♠ ♡

PRÉPARATION ORAUX

PSI 1

MILLÉSIME

2023 / 2024

♢ ♣

ORAUX 2024 THÈME 1
INTÉGRALE ET ANALYSE

1 D'après l'énoncé, on pose $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $g(y) = f(\sqrt{y})$ pour $y \geqslant 0$. Comme $t \mapsto \sqrt{t}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et que f est de classe C^4 sur $\mathbb{R}_+^*$, par composition, g est de classe C^4 sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par la formule de TAYLOR-YOUNG, comme f est de classe C^4 et paire donc que $f'(0) = 0$ et $f'''(0) = 0$, on a $f(x) \underset{0}{=} f(0) + \dfrac{f''(0)}{2}x^2 + \dfrac{f^{(4)}(0)}{24}x^4 + o(x^4)$. En composant par $\sqrt{y}$, on obtient le développement limité d'ordre 2 en 0 pour g, à savoir $g(y) = f(\sqrt{y}) \underset{0}{=} f(0) + \dfrac{f''(0)}{2}y + \dfrac{f^{(4)}(0)}{24}y^2 + o(y^2)$.

<u>Aspect C^1</u> : comme g admet un développement limité d'ordre 1 en 0, g est dérivable en 0 et $g'(0) = \dfrac{f''(0)}{2}$.

Pour $y > 0$, on a $g'(y) = \dfrac{f'(\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}$. Or, f' étant de classe C^3 avec $f'(0) = 0$ car f est paire, on a le développement limité à l'ordre 1 suivant de f' en 0, à savoir $f'(x) \underset{0}{=} f''(0)x + o(x)$. En posant $x = \sqrt{y}$, on obtient $f'(\sqrt{y}) \underset{0}{=} f''(0)\sqrt{y} + o(\sqrt{y})$ qui justifie que $g'(y) \underset{0}{=} \dfrac{f''(0)}{2} + o(1)$ donc que $\lim\limits_{y \to 0^+} g'(y) = g'(0)$ et g' est continue en 0. Avec ce qui précède, on a bien établi l'aspect C^1 de g sur $\mathbb{R}_+$.

<u>Aspect C^2</u> : pour $y > 0$, comme $g'(y) = \dfrac{f'(\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}$, on a $\dfrac{g'(y) - g'(0)}{y - 0} = \dfrac{f'(\sqrt{y}) - f''(0)\sqrt{y}}{2y\sqrt{y}}$. Comme f' est de classe C^3 et paire sur $\mathbb{R}$, elle admet un développement limité en 0 à l'ordre 3 par TAYLOR-YOUNG qui s'écrit, comme $f'(0) = f'''(0) = 0$, $f'(x) \underset{0}{=} f''(0)x + \dfrac{f^{(4)}(0)}{6}x^3 + o(x^3)$ donc, en composant par $\sqrt{y}$, on obtient $f'(\sqrt{y}) \underset{0}{=} f''(0)\sqrt{y} + \dfrac{f^{(4)}(0)}{6}y\sqrt{y} + o(y\sqrt{y})$. Ceci montre que $\dfrac{g'(y) - g'(0)}{y - 0} \underset{0}{=} \dfrac{f^{(4)}(0)}{12} + o(1)$ donc que g est deux fois dérivable en 0 avec $g''(0) = \lim\limits_{y \to 0^+} \dfrac{g'(y) - g'(0)}{y - 0} = \dfrac{f^{(4)}(0)}{12}$. Montrons que g'' est continue en 0.

Après calculs, on a $\forall y > 0,\ g''(y) = \dfrac{\sqrt{y}\, f''(\sqrt{y}) - f'(\sqrt{y})}{4y\sqrt{y}}$. Or $f'(\sqrt{y}) \underset{0}{=} f''(0)\sqrt{y} + \dfrac{f^{(4)}(0)}{6}y\sqrt{y} + o(y\sqrt{y})$ et, comme f'' est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, on a par TAYLOR-YOUNG $f''(x) \underset{0}{=} f''(0) + \dfrac{f^{(4)}(0)}{2}x^2 + o(x^2)$ donc, en composant par $\sqrt{y}$, cela donne $f''(\sqrt{y}) \underset{0}{=} f''(0) + \dfrac{f^{(4)}(0)}{2}y + o(y)$. En reportant dans l'expression de $g''(y)$,
$g''(y) = \dfrac{1}{4y\sqrt{y}}\left[\sqrt{y}\left(f''(0) + \dfrac{f^{(4)}(0)}{2}y + o(y)\right) - \left(f''(0)\sqrt{y} + \dfrac{f^{(4)}(0)}{6}y\sqrt{y} + o(y\sqrt{y})\right)\right] \underset{0}{=} \dfrac{f^{(4)}(0)}{12} + o(1)$. Ceci montre que $\lim\limits_{y \to 0^+} g''(y) = g''(0) = \dfrac{f^{(4)}(0)}{12}$ donc que g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$ avec ce qui précède. Par le théorème de prolongement C^1 (ici de g' en 0), le calcul préalable de $g''(0)$ n'était pas nécessaire.

2 **a.** Par convention, si $t > 0$, on prendra $0^t = \lim\limits_{x \to 0^+} x^t = \lim\limits_{x \to 0^+} e^{t\ln(x)} = 0$.

<u>Méthode 1</u> : comme $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est de classe C^2 et concave car $\forall x > 0,\ \ln''(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$, on sait que $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \forall \lambda \in [0; 1],\ \ln(\lambda a + (1 - \lambda)b) \geqslant \lambda \ln(a) + (1 - \lambda)\ln(b)$. Comme $\exp$ est croissante, on en déduit que $\exp(\ln(\lambda a + (1 - \lambda)b)) = \lambda a + (1 - \lambda)b \geqslant a^\lambda b^{1-\lambda} = \exp(\lambda \ln(a) + (1 - \lambda)\ln(b))$.

Avec $t \in]0; 1[$, $(u, v) \in (\mathbb{R}_+)^2$, considérons des cas :

- si $u > 0$ et $v > 0$, on prend $\lambda = t$, $a = u$ et $b = v$ ci-dessus et on a bien $u^t v^{1-t} \leqslant tu + (1-t)v$.
- si $u = 0$ et $v > 0$, on a $u^t v^{1-t} = 0$ et $tu + (1-t)v = (1-t)v > 0$ donc on a bien $u^t v^{1-t} \leqslant tu + (1-t)v$.
- si $u > 0$ et $v = 0$, on a $u^t v^{1-t} = 0$ et $tu + (1-t)v = tu > 0$ donc on a bien $u^t v^{1-t} \leqslant tu + (1-t)v$.
- si $u = 0$ et $v = 0$, on a $u^t v^{1-t} = 0$ et $tu + (1-t)v = 0$ donc on a bien $u^t v^{1-t} \leqslant tu + (1-t)v$.

Méthode 2 : soit $t \in]0;1[$, soit $g_t : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $g_t(u) = u^t - tu - (1-t)$. La fonction g_t est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et continue sur $\mathbb{R}_+$ avec $g_t(0) = t - 1 < 0$ et on a $\forall u > 0,\ g_t'(u) = tu^{t-1} - t = t\left(\frac{1}{u^{1-t}} - 1\right)$ donc g_t est croissante sur $[0;1]$ et décroissante sur $[1;+\infty[$. Comme $g(1) = 0$, la fonction g_t est négative sur $\mathbb{R}_+$ donc $\forall u \in \mathbb{R}_+,\ \forall t \in]0;1[,\ u^t \leqslant tu + (1-t)$ (1). Traitons deux cas :

- si $v = 0$, $u^t v^{1-t} = 0$ et $tu + (1-t)v = tu \geqslant 0$ donc on a bien $u^t v^{1-t} \leqslant tu + (1-t)v$.
- si $v > 0$, en remplaçant u par $\frac{u}{v}$ dans (1), on a $\left(\frac{u}{v}\right)^t \leqslant t\frac{u}{v} + (1-t)$ puis, en multipliant par $v > 0$, on a $\frac{u^t v}{v^t} = u^t v^{1-t} \leqslant tu + (1-t)v$ comme attendu.

b. Pour $A \in \mathbb{R}_+$ et des fonctions $g, h : [0;A] \to \mathbb{R}$ continues, comme $|g|^p$ et $|h|^q$ sont continues sur un segment, les réels $I = \left(\int_0^A |g|^p\right)^{1/p} \in \mathbb{R}_+$ et $J = \left(\int_0^A |h|^q\right)^{1/q} \in \mathbb{R}_+$ existent. Si $A = 0$, l'inégalité à établir est claire car elle se ramène à $0 \leqslant 0$. Si $A > 0$, traitons des cas :

- si $I = J = 0$, comme les fonctions $|g|^p$ et $|h|^q$ sont continues, positives, on en déduit que $g = h = 0$ sur $[0;A]$, ainsi, on a bien l'inégalité $\int_0^A |gh| dt = 0 \leqslant 0 = \left(\int_0^A |g|^p\right)^{1/p} \times \left(\int_0^A |h|^q\right)^{1/q}$.
- si $I = 0$ et $J > 0$, comme avant, $h = 0$ donc $\int_0^A |gh| = 0 \leqslant 0 = \left(\int_0^A |g|^p\right)^{1/p} \times \left(\int_0^A |h|^q\right)^{1/q}$.
- si $I > 0$ et $J = 0$, comme avant, $g = 0$ donc $\int_0^A |gh| = 0 \leqslant 0 = \left(\int_0^A |g|^p\right)^{1/p} \times \left(\int_0^A |h|^q\right)^{1/q}$.
- si $I > 0$ et $J > 0$, posons $t = \frac{1}{p} \in]0;1[$, $u = \frac{|g(x)|^p}{I^p} \in \mathbb{R}_+$ et $v = \frac{|h(x)|^q}{J^q} \in \mathbb{R}_+$ pour $x \in [0;A]$, on a $1 - t = \frac{1}{q}$ donc $u^t v^{1-t} = \frac{|g(x)|\,|h(x)|}{IJ} = \frac{|g(x)h(x)|}{IJ}$ donc, $\frac{|g(x)h(x)|}{IJ} \leqslant \frac{1}{p}\frac{|g(x)|^p}{I^p} + \frac{1}{q}\frac{|h(x)|^p}{J^p}$. On a donc $\frac{1}{IJ}\int_0^A |g(x)h(x)| dx \leqslant t\frac{\left(\int_0^A |g(x)|^p dx\right)^{1/p}}{\left(\int_0^A |g(x)|^p dx\right)^{1/p}} + (1-t)\frac{\left(\int_0^A |h(x)|^q dx\right)^{1/q}}{\left(\int_0^A |h(x)|^q dx\right)^{1/q}} = t + 1 - t = 1$ par croissance de l'intégrale. Par conséquent, $\int_0^A |g(t)h(t)| dt \leqslant IJ = \left(\int_0^A |g(t)|^p dt\right)^{1/p} \times \left(\int_0^A |h(t)|^q dt\right)^{1/q}$.

