le produit B. On note X_A (resp. X_B) la variable aléatoire qui compte le nombre d'appels avant d'en avoir un qui concerne le produit A (resp. B).

On note L la variable aléatoire qui compte la longueur de la première chaîne d'appels sur un même produit. Par exemple, si on reçoit les appels AAABBAB..., alors $X_A = 1$, $X_B = 4$, $L = 3$.

a. Déterminer la loi de X_A . Montrer que X_A admet une espérance et une variance finies et les calculer. Faire de même pour X_B .

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, décomposer $(L = n)$ en distinguant selon le $(n + 1)$ -ième appel.

En déduire que $\mathbb{P}(L = n) = 0,8 \mathbb{P}(X_A = n) + 0,2 \mathbb{P}(X_B = n)$.

c. En déduire que L admet une espérance finie et la calculer.

138 *CCINP PSI 2023* Jonathan Filocco I

Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de boules (numéros de 1 à X) dans une urne, telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ avec $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = i) = \frac{i}{2^{i+1}}$. On procède à un tirage et on note Y le numéro de la boule tirée.

a. Montrer que la définition de la loi de X est cohérente.

b. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

c. Déterminer la loi conjointe de X et Y .

d. Calculer la loi de Y et son espérance.

139 *CCINP PSI 2023* Sacha Meslier I

On joue à pile ou face, avec une probabilité $p \in]0; 1[$ de faire pile et $1 - p$ de faire face. On effectue $n \geq 2$ lancers. On note N le nombre de séries obtenues. Par exemple $N = 3$ si, pour $n = 10$, on a les tirages PPPPPFFPP et $N = 5$ si, pour $n = 10$, on tire FPPFFPPFF.

Pour tout entier $k \in \llbracket 1; n - 1 \rrbracket$, on définit I_k telle que $I_k = 0$ si les lancers k et $k + 1$ donnent des résultats identiques et $I_k = 1$ sinon.

a. Déterminer $N(\Omega)$.

b. Calculer $\mathbb{P}(N = 1)$ et $\mathbb{P}(N = 2)$.

c. Pour $k \in \llbracket 1; n - 1 \rrbracket$, donner la loi de I_k .

d. Écrire N en fonction des I_k .

e. Déterminer l'espérance et la variance de N .

140 *CCINP PSI 2023* Antoine Vallade I

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\forall i \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = i) = \frac{\alpha i}{2^i}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

a. Calculer α .

b. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

c. Calculer $\mathbb{V}(X)$.

ORAUX 2024 THÈME 9

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ET CALCUL DIFFÉRENTIEL

141 *X PSI 2023* Paul Picard II

On s'intéresse à l'équation (E) : $f(x) = f'(1/x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

- a. Trouver $(a, b, \alpha, \beta) \in \mathbb{C}^4$ tel que $f : x \mapsto ax^\alpha + bx^\beta$ soit solution réelle non nulle de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.
- b. Que dire de l'ensemble S des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$?
- c. Caractériser entièrement S.

142 *ENS Cachan PSI 2023* Rémi Darrieumerle

Soit $E = C^0([0; 1], \mathbb{R})$. On considère l'application T telle que $\forall f \in E, \forall x \in \mathbb{R}, T(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$.

Pour $f \in E$, on note $\|f\| = \sup_{x \in [0; 1]} |f(x)|$.

Pour $f \in E, n \in \mathbb{N}^*$ et $(x, y) \in [0; 1]^2$, on note $F_n(x, y) = \int_0^y \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)dt$.

- a. Montrer que F_n est de classe C^1 sur $[0; 1]^2$.
- b. Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto F_n(x, x)$.
- c. Majorer $\|T^n(f)\|$ en fonction de $\|f\|$.
- d. Pour $f \in E$, on définit $h = f - T(f)$. Exprimer la fonction f comme somme d'une série de fonctions qui converge normalement.
- e. Pour $g \in E$, montrer que l'équation $(E_g) : g = f - T(f)$ possède une unique solution dans E.

143 *ENS Cachan PSI 2023* Marius Desvalois et Elae Terrien

Soit $c \in \mathbb{R}_+^*, u_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , on considère l'équation (E) : $\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = f(x, t)$ et son équation homogène associée $(E_0) : \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$. On dit que u vérifie les conditions (*) si u est solution de (E) avec la condition initiale $u(x, 0) = u_0(x)$.

- a. Montrer que l'unique solution de (E_0) vérifiant $u(x, 0) = u_0(x)$ est $u : (x, t) \mapsto u_0(x - ct)$.
- b. Montrer que $u : (x, t) \mapsto u_0(x_0) + \int_0^t f(x_0 + c\theta, \theta)d\theta$ vérifie (*) si $x = x_0 + ct$.
- c. En déduire que l'unique fonction u vérifiant (*) est $u : (x, t) \mapsto u_0(x - ct) + \int_0^t f(x - c(t - \theta), \theta)d\theta$.
- d. Montrer que si $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^2 , on a $\left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial u}{\partial t} - c \frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.
- e. En déduire que toute solution de classe C^2 de $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ est, avec des fonctions u_1 et u_2 de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, de la forme $u : (x, t) \mapsto u_1(x - ct) + u_2(x + ct)$.

On dit que $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 vérifie (1) si $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $u(x, 0) = g(x)$ et $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = h(x)$ où g est de classe C^1 et h de classe C^0 . Soit u vérifiant (1). On pose $v = \frac{\partial u}{\partial t} - c \frac{\partial u}{\partial x}$.