Dans tous les cas, on a l'inégalité $\int_0^A |g(t)h(t)| dt \leqslant \left(\int_0^A |g(t)|^p dt\right)^{1/p} \times \left(\int_0^A |h(t)|^q dt\right)^{1/q}$.

c. Si $p > 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $a_n : t \mapsto t^n f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et, si $A \geqslant 0$, d'après **b.**, on a $\int_0^A |t^n f(t)| dt = \int_0^A |(f(t)e^{t/p})(t^n e^{-t/p})| dt \leqslant \left(\int_0^A |f(t)|^p e^t dt\right)^{1/p} \times \left(\int_0^A t^{nq} e^{-tq/p} dt\right)^{1/q}$. Comme f est strictement positive par hypothèse, $\int_0^A |f(t)|^p e^t dt \leqslant M = \int_0^{+\infty} |f(t)|^p e^t dt = \int_0^{+\infty} (f(t))^p e^t dt > 0$. De plus, on se rappelle de la fonction Γ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ qu'on note $\Gamma(x) = (x-1)!$ même pour un réel $x > 0$ (justifié car $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Gamma(n) = (n-1)!$), ce qui permet d'écrire, avec le changement de variable $t = \frac{pu}{q} = \varphi(u)$ avec φ qui est une bijection C^1 strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, la relation $\int_0^{+\infty} t^{nq} e^{-tq/p} dt = \int_0^{+\infty} \frac{(pu)^{nq}}{q^{nq}} e^{-u} \frac{p}{q} du = \left(\frac{p}{q}\right)^{nq+1} \int_0^{+\infty} u^{nq} e^{-u} du = \left(\frac{p}{q}\right)^{nq+1} (nq)!$. Pour $A \in \mathbb{R}_+$,

$\displaystyle\int_0^A t^n f(t)dt \leqslant M^{1/p}\left(\frac{p}{q}\right)^{n+(1/q)}\big((nq)!\big)^{1/q} = K\left(\frac{p}{q}\right)^n ((nq)!)^{1/q}$ (2) en posant $K = M^{1/p}\left(\frac{p}{q}\right)^{1/q} \in \mathbb{R}_+$. Ceci justifie que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n f(t)dt$ converge car la fonction a_n est positive. De plus, en passant à la limite dans (2) quand A tend vers +, on a $u_n \leqslant K\left(\frac{p}{q}\right)^n ((nq)!)^{1/q}$.

Pour $n \geqslant 1$, on a donc $|u_n|^{-1/n} \geqslant K^{-1/n} \times \frac{q}{p} \times ((nq)!)^{-1/(nq)}$. On sait que Γ est convexe et croissante sur un intervalle du type $[\alpha;+\infty[$ (en fait $\alpha \sim 1,46$) donc dès que n est assez grand et que $nq+1 \geqslant \alpha$, on a $(nq)! \leqslant (\lfloor nq \rfloor + 1)!$ donc $((nq)!)^{-1/(nq)} \geqslant ((\lfloor nq \rfloor + 1)!)^{-1/(nq)} \geqslant ((\lfloor nq \rfloor + 1)!)^{-1/(\lfloor nq \rfloor)}$. Alors, pour n assez grand $|u_n|^{-1/n} \geqslant v_n = K^{-1/n} \times \frac{q}{p} \times ((\lfloor nq \rfloor + 1)!)^{-1/(\lfloor nq \rfloor)}$.

Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites strictement positives telles que $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = +\infty$, on a $a_n^{1/c_n} \underset{+\infty}{\sim} b_n^{1/c_n}$ en écrivant $\dfrac{a_n^{1/c_n}}{b_n^{1/c_n}} = \exp\left(\dfrac{1}{c_n}\ln\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)\right)$.

D'après STIRLING, en notant $t_n = \lfloor nq \rfloor$ et puisque $\lfloor nq \rfloor \underset{+\infty}{\sim} nq$, $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} (t_n+1)^{-1/t_n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{2\pi t_n}\right)^{\frac{-1}{t_n}} = 1$, on a $v_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{q}{p} \times \left(\sqrt{2\pi t_n}\left(\dfrac{t_n}{e}\right)^{t_n}\right)^{\frac{-1}{t_n}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{q}{p} \times \dfrac{e}{t_n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e}{np}$ donc, par comparaison aux séries de RIEMANN, $\sum\limits_{n\geqslant 0} |u_n|^{-1/n}$ diverge.

d. Si $p = 1$, pour $n \in \mathbb{N}$, en écrivant $t^n f(t) = (f(t)e^t)(t^n e^{-t})$, comme $\lim\limits_{t\to+\infty} t^n e^{-t} = 0$ par croissances comparées, on a $t^n f(t) \underset{+\infty}{=} o(f(t)e^t)$ donc, par comparaison, la fonction $a_n : t \mapsto t^n f(t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc u_n existe. Pour $n \geqslant 1$, la fonction $b_n : t \mapsto t^n e^{-t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $b_n'(t) = nt^{n-1}e^{-t} - t^n e^{-t} = t^{n-1}e^{-t}(n-t)$ donc b_n est positive, croissante sur $[0;n]$ et décroissante sur $[n;+\infty[$ donc maximale en n où elle vaut $b_n(n) = n^n e^{-n}$. Ainsi, pour $n \geqslant 1$, on a la majoration $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n f(t)dt = \int_0^{+\infty} f(t)e^t b_n(t)dt \leqslant b_n(n)\int_0^{+\infty} f(t)e^t dt = Mn^n e^{-n}$ si $M = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^t dt > 0$.

Par conséquent, $u_n^{-1/n} \geqslant \dfrac{M^{-1/n}e}{n} = v_n$ et, comme $v_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e}{n}$ et que la série harmonique $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n}$ diverge, par comparaison, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} |u_n|^{-1/n}$ diverge.

3 **a.** Les fonctions $f_a : t \mapsto \exp\left(-t^2-\dfrac{a^2}{t^2}\right)$ et $g_a : t \mapsto \dfrac{a}{t^2}\exp\left(-t^2-\dfrac{a^2}{t^2}\right)$ sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$ et prolongeables par continuité en 0 en posant $f_a(0) = g_a(0) = 0$ car $\exp\left(-t^2-\dfrac{a^2}{t^2}\right) \underset{0}{\sim} \exp\left(-\dfrac{a^2}{t^2}\right)$ et $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{a^2}{t^2} = +\infty$ et que $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = \lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x} = 0$. De plus, $\exp\left(-t^2-\dfrac{a^2}{t^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} e^{-t^2}$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 e^{-t^2} = \lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t^2} = 0$ donc $f_a(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et $g_a(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. Ceci assure, par comparaison aux intégrales de RIEMANN, que f_a et g_a sont intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$ donc que $I(a)$ et $J(a)$ existent pour tout $a > 0$.

b. Dans $I(a)$, on pose $t = \dfrac{a}{u} = \varphi(u)$ avec φ de classe C^1 et bijective strictement décroissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$. Par changement de variable, $I(a) = \displaystyle\int_{+\infty}^0 \exp\left(-\frac{a^2}{u^2}-u^2\right)\left(-\frac{a}{u^2}\right)du = \int_0^{+\infty}\frac{a}{u^2}\exp\left(-u^2-\frac{a^2}{u^2}\right)du = J(a)$.

c. D'après **b.**, $I(a) = \dfrac{I(a)+J(a)}{2} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\exp\left(-t^2-\frac{a^2}{t^2}\right)+\frac{a}{t^2}\exp\left(-t^2-\frac{a^2}{t^2}\right)\right)dt$ par linéarité de l'intégrale donc $I(a) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{a}{t^2}\right)\exp\left(-t^2-\frac{a^2}{t^2}\right)dt$. Or $-t^2-\dfrac{a^2}{t^2} = \left(t-\dfrac{a}{t}\right)^2 - 2a$ d'où $\exp\left(-t^2-\dfrac{a^2}{t^2}\right) = e^{-2a}\exp\left(-\left(t-\dfrac{a}{t}\right)^2\right)$ (mise sous forme canonique). Toujours par linéarité de l'intégrale, on obtient bien la relation $I(a) = \dfrac{e^{-2a}}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty}\Big(1+\frac{a}{t^2}\Big)\exp\Big(-\Big(t-\frac{a}{t}\Big)^2\Big)dt$.

d. Dans l'intégrale de la question précédente, on pose $x = t - \dfrac{a}{t} = \varphi(t)$ avec φ qui est une bijection strictement croissante (car $\varphi'(t) = 1 + \frac{a}{t^2} > 0$) de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ car $\lim\limits_{t\to-\infty}\varphi(t) = -\infty$ car $a > 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty}\varphi(t) = +\infty$. Ainsi, $I(a) = \dfrac{e^{-2a}}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\varphi(t)^2}\varphi'(t)dt = \dfrac{e^{-2a}}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ par parité de la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$. Par conséquent, $I(a) = e^{-2a}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2a}$ avec le rappel de l'énoncé concernant l'intégrale de Gauss.

4 **a.** Pour $x \in]-1;+\infty[$, soit $f_x :]0;1[\to \mathbb{R}$ définie par $f_x(t) = \dfrac{t^x\ln(t)}{t-1}$. La fonction f_x est continue sur $]0;1[$ par opérations. Comme $\ln(t) \underset{1}{\sim} t-1$ en posant $u = t-1$ dans $\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$, on a $f_x(t) \underset{1}{\sim} t^x \underset{1}{\sim} 1$ donc f_x se prolonge par continuité en 1 en posant $f_x(1) = 1$. De plus, $f_x(t) \underset{0}{\sim} t^x\ln(t) \underset{0}{=} o\Big(\dfrac{1}{t^{\frac{1-x}{2}}}\Big)$ par croissances comparées car $\dfrac{1+x}{2} < 0$ donc, comme $\dfrac{1-x}{2} < 1$, par comparaison aux intégrales de Riemann, f_x est intégrable sur $]0;1[$ ce qui montre la convergence de $\displaystyle\int_0^1 f_x(t)dt$.

b. Soit $-1 < x < y$, $\forall t \in]0;1[$, $t^x = e^{x\ln(t)} \geqslant e^{y\ln(t)} = t^y \geqslant 0$ car $\ln(t) < 0$ donc, $t^x\ln(t) \leqslant t^y\ln(t) \leqslant 0$ et, puisque $t-1 < 0$, $f_x(t) \geqslant f_y(t) \geqslant 0$. Par croissance de l'intégrale, $H(x) = \displaystyle\int_0^1 f_x(t)dt \geqslant \int_0^1 f_x(t)dt = H(y) \geqslant 0$ ce qui montre que H est positive et décroissante sur $]-1;+\infty[$.

c. La fonction $a : t \mapsto \dfrac{t\ln(t)}{t-1}$ est continue sur $]0;1[$, se prolonge par continuité en 1 en posant $a(1) = 1$ car $\ln(t) \underset{1}{\sim} t-1$ comme ci-dessus et, par croissances comparées, elle se prolonge aussi par continuité en 0 en posant $a(0) = 0$. La fonction positive a ainsi prolongée est continue sur le segment $[0;1]$ donc elle y est bornée par le théorème des bornes atteintes et il existe $M \geqslant 0$ tel que $\forall t \in]0;1[$, $0 \leqslant a(t) \leqslant M$. Alors, pour $x > 0$, on a $0 \leqslant H(x) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}a(t)dt \leqslant M\int_0^1 t^{x-1}dt = M\Big[\frac{t^x}{x}\Big]_0^1 = \frac{M}{x}$ car $\lim\limits_{t\to0} t^x = 0$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{M}{x} = 0$, par encadrement, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} H(x) = 0$.

On pouvait aussi utiliser le théorème de convergence dominée à paramètre continu.

d. Pour $x > -1$, avec l'indication, $H(x) - H(x+1) = \displaystyle\int_0^1 \frac{(t^x - t^{x+1})\ln(t)dt}{t-1} = -\int_0^1 t^x\ln(t)dt$ et, en posant $u : t \mapsto \ln(t)$ et $v : t \mapsto \dfrac{t^{x+1}}{x+1}$ qui sont C^1 sur $]0;1[$ et qui vérifient $\lim\limits_{t\to0^+} u(t)v(t) = \lim\limits_{t\to1^-} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées, on a $-\displaystyle\int_0^1 t^x\ln(t)dt = \int_0^1 \frac{t^x}{x+1}dt = \Big[\frac{t^{x+1}}{(x+1)^2}\Big]_0^1 = \frac{1}{(x+1)^2}$ (1) par intégration par parties. Comme H est décroissante sur $]-1;+\infty[$, on a $\forall x \in]-1;0[$, $H(0) \leqslant H(x+1) \leqslant H(1)$ donc $H(x+1) \underset{-1^+}{=} O(1)$ et (1) montre que $H(x) \underset{-1^+}{\sim} \dfrac{1}{(x+1)^2}$ car $O(1) \underset{-1^+}{=} o\Big(\dfrac{1}{(x+1)^2}\Big)$.

e. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} H(n) = 0$ d'après **c.**, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $H(n) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\big(H(k-1) - H(k)\big) = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$ par dualité suite-série avec la relation de la question **d.**. De plus, comme $g : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $\forall k \geqslant 2$, $\displaystyle\int_k^{k+1} g(x)dx \leqslant \frac{1}{k^2} \leqslant \int_{k-1}^k g(x)dx$. Pour $n \geqslant 1$, en sommant pour $k \geqslant n+1$, puisque g est intégrable sur $[1;+\infty[$ par Riemann, $\displaystyle\int_n^{+\infty} g(x)dx = \Big[-\frac{1}{x}\Big]_n^{+\infty} \leqslant H(n) \leqslant \Big[-\frac{1}{x}\Big]_{n-1}^{+\infty} = \int_{n-1}^{+\infty} g(x)dx$

par Chasles donc $\frac{1}{n} \leqslant H(n) \leqslant \frac{1}{n-1}$ (1). Pour $x \geqslant 1$, H étant décroissante sur $[1;+\infty[$ d'après **b.**, $\lfloor x\rfloor \leqslant x < \lfloor x\rfloor + 1 \Longrightarrow H(\lfloor x\rfloor + 1) \leqslant H(x) \leqslant H(\lfloor x\rfloor)$ donc $\frac{1}{\lfloor x\rfloor + 1} \leqslant H(x) \leqslant \frac{1}{\lfloor x\rfloor - 1}$ avec (1) donc $\frac{1}{x+1} \leqslant H(x) \leqslant \frac{1}{x-2}$. Comme $\frac{1}{x+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x-2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$, par encadrement, on trouve $H(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$.

De la même manière, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $H(0) - H(n) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \big(H(k) - H(k+1)\big) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^2} = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2}$ donc, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} H(n) = 0$, on a $H(0) = \sum\limits_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

5 **a.** La fonction $f : t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$ car $\sin(t) \underset{0}{\sim} t$. la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ équivaut donc à celle de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$. Dans cette dernière intégrale, on pose $u : t \mapsto -\cos(t)$ et $v : t \mapsto \frac{1}{t}$ de sorte que u et v sont de classe C^1 sur $[1;+\infty[$ et que $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$ ce qui, par intégration par parties, montre que la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ équivaut à celle de $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} dt$. Soit $g : [1;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $g(t) = \frac{\cos(t)}{t^2}$, alors g est continue sur $[1;+\infty[$ et $g(t) \underset{+\infty}{=} O\Big(\frac{1}{t^2}\Big)$ donc, par comparaison aux intégrales de Riemann, g est intégrable sur $[1;+\infty[$ donc, a fortiori, $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} dt$ converge. Ainsi, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge.

b. Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, comme $|\sin(t)| \geqslant \sin^2(t) = \frac{1-\cos(2t)}{2}$, on a $|f(t)| \geqslant \frac{1}{2t} - \frac{\cos(2t)}{2t}$. Comme en **a.**, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{2t} dt$ converge en réalisant une intégration par parties. Par contre, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{2t}$ diverge par critère de Riemann. Par somme, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)dt}{t}$ diverge donc la fonction positive $g : t \mapsto \frac{\sin^2(t)}{t}$ n'est pas intégrable sur $[1;+\infty[$. Comme $\forall t > 0,\ |f(t)| \geqslant \frac{\sin^2(t)}{t} = g(t)$, par comparaison, f n'est pas non plus intégrable sur $[1;+\infty[$, donc a fortiori pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. Posons $u :\mapsto 1 - \cos(t)$ et $v : t \mapsto \frac{1}{t}$ de sorte que u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et, comme $1 - \cos(t) \underset{0}{\sim} \frac{t^2}{2}$ donc $u(t)v(t) \underset{0}{\sim} \frac{t}{2}$ et $u(t)v(t) \underset{+\infty}{=} O\Big(\frac{1}{t}\Big)$, on a $\lim\limits_{t\to 0^+} u(t)v(t) = 0 = \lim\limits_{t\to+\infty} u(t)v(t)$. Ainsi, par intégration par parties, on a $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = 0 - \int_0^{+\infty} (1-\cos(t))\Big(-\frac{1}{t^2}\Big) dt = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{2\sin^2(t/2)}{t^2} dt$.
On pose maintenant $t = 2u = \varphi(u)$ avec φ qui est une bijection C^1 strictement croissante et $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, et on a par changement de variable $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{2\sin^2((2u)/2)}{4u^2} (2du) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(u)}{u^2} du$.

6 **a.** Puisque f est une fonction positive, on peut définir $g = \sqrt{f} = f^{1/2}$ et $h = f^2\sqrt{f} = f^{5/2}$. Comme les fonctions $t \mapsto \sqrt{t}$ et $t \mapsto t^2\sqrt{t}$ sont continues sur $\mathbb{R}_+$, par composition, g et h sont continues sur $[0;1]$ car f est continue sur $[0;1]$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz associée au produit scalaire $(a,b) \mapsto \int_0^1 a(t)b(t)dt$ sur l'espace vectoriel $C^0([0;1], \mathbb{R})$, on a $\Big|\int_0^1 gh\Big| \leqslant \sqrt{\int_0^1 g^2} \times \sqrt{\int_0^1 h^2}$, ce qui donne exactement, en élevant au carré, l'inégalité $\Big(\int_0^1 f^3\Big)^2 \leqslant \int_0^1 f^5 \times \int_0^1 f$.

Si on a égalité dans cette inégalité de Cauchy-Schwarz, alors les vecteurs g et h sont colinéaires.

- Soit $g = 0$ ou $h = 0$, et dans ce cas $f = 0$.
- Soit g et h sont non nulles, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ (car g et h positives) tel que $h = \lambda g$, ce qui s'écrit $\forall x \in [0;1],\ f(x)^{5/2} = \lambda f(x)^{1/2}$ donc $f(x) = 0$ ou $f(x) = \sqrt{\lambda}$. Comme f n'est pas nulle, sinon g et h le seraient, et que f est continue sur $[0;1]$, on a forcément $\forall x \in [0;1],\ f(x) = \sqrt{\lambda}$ par le théorème des valeurs intermédiaires.

Dans les deux cas, f est constante et positive sur $[0;1]$. Réciproquement, si f est constante et positive (valant α) sur $[0;1]$, alors on a $\left(\int_0^1 f^3\right)^2 = \alpha^6 = \alpha^5 \times \alpha = \int_0^1 f^5 \times \int_0^1 f$.

Il y a égalité dans $\left(\int_0^1 f^3\right)^2 \leqslant \int_0^1 f^5 \times \int_0^1 f$ si et seulement si f est constante et positive sur $[0;1]$.

b. L'hypothèse faite sur f nous incite à utiliser la dérivation. Soit la fonction $g : [0;1] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \left(\int_0^x f\right)^2 - \int_0^x f^3$, alors g existe car f et f^3 sont continues sur $[0;1]$, et g est même dérivable sur l'intervalle $[0;1]$ par le théorème fondamental de l'intégration avec $\forall x \in [0;1],\ g'(x) = 2f(x)\int_0^x f(t)dt - f^3(x)$ d'où $g'(x) = 2f(x)\left(\int_0^x f(t)dt - \dfrac{f^2(x)}{2}\right)$. Comme f' est positive sur $[0;1]$, la fonction f est croissante sur $[0;1]$ donc positive sur cet intervalle car $f(0) = 0$. De plus, pour $x \in [0;1]$, on a $\forall t \in [0;x],\ 0 \leqslant f'(t) \leqslant 1$ donc $0 \leqslant f(t)f'(t) \leqslant f(t)$ ce qui donne $0 \leqslant \int_0^x f(t)f'(t)dt = \left[\dfrac{f^2(t)}{2}\right]_0^x = \dfrac{f(x)^2}{2} \leqslant \int_0^x f(t)dt$ en intégrant et par croissance de l'intégrale. Ainsi, $\forall x \in [0;1],\ g'(x) \geqslant 0$ donc g est croissante sur l'intervalle $[0;1]$. Comme $g(0) = 0$, on a donc $g(1) \geqslant 0$, ce qui s'écrit bien $\int_0^1 f^3 \leqslant \left(\int_0^1 f\right)^2$.

c. S'il y a égalité dans l'inégalité de la question **b.**, on a $g(1) = 0$ donc g est constante sur $[0;1]$ et $\forall x \in [0;1],\ g'(x) = 0 \iff \left(f(x) = 0 \text{ ou } \int_0^x f(t)dt = \dfrac{f(x)^2}{2}\right)$. Or, pour $x \in]0;1]$, par linéarité de l'intégrale, $\int_0^x f(t)dt - \dfrac{f(x)^2}{2} = \int_0^x f(t)dt - \int_0^x f(t)f'(t)dt = \int_0^x f(t)(1-f'(t))dt = 0$ et la fonction $t \mapsto f(t)(1-f'(t))$ est continue et positive sur $[0;x]$ donc $\int_0^x f(t)dt = \dfrac{f(x)^2}{2} \iff \big(\forall t \in [0;x],\ (f(t) = 0 \text{ ou } f'(t) = 1)\big)$.