- f. Montrer que v est solution de (*) où on donnera la fonction f et la condition initiale u_0 .
- g. Exprimer alors $v(x, t)$ en fonction des données du problème (1).
- h. Montrer que $u(x, t) = g(x + ct) + g(x - ct) + \int_{x-ct}^{x+ct} h(u)du$.

144 ENS Cachan PSI 2023 Juan Dupieris II

Montrer, pour $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , que f convexe $\iff \forall (u, v) \in (\mathbb{R}^n)^2, f(v) \geq f(u) + (\nabla f(u))^T (v - u)$.

145 ENS Cachan PSI 2023 Antoine Jeanselme

Pour $k \in \mathbb{N}$ et $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose, $G_k(x_1, x_2) = \int_0^1 t^k e^{x_1 t + x_2 t^2} dt$ et $H_k(x_1, x_2) = \frac{G_k(x_1, x_2)}{G_0(x_1, x_2)}$ en cas de convergence. On définit aussi, pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $F(x_1, x_2) = \ln(G_0(x_1, x_2)) - H_1(a, b)x_1 - H_2(a, b)x_2$.

a. Montrer que G_k et H_k admettent des dérivées partielles et que $\frac{\partial H_k}{\partial x_i} = H_{k+i} - H_k H_i$ pour $i \in \{1, 2\}$.

b. Montrer que (a, b) est un point critique de F .

On admet que F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

c. Montrer que $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(x_1, x_2) = \frac{1}{G_0(x_1, x_2)} \int_0^1 (s^i - H_j(x_1, x_2))(s^i - H_i(x_1, x_2)) e^{x_1 s + x_2 s^2} ds$ si $i \neq j$.

Pour $(u_1, u_2) \neq (0, 0) \in \mathbb{R}^2$, soit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(t) = F(a + u_1 t, b + u_2 t)$.

d. Montrer que $h'(0) = 0$ et $\forall t \in \mathbb{R}, h''(t) > 0$.

e. En déduire que F admet en (a, b) un minimum local.

f. F admet-elle d'autres extremums ?

146 Centrale Maths1 PSI 2023 Paul-Antoine Baury-Carpentier

On considère le système (E) : $y' = 2xy + 1$ et $y(0) = 0$.

a. Justifier qu'il existe une unique solution f de (E) définie sur $\mathbb{R}$ et que f est impaire.

b. Trouver le développement en série entière de f sur $\mathbb{R}$.

c. Donner une expression de f sous forme intégrale.

d. En déduire un autre développement en série entière de f .

147 Centrale Maths1 PSI 2023 Rémi Darrieumerle

Soit I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une solution sur I de l'équation (E) : $y' = y^2 + y + 1$.

a. Montrer la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{u^2 + u + 1}$ et déterminer sa valeur.

b. Montrer que I est borné.

c. Trouver une expression de f à l'aide de fonctions usuelles.

148 Centrale Maths1 PSI 2023 Alban Dujardin II

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que f admette un minimum local en (x_0, y_0) .

Déterminer le signe du laplacien $\Delta f(x_0, y_0)$.

149 Centrale Maths1 PSI 2023 Tom Graciet et Chloé Vagner

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \exp \left(- \sum_{k=1}^n x_k^2 \right)$.

a. Trouver les points critiques de f_n .

b. On note a_n le point critique dont les coordonnées sont toutes strictement positives. Montrer que f_n admet un extremum local en a_n .

c. Que se passe-t-il en les autres points critiques ?

150 Centrale Maths1 PSI 2023 Paul Picard

- a. Tracer dans le plan la courbe Γ d'équation $y^2 = 4x$.
- b. Déterminer une équation de la tangente T_t en un point $M_t = (t^2, 2t)$ de Γ .
- c. Déterminer les coordonnées du point N_t qui est l'intersection de T_t et de la droite D passant par le point $A = (-3, 2)$ et parallèle à (Ox) .
- d. Quel lieu parcourt le point N_t quand t varie ?

151 Mines PSI 2023 Bader Ben Amira II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 et $F : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(x) = f(|x|)$.

On suppose que $\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial x_k^2} = 0$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Déterminer f .

152 Mines PSI 2023 Arthur Biot II

Déterminer toutes les fonctions f , continues sur $\mathbb{R}$, qui vérifient $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + \int_0^x (x-t)f(t)dt = 1$.

153 Mines PSI 2023 Rebecca Blé II

Soit $\Omega = (\mathbb{R}_+^*)^2$, $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{a}{xy}$.

- a. Montrer que f est de classe C^1 sur Ω .
- b. Calculer le gradient de f en tout point de Ω .
- c. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en $(0, 0)$?
- d. Étudier les extrema de f .

154 Mines PSI 2023 Hugo Delval II

Soit (E) : $x^2 y'' - 2x(x^2 + 1)y' + (x^2 - 1)y = 0$.

- a. Trouver les solutions de (E) développables en série entière.
- b. Parmi les solutions de la question précédente, reconnaître une fonction usuelle.
- c. Quelles sont les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$?

155 Mines PSI 2023 Antoine Jeanselme I

Soit l'équation (E) : $x^2 y'' - 2y = 3x^2$.

- a. Trouver les solutions polynomiales de l'équation homogène (E_0) associée à (E).
- b. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.
- c. Déterminer les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

156 CCINP PSI 2023 Maddie Bisch II

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

- a. Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.
- b. Calculer les dérivées partielles premières de f sur $\mathbb{R}^2$.
- c. La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
- d. Calculer les dérivées partielles seconde de f en $(0, 0)$. Qu'en déduire sur la fonction f ?