Ainsi, s'il y a égalité dans l'inégalité de **b.**, $f = 0$ ou $\big(\forall t \in [0;x],\ (f(t) = 0 \text{ ou } f'(t) = 1)\big)$. Supposons que $\big(\forall t \in [0;x],\ (f(t) = 0 \text{ ou } f'(t) = 1)\big)$, posons alors $m = \mathrm{Sup}(\{t \in [0;1] \mid f(t) = 0\})$, qui existe car $A = \{t \in [0;1] \mid f(t) = 0\}$ contient 0, est inclus dans $\mathbb{R}$ et est minoré par 0. Considérons trois cas :

- Si $m = 0$, alors $\forall t > 0,\ f(t) \neq 0$ donc $f'(t) = 1$ et, par continuité de la fonction f' sur $[0;1]$, on a $\forall x \in [0;1],\ f'(x) = 1$. Comme $[0;1]$ est un intervalle et $f(0) = 0$, on a donc $\forall x \in [0;1],\ f(x) = x$.
- Si $m \in]0;1[$, il existe une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = m$ par caractérisation séquentielle de la borne supérieure. Par continuité de f, on a donc $f(m) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(t_n) = 0$ donc $m \in A$. Comme f est croissante sur $[0;1]$, on a $\forall x \in [0;m],\ f(x) = 0$. Pour $t \in]m;1]$, $t \notin A$ donc $f(t) \neq 0$ donc $f'(t) = 1$ et, par continuité de f' en m, on a donc $f'(m) = 1$, ce qui contredit le fait que f est constante (et nulle) sur $[0;m]$. Ce cas ne se peut !
- Si $m = 1$, comme ci-dessus, on a $\forall x \in [0;m],\ f(x) = 0$ donc f est nulle sur $[0;1]$.

Ainsi, l'égalité dans **b.** implique que $f = 0$ ou que $\forall x \in [0;1],\ f(x) = x$.

Réciproquement, si f est nulle sur $[0;1]$, on a bien $\int_0^1 f^3 = 0 = \left(\int_0^1 f\right)^2$ et si $f : x \mapsto x$, on a bien l'égalité

$\int_0^1 f^3 = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1\right)^2 = \left(\int_0^1 f\right)^2.$

Par conséquent, il y a égalité dans **b.** pour une fonction $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f(0) = 0$ et $\forall x \in [0;1],\ f'(x) \in [0;1]$ si et seulement si f est nulle sur $[0;1]$ ou si $f : x \mapsto x$.

7 **a.** Les fonctions $u : t \mapsto \lambda t + \cos(t)$ et $v : t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sont de classe C^1 sur $[1;+\infty[$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)v(t) = \lambda$ donc, par intégration par parties, la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\lambda - \sin(t)}{t}dt$ équivaut à celle de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\lambda t + \cos(t)}{t^2}dt$. Or $t \mapsto \dfrac{\cos(t)}{t^2}$ est continue sur $[1;+\infty[$ et $\dfrac{\cos(t)}{t^2} \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}dt$ est absolument convergente par comparaison et, même si $t \mapsto \dfrac{\lambda t}{t^2} = \dfrac{\lambda}{t}$ est continue sur $[1;+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\lambda}{t}dt$ ne converge que si $\lambda = 0$ d'après Riemann. Ainsi, par somme, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\lambda - \sin(t)}{t}dt$ converge si et seulement si $\lambda = 0$.

b. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, on peut définir $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)dt$ la primitive de f qui s'annule en 0. De plus, f est continue sur le segment $[0;T]$ donc elle y est bornée, et étant T-périodique, elle est bornée sur $\mathbb{R}$.

<u>Méthode 1</u> : notons $M = ||f||_{\infty,\mathbb{R}}$. Soit $x \geqslant 0$ et l'entier n_x tel que n_xT soit le plus grand multiple de T inférieur à x, ce qui se traduit par $n_xT \leqslant t < (n_x+1)T \iff n_x \leqslant \dfrac{x}{T} < n_x + 1$ donc $n_x = \left\lfloor \dfrac{x}{T} \right\rfloor$.
Par Chasles, $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt = \sum_{k=0}^{n_x-1} \int_{kT}^{(k+1)T} f(t)dt + \int_{n_xT}^x f(t)dt$. Posons $I = \displaystyle\int_0^T f(t)dt$, ce qui donne $F(x) = n_x I + \displaystyle\int_{nT}^x f(t)dt$. Par inégalité triangulaire, on a $\left|\displaystyle\int_{n_xT}^x f(t)dt\right| \leqslant \displaystyle\int_{n_xT}^x Mdt = M(x - n_xT) \leqslant MT$ et on a donc $F(x) \underset{+\infty}{=} n_x I + O(1)$. L'inégalité $n_xT \leqslant x < (n_x+1)T$ montre que $x - n_xT \underset{+\infty}{=} O(1)$ donc $n_x \underset{+\infty}{=} \dfrac{x}{T} + O(1)$.
Posons $m = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)dt = \dfrac{I}{T}$ qui représente la valeur moyenne de f sur une période, de sorte que ce qui précède s'énonce $F(x) \underset{+\infty}{=} \dfrac{I}{T}x + O(1) \underset{+\infty}{=} mx + O(1)$.

<u>Méthode 2</u> : posons $m = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(u)du = \dfrac{F(T)}{T}$, $g : x \mapsto F(x) - mx$ et $h : x \mapsto g(x+T) - g(x)$. Comme F est dérivable par le théorème fondamental de l'intégration, g et h le sont aussi et on a $h'(x) = g'(x+T) - g'(x)$ donc $h'(x) = F'(x+T) - m - F'(x) + m = f(x+T) - f(x) = 0$ par hypothèse. Comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, h est constante et $h(0) = g(T) - g(0) = F(T) - F(T) = 0$ donc h est nulle sur $\mathbb{R}$. g est donc T-périodique et, comme avant puisque g est continue, elle est bornée sur $\mathbb{R}$ donc $F(x) \underset{+\infty}{=} mx + O(1)$.

<u>Concluons</u> : les fonctions $u : t \mapsto \lambda t - F(t)$ et $v : t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sont C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)v(t) = \lambda - m$ car $u(t)v(t) \underset{+\infty}{=} \dfrac{\lambda t - (mt + O(1))}{t}$. Par intégration par parties, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\lambda - f(t)}{t}dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\lambda t - F(t)}{t^2}dt$ ont même nature. Comme $\dfrac{\lambda t - F(t)}{t^2} = \dfrac{\lambda t - mt - (F(t) - mt)}{t^2} = \dfrac{(\lambda - m)}{t} + \dfrac{F(t) - mt}{t^2}$ et $\dfrac{F(t) - mt}{t^2} \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ d'après ce qui précède, comme à la question **a.**, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\lambda - f(t)}{t}dt$ converge si et seulement si $\lambda = m$.

8 **a.** Comme f est continue, positive et non nulle sur $[a;b]$, d'après la contraposée d'un théorème du cours, il vient $A = \displaystyle\int_a^b f(x)dx > 0$. Comme f est continue sur $[a;b]$, d'après le théorème fondamental de l'intégration, $F : [a;b] \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f qui s'annule en a sur $[a;b]$. F est donc de

classe C^1, strictement croissante car $f > 0$ donc F réalise une bijection de l'intervalle $[a;b]$ dans $[0;A]$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, les conditions imposées à $x_0, x_1, \cdots, x_n$ reviennent à $\forall k \in [\![1;n]\!], F(x_k) - F(x_{k-1}) = \dfrac{A}{n}$ donc, puisque $x_0 = a$ est imposé donc $F(x_0) = 0$, les conditions imposées se résument à $\forall k \in [\![0;n]\!],\ F(x_k) = \dfrac{kA}{n}$. Ceci montre l'existence et l'unicité de la subdivision demandée et qu'on a $\forall k \in [\![0;n]\!],\ x_k = F^{-1}\Big(\dfrac{kA}{n}\Big)$.

b. Pour $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f\Big(F^{-1}\big(\dfrac{kA}{n}\big)\Big) = \dfrac{1}{A} \times \left[\dfrac{A}{n}\sum_{k=0}^{n} g\Big(\dfrac{kA}{n}\Big)\right] = \dfrac{g(0)}{n} + \dfrac{1}{A} \times \left[\dfrac{A}{n}\sum_{k=1}^{n} g\Big(\dfrac{kA}{n}\Big)\right]$ en définissant $g : [0;A] \to \mathbb{R}$ par $g(x) = f \circ F^{-1}(x)$. Comme g est continue sur le segment $[0;A]$ par composition puisque F^{-1} est continue de $[0;A]$ dans $[a;b]$, le théorème sur les sommes de RIEMANN montre que l'on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{A}\int_0^A g(x)dx = \frac{1}{A}\int_0^A f \circ F^{-1}(x)dx$. On peut effectuer le changement de variable $x = F(t)$ car F est de classe C^1, bijective et strictement croissante de $[a;b]$ dans $[0;A]$ et on obtient la nouvelle expression $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{A}\int_a^b \big(f \circ F^{-1} \circ F(t)\big) \times f(t)dt = \frac{1}{A}\int_a^b f(t)^2dt$ car $F'(t) = f(t)$. Ainsi, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{\int_a^b (f(x))^2dx}{\int_a^b f(x)dx}$.

9 **a.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : x \mapsto x^n e^{\omega x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $|f_n(x)| = x^n e^{-x/2} \underset{+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{x^2}\Big)$ par croissances comparées donc f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)dx$ existe. Pour tout entier $n \geqslant 1$, les fonctions $u : x \mapsto x^n$ et $v : x \mapsto \dfrac{e^{\omega x}}{\omega}$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$, $u(0)v(0) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} u(x)v(x) = 0$ par croissances comparées donc, par intégration par parties, $I_n = -\dfrac{n}{\omega}\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{n-1}e^{\omega x}dx = -\frac{n}{\omega}I_{n-1}$. Par une récurrence simple, on en déduit que $I_n = n!(-j)^{n+1}$ car $\omega = j^2$ donc $\dfrac{1}{\omega} = j$.

Ainsi, pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathrm{Im}(I_{3k-1}) = 0 = \mathrm{Im}\Big(\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{3k-1}e^{\omega x}dx\Big) = -\int_0^{+\infty} x^{3k-1}e^{-x/2}\sin\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}x\Big)dx$. Dans $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{3k-1}e^{-x/2}\sin\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}x\Big)dx = 0$ (vue sur $\mathbb{R}_+^*$), on pose $x = \varphi(t) = t^{1/3}$ avec φ qui est une bijection strictement croissante de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et $\dfrac{1}{3}\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{k-(1/3)}e^{-t^{1/3}/2}\sin\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}t^{1/3}\Big)t^{-2/3}dt = 0$ donc, en posant, $n = k-1$, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^{1/3}/2}\sin\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}t^{1/3}\Big)t^n dt = 0$. En définissant $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ par $g(t) = e^{\frac{-\sqrt[3]{t}}{2}}\sin\Big(\dfrac{\sqrt{3}\sqrt[3]{t}}{2}\Big)$, la fonction g est continue et non nulle sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)t^n = 0$.

b. L'énoncé nous incite à admettre le théorème de STONE-WEIERSTRASS, il s'agit de l'approximation uniforme de toute fonction continue sur un segment par des polynômes. Soit donc $\varepsilon > 0$, il existe par ce théorème un polynôme P tel que $\forall t \in [a;b]$, $|f(t) - P(t)| \leqslant \varepsilon$, c'est-à-dire $||f - P||_{\infty,[a;b]} \leqslant \varepsilon$. Ainsi, en écrivant $P = \displaystyle\sum_{n=0}^{d} a_n X^n$, on a $\displaystyle\int_a^b (f-P)f = \int_a^b f^2 - \int_a^b fP$ or, par linéarité de l'intégrale, $\displaystyle\int_a^b fP = \sum_{n=0}^{d}\int_a^b f(t)t^n dt = 0$ donc $\displaystyle\int_a^b (f-P)f = \int_a^b f^2$. Or, $\displaystyle\Big|\int_a^b (f-P)f\Big| \leqslant ||f - P||_{\infty,[a;b]}\int_a^b |f| \leqslant \varepsilon(b-a)||f||_{\infty,[a;b]}$ par inégalité de la moyenne car f est bornée puisque continue sur le segment $[a;b]$. En faisant tendre ε vers 0, on a donc l'égalité $\displaystyle\int_a^b f^2 = 0$. Comme f^2 est positive et continue sur $[a;b]$ non réduit à un point, f^2 est nulle sur $[a;b]$, donc f est nulle sur $[a;b]$ comme attendu.

Question subsidiaire : on pose $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$, alors F est C^1 et croissante car $F' = f \geqslant 0$ sur l'intervalle $[a;b]$ et $F(a) = F(b)$ donc F est constante sur $[a;b]$ ce qui prouve que $F' = f = 0$.

10 Soit $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+$ définie par $g(t) = \dfrac{|\sin(t)|}{t}$. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations et se prolonge par continuité en 0 en posant $g(0) = 1$ car $|\sin(t)| \underset{t\to 0^+}{\sim} \sin(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} t$. Comme g est maintenant continue sur le segment $[0;x]$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}_+$, c'est même d'après le théorème fondamental de l'intégration la primitive de g qui s'annule en 0. Comme la fonction g s'annule en tous les multiples de π, on va considérer $f(n\pi)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Par la relation de Chasles, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f(n\pi) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} g(t)dt$. Pour $k \in [\![0; n-1]\!]$, on pose dans $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} g(t)dt$ le changement de variable affine $t = u + k\pi = \varphi_k$ avec φ_k de classe C^1 sur $[0;\pi]$ pour avoir $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} g(t)dt = \int_0^{\pi} \frac{\sin(u)}{u+k\pi}du$ car $\sin$ est positif sur $[0;\pi]$. On somme ces inégalités pour obtenir l'encadrement $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi} \frac{\sin(u)}{\pi+k\pi}du \leqslant f(n\pi) = \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi} \frac{\sin(u)}{u+k\pi}du \leqslant \int_0^{\pi}\frac{\sin(u)}{u}du + \sum_{k=1}^{n-1}\int_0^{\pi}\frac{\sin(u)}{k\pi}du$. En posant $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, il est classique que $H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$. De plus, $\displaystyle\int_0^{\pi}\sin(u)du = \big[-\cos(u)\big]_0^{\pi} = 2$ donc $\dfrac{2H_n}{\pi} \leqslant f(n\pi) \leqslant I + \dfrac{2H_{n-1}}{\pi}$ en posant $I = \displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin(u)}{u}du$. Comme $\dfrac{2H_n}{\pi} \underset{+\infty}{\sim} I + \dfrac{2H_{n-1}}{\pi} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2\ln(n)}{\pi}$ car $\ln(n-1) = \ln(n) + \ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$, par encadrement, on a $f(n\pi) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2\ln(n)}{\pi}$.

De plus, par définition de la partie entière, pour $x \in \mathbb{R}_+$, en posant $n_x = \left\lfloor \dfrac{x}{\pi} \right\rfloor$, on a $n_x \leqslant \dfrac{x}{\pi} < n_x + 1$ donc $n_x\pi \leqslant x < (n_x+1)\pi$. Comme la fonction f est croissante car $f' = g \geqslant 0$ sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$, on en déduit que $f(n_x\pi) \leqslant f(x) \leqslant f((n_x+1)\pi)$. D'après ce qui précède, on a $f(n_x\pi) \underset{+\infty}{\sim} f((n_x+1)\pi) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2\ln(n_x)}{\pi}$ car $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} n_x = +\infty$ puisque $n_x > \dfrac{x}{\pi} - 1$ donc, par encadrement, $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2\ln(n_x)}{\pi}$. Mais $\dfrac{x}{\pi} - 1 < n_x \leqslant \dfrac{x}{\pi}$ donc, par croissance de la fonction $\ln$, $\ln\left(\dfrac{x}{\pi}-1\right) \leqslant \ln(n_x) \leqslant \ln\left(\dfrac{x}{\pi}\right)$ donc $\ln(n_x) \underset{+\infty}{\sim} \ln\left(\dfrac{x}{\pi}\right) = \ln(x) - \ln(\pi) \underset{+\infty}{\sim} \ln(x)$. Par conséquent, $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2\ln(x)}{\pi}$.

11 **a.** La fonction $x \mapsto \ln(\sin x)$ est négative, continue sur $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right]$. De plus, $f(x) = \ln\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right) - \ln(x) \underset{0}{\sim} -\ln(x)$ car $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(x)}{x} = 1$. Ainsi, $f(x) \underset{0}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ par croissances comparées donc f est intégrable sur $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ par comparaison aux intégrales de Riemann. Par conséquent, $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\ln\big(\sin(x)\big)dx$ converge donc I existe.

b. On effectue le changement de variable $x = \dfrac{\pi}{2} - t = \varphi(t)$ avec φ qui est de classe C^1 et une bijection strictement décroissante de $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ dans $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, ce qui garantit l'existence de $\displaystyle\int_{\pi/2}^{0}\ln(\cos t)(-1)dt = K$ et le fait que $I = K$. Par linéarité de l'intégrale, vue ici sur l'intervalle $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$, comme on a la relation $\ln\big(\sin(x)\cos(x)\big) = \ln\big(\sin(x)\big) + \ln\big(\cos(x)\big)$, le réel J existe aussi et $J = I + K = 2I$.

c. En considérant les intégrales sur $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$, $J = \displaystyle\int_0^{\pi/2}\ln\big(\sin x\cos x\big)dt = \int_0^{\pi/2}\ln\big(\sin(2x)\big)dx - \frac{\pi\ln 2}{2}$. On change de variable $x = \dfrac{t}{2} = \psi(t)$ avec ψ qui est de classe C^1 et une bijection strictement croissante de $]0;\pi[$ dans $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$, et on a $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\ln\big(\sin(2x)\big)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln\big(\sin t\big)dt = \int_0^{\pi/2}\ln\big(\sin t\big)dt$ par symétrie par rapport à $\dfrac{\pi}{2}$ de la courbe de $t \mapsto \ln(\sin t)$ ou par changement de variable $t = \pi - s$. Alors $J = I + I = I - \dfrac{\pi\ln 2}{2}$ donc

$I = -\dfrac{\pi \ln 2}{2}$. Cette intégrale est dite d'EULER.

12 **a.** Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(t) = \dfrac{e^{nt}}{(1+e^t)^{n+1}}$. La fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $f_n(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^{nt}}{(e^t)^{n+1}} = e^{-t}$. Par comparaison, f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car $t \mapsto e^{-t}$ l'est. Ainsi, I_n existe.

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, dans $\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{e^{nt}}{(1+e^t)^{n+1}} dt$, on pose $u : t \mapsto -\dfrac{(1+e^t)^{-n}}{n}$ et $v : t \mapsto e^{(n-1)t}$ qui sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ avec $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$ car $u(t)v(t) \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{e^{-t}}{n}$ d'où, par intégration par parties et linéarité de l'intégrale, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u(t)v'(t)dt$, ce qui donne bien la relation $I_n = \dfrac{1}{n(1+1)^n} + \dfrac{n-1}{n}\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{e^{(n-1)t}}{(1+e^t)^n} dt = \dfrac{1}{n2^n} + \dfrac{n-1}{n} I_{n-1}$.

c. Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $J_n = nI_n = \dfrac{1}{2^n} + (n-1)I_{n-1}$ donc $J_n = J_{n-1} + \dfrac{1}{2^n}$.

d. On calcule $J_1 = I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{e^t}{(1+e^t)^2} dt = \left[-\dfrac{1}{1+e^t}\right]_0^{+\infty} = \dfrac{1}{2}$. Ainsi, avec la question précédente, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ J_n = J_1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(J_{k+1} - J_k) = \dfrac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{2^{k+1}} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1-(1/2)^n}{1-(1/2)} = 1 - \dfrac{1}{2^n}$ donc $I_n = \dfrac{1}{n}\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)$.

e. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right) = 1$, on a $I_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

13 **a.** Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : x \mapsto \dfrac{(1-x)^n}{\sqrt{x}}$ est continue sur $]0;1]$ et $f_n(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ donc, par comparaison aux intégrales de RIEMANN, f_n est intégrable sur $]0;1]$ donc u_n existe bien.

b. Méthode 1 : pour $n \in \mathbb{N}^*$, comme f_n est positive sur $]0;1]$, on a $u_n \geqslant \displaystyle\int_0^{1/3} \dfrac{(1-x)^n}{\sqrt{x}} dx$. Or on a $\forall x \in \left]0;\dfrac{1}{3}\right],\ 1 - x \geqslant \dfrac{2}{3} > \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \geqslant \sqrt{x}$, ce qui donne la minoration $u_n \geqslant \displaystyle\int_0^{1/3}(1-x)^{n-1}dx$. Alors, $u_n \geqslant \left[-\dfrac{(1-x)^n}{n}\right]_0^{1/3} = \dfrac{1}{n}\left(1 - \dfrac{2^n}{3^n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$. Comme $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n}$ diverge, par comparaison, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ diverge.

Méthode 2 : raisonnons par l'absurde, si $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ convergeait :

- (H_1) La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement vers $f :]0;1[\to \dfrac{1}{x^{3/2}}$ sur $]0;1[$ car, avec les séries géométriques, $\forall x \in]0;1[,\ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \dfrac{1}{(1-(1-x))\sqrt{x}} = \dfrac{1}{x\sqrt{x}} = \dfrac{1}{x^{3/2}} = f(x)$ car $|1-x| < 1$.
- (H_2) Les fonctions f_n sont continues et intégrables sur $]0;1[$ d'après **a.**.
- (H_3) La fonction f est continue sur $]0;1[$.
- (H_4) La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1 |f_n(t)|dt = \sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge par hypothèse.

Par le théorème d'intégration terme à terme, f serait intégrable sur $]0;1[$ ce qui est faux car l'intégrale de RIEMANN $\displaystyle\int_0^1 \dfrac{dx}{x^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$ et ici $f(x) = \dfrac{1}{x^{3/2}}$ avec $\dfrac{3}{2} \geqslant 1$. Ainsi, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge.

c. Utilisons le théorème de convergence dominée :

- (H_1) Comme $\forall x \in]0;1[,\ \lim\limits_{n\to+\infty}(1-x)^n = 0$, la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers la fonction nulle $g : x \mapsto 0$ sur $]0;1[$.
- (H_2) Les fonctions f_n et la fonction g sont continues sur $]0;1[$.
- (H_3) $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0;1[,\ |f_n(x)| = \dfrac{(1-x)^n}{\sqrt{x}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \varphi(x)$ et φ est continue et intégrable sur $]0;1[$ d'après RIEMANN.

Par le théorème évoqué, $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 g(x)dx = 0$.

d. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, dans $u_{n+1} = \int_0^1 \frac{(1-x)^{n+1}}{\sqrt{x}}dx$, on pose $u(x)=(1-x)^{n+1}$ et $v(x)=2\sqrt{x}$ de sorte que $u'(x) = -(n+1)(1-x)^n$ et $v'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ avec u et v de classe C^1 sur $]0;1]$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} u(x)v(x) = 0$. Ainsi, par intégration par parties, il vient $u_{n+1} = [2(1-x)^{n+1}\sqrt{x}]_0^1 + 2(n+1)\int_0^1 (1-x)^n\sqrt{x}dx$ donc $u_{n+1} = 2(n+1)\int_0^1 (1-x)^n \frac{1-(1-x)}{\sqrt{x}}dx$. Par linéarité de l'intégrale, comme les deux intégrales convergent, $u_{n+1} = 2(n+1)\Big[\int_0^1 \frac{(1-x)^n}{\sqrt{x}}dx - \int_0^1 \frac{(1-x)^{n+1}}{\sqrt{x}}dx\Big] = (2n+2)u_n - (2n+2)u_{n+1}$ donc $u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3}u_n$.

e. Pour $n\in\mathbb{N}$, $u_n = \frac{2n}{2n+1}u_{n-1} = \frac{2n}{2n+1}\times\frac{2n-2}{2n-1}\times\cdots\times\frac{2}{3}u_0$ d'après la question **d.** qui se simplifie en $u_n = \frac{((2n)(2n-2)\cdots 2)^2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3}u_0 = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!(2n+1)}u_0$. Or $u_0 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = [2\sqrt{x}]_0^1 = 2$ donc, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a la relation $u_n = \frac{2}{2n+1}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}$. D'après STIRLING, on a donc $u_n \sim \frac{2}{2n}\times\frac{2^{2n}(2\pi n)n^{2n}e^{2n}}{e^{2n}\sqrt{2\pi(2n)}(2n)^{2n}}$ qui s'abrège en $u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{n}}$ comme attendu. On retrouve bien, avec RIEMANN, la divergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$.

ORAUX 2024 THÈME 2
ALGÈBRE LINÉAIRE ET GÉNÉRALE

14 Traitons d'abord des cas simples :

- Si $a = 0$, alors $P = 0$ et tous les réels sont des racines de P.
- Si $n = 1$ et $a \neq 0$, alors $P = X + a - (X - a) = 2a$ est constant non nul.
- Si $n = 2$ et $a \neq 0$, alors $P = (X + a)^2 - (X - a)^2 = 4aX$ et seul 0 est racine de P.

Nous traiterons dorénavant le cas général où $n \geqslant 2$ et $a \neq 0$. On constate, avec le binôme de NEWTON, que $P = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k X^{n-k} - \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k a^k X^{n-k} = 2 \sum\limits_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} a^{2k+1} X^{n-2k-1}$ donc P est de degré $n-1$ et de coefficient dominant $\lambda = 2na$. Soit $z \in \mathbb{C}$ une racine de P, alors comme $P(a) = (2a)^n \neq 0$, on a $z \neq a$ et $(z+a)^n - (z-a)^n = 0 \Longleftrightarrow (z+a)^n = (z-a)^n \Longleftrightarrow \left(\frac{z+a}{z-a}\right)^n = 1 \Longleftrightarrow \left(\exists k \in [\![1; n-1]\!],\ \frac{z+a}{z-a} = e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)$. En effet, $k = 0$ est impossible car on ne peut pas avoir $\frac{z+a}{z-a} = 1$. Ainsi, il existe un entier $k \in [\![1; n-1]\!]$ tel que $\frac{z+a}{z-a} = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \Longleftrightarrow z = a\frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}} + 1}{e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1} = a\frac{e^{\frac{ik\pi}{n}} + e^{\frac{ik\pi}{n}}}{e^{\frac{ik\pi}{n}} - e^{\frac{ik\pi}{n}}} = -ia\,\mathrm{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ (avec $\frac{k\pi}{n} \in]0; \pi[$). En remontant les calculs, on constate que les imaginaires purs $z_k = -ia\,\mathrm{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ sont des racines de P et, comme la fonction cotan est injective sur $]0; \pi[$, on a $z_1, \cdots, z_{n-1}$ distincts. Puisque P est de degré $n-1$, on a le compte de ses racines et, d'après le cours, $P = 2na \prod\limits_{k=1}^{n-1} \left(X + ia\,\mathrm{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)$.

15 **a.** Soit $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ une base de E et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (dans $\mathbb{R}^2$ euclidien canonique avec $\mathcal{B}$ la base canonique, u serait la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$). Alors $A^2 = -I_2$ donc $u^2 = -\mathrm{id}_E$.

b. Par hypothèse, $P = X^2 + 1$ annule u et on sait d'après le cours que les valeurs propres de u sont des racines de P. Or les seules racines de P sont $\pm i$ dont aucune n'est réelle. Ainsi, u n'admet aucune valeur propre réelle. De plus, $\det(-\mathrm{id}_E) = (-1)^n = \det(u^2) = \det(u)^2 \geqslant 0$ ce qui impose $n = 2p$ pair.

c. <u>Initialisation</u> : soit $e_1 \neq 0_E \in E$ (e_1 existe car $\dim(E) \geqslant 1$) et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda e_1 + \mu u(e_1) = 0_E$ (1), alors en appliquant u, on obtient $\lambda u(e_1) - \mu e_1 = 0_E$ (2). En effectuant $(1) - \mu(2)$, il reste $(\lambda^2 + \mu^2)e_1 = 0_E$ ce qui, comme $e_1 \neq 0_E$, montre que $\lambda^2 + \mu^2 = 0$ donc que $\lambda = \mu = 0$. Ainsi, $(e_1, u(e_1))$ est libre.

<u>Hérédité</u> : soit un entier $k \in [\![1; p-1]\!]$ telle qu'il existe une famille libre $(e_1, u(e_1), \cdots, e_k, u(e_k))$ dans E. Comme $\dim(\mathrm{Vect}(e_1, u(e_1), \cdots, e_k, u(e_k))) = 2k < n$, il existe un vecteur non nul $e_{k+1} \in E$ tel que $e_{k+1} \notin \mathrm{Vect}(e_1, u(e_1), \cdots, e_k, u(e_k))$. Soit $(\lambda_1, \mu_1, \cdots, \lambda_k, \mu_k) \in \mathbb{R}^{2k}$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{k} (\lambda_i e_i + \mu_i u(e_i)) = 0_E$ (1). On applique u à (1) pour avoir $\sum\limits_{i=1}^{k} (\lambda_i u(e_i) - \mu_i e_i) = 0_E$ (2). En effectuant $\lambda_k(1) - \mu_k(2)$ et il reste $(\lambda_k^2 + \mu_k^2)e_k + \sum\limits_{i=1}^{k-1} (\lambda_k\lambda_i + \mu_k\mu_i)e_i + (\lambda_k\mu_i - \mu_k\lambda_i)u(e_i)) = 0_E$ donc, puisque $(e_1, u(e_1), \cdots, e_{k-1}, u(e_{k-1}), e_k)$ est libre, on a en particulier $\lambda_k^2 + \mu_k^2 = 0$ d'où $\lambda_k = \mu_k = 0$. (1) se résume alors à $\sum\limits_{i=1}^{k-1} (\lambda_i e_i + \mu_i u(e_i)) = 0_E$

et on a $\lambda_1 = \mu_1 = \cdots = \lambda_{k-1} = \mu_{k-1} = 0$ car $(e_1, u(e_1), \cdots, e_{k-1}, u(e_{k-1}))$ est libre. On a donc montré que $\lambda_1 = \mu_1 = \cdots = \lambda_k = \mu_k = 0$ et $(e_1, u(e_1), \cdots, e_k, u(e_k))$ est libre.

Conclusion : par principe de récurrence, pour tout $k \in [\![1;p]\!]$, il existe des vecteurs $e_1, \cdots, e_k$ tels que la famille $(e_1, u(e_1), \cdots, e_k, u(e_k))$ est libre.

Pour $k = p$, il existe donc $e_1, \cdots, e_p$ tels que la famille $\mathcal{B} = (e_1, u(e_1), \cdots, e_p, u(e_p))$ est libre. Comme $\text{card}(\mathcal{B}) = n$, $\mathcal{B}$ est une base de E et, par construction, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \text{diag}(A, \cdots, A)$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

16 D'abord, $C(A) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a $0 \in C(A)$ car $0A = A0 = 0$ donc $C(A) \neq \emptyset$. De plus, si $(B, C) \in C(A)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $A(\lambda B + C) = \lambda AB + AC = \lambda BA + CA = (\lambda B + C)A$ donc $\lambda B + C \in C(A)$. Ainsi, même si ce n'est pas demandé, on a montré que $C(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Comme $A(BC) = (AB)C = (BA)C = B(AC) = B(CA) = (BC)A$, on a aussi $BC \in C(A)$ ce qui montre, comme $I_n \in C(A)$, que $C(A)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (notion hors programme).

a. Soit $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ tel que $i \neq j$. La matrice $A = I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$ est une matrice de Gauss et, si $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice AB s'obtient à partir de B en échangeant les lignes i et j de B et la matrice BA s'obtient à partir de B en échangeant les colonnes i et j de B. Ainsi, $AB = BA$ si et seulement si $(b_{i,i} = b_{j,j},\ b_{i,j} = b_{j,i}, \forall k \in [\![1;n]\!] \setminus \{i,j\},\ b_{k,i} = b_{k,j}$ et $b_{i,k} = b_{j,k})$. Comme $AB = BA$ si et seulement si les termes des ligne et colonne i dépendent de ceux des ligne et colonne j (voir ci-dessus pour les relations entre ces termes), la dimension de $C(A)$ est le nombre de cases qui ne se trouve ni dans la ligne i ni dans la colonne i. Ainsi, $\dim(C(A)) = n^2 - (2n-1) = (n-1)^2$.

b. Si $A = \text{diag}(a_1, \cdots, a_n)$ avec $a_1, \cdots, a_n$ distincts, pour une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice AB s'obtient à partir de B en multipliant la ligne i par a_i et BA s'obtient à partir de B en multipliant la colonne j par a_j. En écrivant l'égalité $AB = BA$, on se rend compte que $AB = BA \iff B$ est diagonale. Ainsi, $\dim(C(A)) = n$. L'exercice est certainement incomplet !

17 On sait que $z \in \mathbb{C}$ est racine au moins double de P_n si et seulement si $P_n(z) = P_n'(z) = 0$.

Analyse : soit $n \geqslant 2$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que l'on ait $P_n(z) = P_n'(z) = 0$, alors $P_n(z) = (z-1)^n - z^n + 1 = 0$ et $P_n'(z) = n\big((z-1)^{n-1} - z^{n-1}\big) = 0$ donc $z \neq 0$. Comme $n \geqslant 2$ et $\left(\frac{z-1}{z}\right)^{n-1} = 1$, il existe $k \in [\![1;n-2]\!]$ tel que $\frac{z-1}{z} = 1 - \frac{1}{z} = e^{\frac{2ik\pi}{n-1}}$ ($k \neq 0$ car $1 - \frac{1}{z} \neq 1$). Alors, $\left(\frac{z-1}{z}\right)^n - 1 + \left(\frac{1}{z}\right)^n = 0$ d'où, comme $\left(\frac{z-1}{z}\right)^{n-1} = 1$ donc $\left(\frac{z-1}{z}\right)^n = \frac{z-1}{z} = e^{\frac{2ik\pi}{n-1}}$ puis $\frac{1}{z} = 1 - e^{\frac{2ik\pi}{n-1}} = e^{\frac{ik\pi}{n-1}}\left(e^{\frac{-ik\pi}{n-1}} - e^{\frac{ik\pi}{n-1}}\right) = -2i\sin\left(\frac{k\pi}{n-1}\right)e^{\frac{ik\pi}{n-1}}$ d'où $\left(\frac{1}{z}\right)^n = (-1)^n 2^n i^n \left(\sin\left(\frac{k\pi}{n-1}\right)\right)^n e^{\frac{ikn\pi}{n-1}}$ et $\left(\frac{z-1}{z}\right)^n - 1 = e^{\frac{2ik\pi}{n-1}} - 1 = 2i\sin\left(\frac{k\pi}{n-1}\right)e^{\frac{ik\pi}{n-1}}$, on arrive à $2i\sin\left(\frac{k\pi}{n-1}\right)e^{\frac{ik\pi}{n-1}} + (-1)^n(-1)^k 2^n i^n \left(\sin\left(\frac{k\pi}{n-1}\right)\right)^n e^{\frac{ik\pi}{n-1}} = 0$ car $e^{\frac{ikn\pi}{n-1}} = e^{ik\pi}e^{\frac{ik\pi}{n-1}} = (-1)^k e^{\frac{ik\pi}{n-1}}$ donc, en simplifiant par $2ie^{\frac{ik\pi}{n-1}} \neq 0$, en factorisant par $\sin\left(\frac{k\pi}{n-1}\right)$, et comme $\sin\left(\frac{k\pi}{n-1}\right) \neq 0$ car $0 < \frac{k\pi}{n-1} < \pi$, il ne reste que $1 + (-1)^{n+k}2^{n-1}i^{n-1}\left(\sin\left(\frac{k\pi}{n-1}\right)\right)^{n-1} = 0 \quad (1)$.

Ceci impose que $n-1$ est pair pour que $i^{n-1} \in \mathbb{R}$. On écrit $n = 2p+1$ et on a $(-1)^{k+p}2^{2p}\sin^{2p}\left(\frac{k\pi}{2p}\right) = 1$.

On a donc $\sin\left(\frac{k\pi}{2p}\right) = \frac{1}{2}$ car $\frac{k\pi}{2p} \in]0;\pi[$. Ainsi, $\frac{k\pi}{2p} = \frac{\pi}{6}$ ou $\frac{5\pi}{6}$ donc $p = 3k$ ou $5p = 3k$. Dans les deux cas, comme 3 et 5 sont premiers entre eux, p est un multiple de 3 par le lemme de Gauss. Ainsi, $n = 6m+1$.

Synthèse : supposons que $n = 6m+1$ avec $m \in \mathbb{N}^*$, alors $P_n = P_{6m+1} = (X-1)^{6m+1} - X^{6m+1} + 1$ et $P_n' = (6m+1)\big((X-1)^{6m} - X^{6m}\big)$. Prenons $k = m$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que $1 - \frac{1}{z} = e^{\frac{2ik\pi}{n-1}} = e^{\frac{2im\pi}{6m}} = e^{\frac{i\pi}{3}} = -j^2$ de sorte que $\frac{1}{z} = 1+j^2 = -j$ donc $z = -j^2$. Alors $P_n(-j^2) = (-j^2-1)^{6m+1} - (-j^2)^{6m+1} + 1 = j^{6m+1} + (j^2)^{6m+1} + 1$ donc $P_n(-j^2) = j + j^2 + 1 = 0$ et $P_n'(-j^2) = (6m+1)\big((-j^2-1)^{6m} - (-j^2)^{6m}\big) = (6m+1)\big((j)^{6m} - (j^2)^{6m}\big)$ donc on a $P_n'(-j^2) = (6m+1)(1-1) = 0$. Par conséquent, $-j^2$ est racine au moins double de P_n. Comme $P_n'' = (6m+1)(6m)\big((X-1)^{6m-1} - X^{6m-1}\big)$, on a $P_n''(-j^2) = (6m+1)(6m)\big((-j^2-1)^{6m-1} - (-j^2)^{6m-1}\big)$ d'où $P_n''(-j^2) = (6m+1)(6m)\big((j)^{6m-1} + (j^2)^{6m-1}\big) = (6m+1)(6m)(j^2+j) = -(6m+1)(6m) \neq 0$ donc $-j^2$ est racine d'ordre exactement 2 de P_n. Comme $P_n \in \mathbb{R}[X]$, $-j = \overline{-j^2}$ est aussi racine double de P_n.

Conclusion : les valeurs de n telles que P_n admet une racine double sont exactement les entiers de la forme $6m+1$ avec $m \in \mathbb{N}^*$. Les racines doubles de P_n sont alors $-j^2$ et $-j$.

18 Notons $\mathcal{F}_n^p$ l'ensemble des parties A à p éléments de $[\![1;n]\!]$ telles que l'on ait $\forall i \in [\![1;n-1]\!], i \in A$ ou $i+1 \in A$ de sorte que $F_n^p = \text{card}\,(\mathcal{F}_n^p)$. Prenons quatre exemples :

Si $n = 2$, $\mathcal{F}_2^0 = \emptyset$, $\mathcal{F}_2, 1 = \{\{1\},\{2\}\}$, $\mathcal{F}_2^2 = \{\{1,2\}\}$ d'où $F_2^0 = 0, F_2^1 = 2$ et $F_2^2 = 1$.

Si $n = 3$, $\mathcal{F}_3^0 = \emptyset$, $\mathcal{F}_3, 1 = \{\{2\}\}$, $\mathcal{F}_3^2 = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$ et $\mathcal{F}_3^3 = \{\{1,2,3\}\}$ d'où $F_3^0 = 0, F_3^1 = F_3^3 = 1, F_3^2 = 3$.

Si $n = 4$, $\mathcal{F}_4^0 = \mathcal{F}_4^1 = \emptyset$, $\mathcal{F}_4^2 = \{\{1,3\},\{2,3\},\{2,4\}\}$, $\mathcal{F}_4^3 = \{\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\}\}$ et on a enfin $\mathcal{F}_4^4 = \{\{1,2,3,4\}\}$ donc $F_4^0 = F_4^1 = 0, F_4^2 = 3, F_4^3 = 4, F_4^4 = 1$.

Si $n = 5$, $\mathcal{F}_5^0 = \mathcal{F}_5^1 = \emptyset$, $\mathcal{F}_5^2 = \{\{2,4\}\}$, $\mathcal{F}_5^3 = \{\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{1,4,5\},\{2,3,4\},\{2,4,5\},\{3,4,5\}\}$, puis on a aussi $\mathcal{F}_5^4 = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,4,5\},\{1,3,4,5\},\{2,3,4,5\}\}$ et on a enfin $\mathcal{F}_5^5 = \{\{1,2,3,4,5\}\}$ ce qui donne les valeurs $F_5^0 = F_5^1 = 0, F_5^2 = 1, F_5^3 = 6, F_5^4 = 4$ et $F_5^5 = 1$.

- On constate que les premiers termes sont nuls. En effet, si $n \in \mathbb{N}^*$ et si $p \in [\![0;n]\!]$ et s'il existe une partie A à p éléments de $[\![1;n]\!]$ ayant la propriété (C), alors il faut au moins un élément de A dans $\{1,2\}$, au moins un (et différent du premier) dans $\{3,4\}$, etc... Ainsi, comme il existe $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ parties disjointes deux à deux du type $\{2k-1,2k\}$ dans $[\![1;n]\!]$, on a $\text{card}\,(A) = p \geqslant \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor > \frac{n}{2} - 1$ donc $n < 2p+2$, c'est-à-dire $n \leqslant 2p+1$. Par contraposée, si $n > 2p+1$, $\mathcal{F}_n^p = \emptyset$ donc $F_n^p = 0$.
- Si $2 \leqslant n \leqslant 2p+1$, on va partitionner $\mathcal{F}_n^p$ en $\mathcal{F}_n^{p,1} = \{A \in \mathcal{F}_n^p \mid n \in A\}$ et $\mathcal{F}_n^{p,2} = \{A \in \mathcal{F}_n^p \mid n \notin A\}$ de sorte que $\mathcal{F}_n^p = \mathcal{F}_n^{p,1} \sqcup \mathcal{F}_n^{p,2}$ donc, en notant $F_n^{p,1} = \text{card}\,(\mathcal{F}_n^{p,1})$ et $F_n^{p,2} = \text{card}\,(\mathcal{F}_n^{p,2})$, on a $F_n^p = F_n^{p,1} + F_n^{p,2}$.

$\mathcal{F}_n^{p,1}$: si $A \in \mathcal{F}_n^{p,1}$, alors $A' = A \setminus \{n\}$ est de cardinal $p-1$, inclus dans $[\![1;n-1]\!]$ et A' vérifie la propriété (C) puisque A le fait. On vient donc de construire $\varphi_1 : \mathcal{F}_n^{p,1} \to \mathcal{F}_{n-1}^{p-1}$ qui vérifie $\varphi_1(A) = A'$. Il est clair que φ_1 est bijective et que $\varphi_1^{-1}(A') = A' \cup \{n\}$. Ainsi, $\text{card}\,(\mathcal{F}_n^{p,1}) = \text{card}\,(\mathcal{F}_{n-1}^{p-1}) = F_{n-1}^{p-1}$.

$\mathcal{F}_n^{p,2}$: si $A \in \mathcal{F}_n^{p,2}$, alors $n \notin A$ donc $n-1 \in A$ car A vérifie la propriété (C) donc $A'' = A \setminus \{n-1\}$ est de cardinal $p-1$, inclus dans $[\![1;n-2]\!]$ et A'' vérifie la propriété (C) puisque A le fait. On vient donc de construire $\varphi_2 : \mathcal{F}_n^{p,2} \to \mathcal{F}_{n-2}^{p-1}$ qui vérifie $\varphi_1(A) = A''$. Il est clair que φ_2 est bijective et que $\varphi_2^{-1}(A'') = A'' \cup \{n-1\}$. Ainsi, $\text{card}\,(\mathcal{F}_n^{p,2}) = \text{card}\,(\mathcal{F}_{n-2}^{p-1}) = F_{n-2}^{p-1}$.

Par conséquent, $F_n^p = F_{n-1}^{p-1} + F_{n-2}^{p-1}$ (1).

Les trois cas particuliers nous permettent de conjecturer que $\forall n \geqslant 2,\ \forall p \in [\![0;n]\!],\ F_n^p = \binom{p+1}{n-p}$ car par exemple $F_3^1 = 1 = \binom{2}{2}$, $F_4^3 = 4 = \binom{4}{1}$ et $F_5^3 = 6 = \binom{4}{2}$.

Initialisation : on a bien $\forall n \in [\![2;5]\!],\ \forall p \in [\![0;n]\!],\ F_n^p = \binom{p+1}{n-p}$, il suffit de regarder les 18 valeurs.

Hérédité : soit $n \geqslant 6$ tel que $\forall m \in [\![2;n-1]\!],\ \forall p \in [\![0;m]\!],\ F_m^p = \binom{p+1}{m-p}$, alors d'après la relation (1), pour tout entier $p \in [\![0;n]\!]$, on a $F_n^p = F_{n-1}^{p-1} + F_{n-2}^{p-1} = \binom{p}{n-p} + \binom{p}{n-p-1}$ car $n-1 \geqslant 2$ et $n-2 \geqslant 2$ donc, avec la formule de PASCAL, on a $F_n^p = \binom{p+1}{n-p}$ comme attendu.

Conclusion : par principe de récurrence forte (à deux pas en fait), $\forall n \geqslant 2,\ \forall p \in [\![0;n]\!],\ F_n^p = \binom{p+1}{n-p}$.

19 **a.** On calcule $AM = \begin{pmatrix} m_{2,1} & \cdots & \cdots & m_{2,n+1} \\ \vdots & & & \vdots \\ m_{n+1,1} & \cdots & \cdots & m_{n+1,n+1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ et $MA = \begin{pmatrix} 0 & m_{1,1} & \cdots & m_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & m_{n+1,1} & \cdots & m_{n+1,n} \end{pmatrix}$ pour une matrice $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n+1} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$. Ainsi, pour $M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$, on a $AM = MA$ si et seulement si $m_{2,1} \cdots = m_{n+1,1} = m_{n+1,1} = \cdots = m_{n+1,n} = 0$ et $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![2;n+1]\!],\ m_{i+1,j} = m_{i,j-1}$. Par conséquent, les matrices $M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telles que $AM = MA$ sont exactement celles de la forme $M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \cdots & \cdots & m_{1,n+1} \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & m_{1,2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & m_{1,1} \end{pmatrix} = \sum\limits_{k=1}^{n+1} m_{1,k} \Big(\sum\limits_{i=1}^{n+2-k} E_{i,i+k-1} \Big)$. On en déduit que le commutant de A, c'est-à-dire $C(A) = \{M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})\ \ AM = MA\}$ vérifie $C(A) = \mathrm{Vect}\Big(\sum\limits_{i=1}^{n+1} E_{i,i}, \cdots, E_{1,n+1} \Big)$ et, puisque la famille $\Big(\sum\limits_{i=1}^{n+1} E_{i,i}, \cdots, E_{1,n+1} \Big)$ est clairement libre, on a $\dim(C(A)) = n+1$.

b. Analyse : soit $F \neq \{0\}$ un sous-espace de $\mathbb{R}_n[X]$ stable par D, notons $p = \dim(F)$ sa dimension. Comme $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ P^{(n+1)} = 0$, on a $D^{n+1} = 0$ donc D est nilpotent. A fortiori, D_F, l'endomorphisme induit par D dans F, est aussi nilpotent. Notons $r \geqslant 1$ l'indice de nilpotence de D_F, de sorte que $D_F^r = 0$ et $D_F^{r-1} \neq 0$. Prenons $P \in F$ tel que $D_F^{r-1}(P) \neq 0$, alors on montre classiquement que la famille $(P, D_F(P), \cdots, D^{r-1}(P))$ est libre dans F par stabilité de F par D. Par conséquent, le cardinal de cette famille est inférieur à la dimension de F, donc $r \leqslant p$. On a donc $D_F^p = 0$, c'est-à-dire que $\forall P \in F,\ D_F^p(P) = D^p(P) = P^{(p)} = 0$ donc $P \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$. Comme $F \subset \mathbb{R}_{p-1}[X]$ alors que $\dim(F) = \dim(\mathbb{R}_{p-1}[X]) = p$, on a $F = \mathbb{R}_{p-1}[X]$.

Synthèse : tous les sous-espaces $\{0\}$ et $\mathbb{R}_{p-1}[X]$ de $\mathbb{R}_n[X]$ pour $p \in [\![1;n+1]\!]$ sont stables par dérivation.

En conclusion, les sous-espaces stables de $\mathbb{R}_n[X]$ stables par D sont $\{0\}$ et tous les sous-espaces $\mathbb{R}_m[X]$ avec $m \in [\![0;n]\!]$: il y a donc $n+2$ tels sous-espaces.

c. Posons $\mathcal{B} = \left(1, X, \dfrac{X^2}{2}, \cdots, \dfrac{X^n}{n!}\right)$, cette famille est formée de polynômes de degrés échelonnés donc elle est libre. De plus, son cardinal est égal à la dimension $n+1$ de $\mathbb{R}_n[X]$ donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. On a

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(D) = A$ car $\forall k \in [\![0;n-1]\!]$, $\left(\dfrac{X^{k+1}}{(k+1)!}\right)' = \dfrac{X^k}{k!}$. Pour $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$, si on note $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, on a $D \circ f = f \circ D \iff AM = MA$. Ceci justifie que $\varphi : C(D) \to C(A)$ définie par $\varphi(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est bien définie et que c'est un isomorphisme car elle est clairement linéaire, sa surjectivité découlant de l'équivalence $D \circ f = f \circ D \iff AM = MA$. Par conséquent, les commutants de l'endomorphisme D et de la matrice A étant isomorphismes, ils ont même dimension donc, d'après la question **a.**, on $\dim(C(D)) = n+1$.

20 **a.** Soit $n = \dim(E)$ et A un sous-espace vectoriel de $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$. Comme on sait que $\dim(E^*) = \dim(E) = n$, A est aussi de dimension finie, notons $p = \dim(A) \leqslant n = \dim(E^*)$. Soit $(\ell_1, \cdots, \ell_p)$ une base de A et $\psi : E \to \mathbb{R}^p$ définie par $\forall x \in E$, $\psi(x) = (\ell_1(x), \cdots, \ell_p(x))$. L'application ψ est clairement linéaire. Soit $x \in \mathrm{Ker}(\psi)$, alors $\forall k \in [\![1;p]\!]$, $\ell_k(x) = 0$. Soit $\ell \in A$, il existe alors $(\alpha_1, \cdots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $\ell = \sum\limits_{k=1}^{p} \alpha_k \ell_k$, ce qui montre que $\ell(x) = \sum\limits_{k=1}^{p} \alpha_k \ell_k(x) = 0$ donc $x \in \bigcap\limits_{\ell \in A} \mathrm{Ker}(\ell) = \{0_E\}$ donc $x = 0_E$. Ainsi, ψ est injective ce qui montre que $\dim(E) = n \leqslant p = \dim(\mathbb{R}^p)$.

On a donc $p = n$ donc, comme $\dim(A) = \dim(E^*)$ et $A \subset E^*$, on a comme attendu $A = E^*$.

b. Posons $E = \mathrm{Vect}(f_1, \cdots, f_n)$ de sorte que E est un sous-espace de dimension finie de $F = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Par définition, on a $\dim(E) = \mathrm{rang}\,(f_1, \cdots, f_n)$.

($\Longrightarrow$) Supposons $(f_1, \cdots, f_n)$ libre, alors $\dim(E) = n$. Soit $A = \mathrm{Vect}(\{\varphi_x \mid x \in \mathbb{R}\})$ le sous-espace de E^* engendré par les formes linéaires $\varphi_x : E \to \mathbb{R}$ définies par $\varphi_x(f) = f(x)$. Si $f \in E$ vérifie $f \in \bigcap\limits_{\ell \in A} \mathrm{Ker}(\ell)$, alors en particulier on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi_x(f) = f(x) = 0$ donc $f = 0$. Ainsi, $\bigcap\limits_{\ell \in A} \mathrm{Ker}(\ell) = \{0_E\}$ d'où $A = E^*$ d'après la question **a.**. Comme $\dim(E) = n$, on a aussi $\dim(E^*) = n$. Soit $\mathcal{B} = (\psi_1, \cdots, \psi_n)$ une base de E^*. Par définition, les ψ_k sont des combinaisons linéaires d'un nombre fini de φ_x et, comme il y a un nombre fini de ψ_k, on peut énumérer $\varphi_{y_1}, \cdots, \varphi_{y_p}$ toutes les formes linéaires dont se composent les formes linéaires de la base $\mathcal{B}$. Comme la famille $(\varphi_{y_1}, \cdots, \varphi_{y_p})$ engendre $\mathcal{B}$ qui elle-même engendre E^*, alors $\mathcal{F} = (\varphi_{y_1}, \cdots, \varphi_{y_p})$ est génératrice de E^*. Par le théorème de la base extraite, on peut extraire de $\mathcal{F}$ une famille $\mathcal{B}' = (\varphi_{x_1}, \cdots, \varphi_{x_n})$ qui est une base de E^* (de cardinal n car $\dim(E^*) = n$) avec $\{x_1, \cdots, x_n\} \subset \{y_1, \cdots, y_p\}$.

Considérons $\theta : E \to \mathbb{R}^n$ définie par $\theta(f) = (f(x_1), \cdots, f(x_n))$ de sorte que θ est clairement linéaire. Si $f \in \mathrm{Ker}(\theta)$, on a $f(x_1) = \cdots = f(x_n)$ donc $\varphi_{x_1}(f) = \cdots = \varphi_{x_n}(f) = 0$. Soit $\ell \in E^*$ qu'on écrit $\ell = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \varphi_{x_k}$, on a donc $\ell(f) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \varphi_{x_k}(f) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k) = 0$ donc $f \in \mathrm{Ker}(\ell)$. Par conséquent, $f \in \bigcap\limits_{\ell \in A} \mathrm{Ker}(\ell)$ donc $f = 0_E$ ce qui montre que $\mathrm{Ker}(\theta) = \{0_E\}$ donc que θ est injective. Mais comme $\dim(E) = \dim(\mathbb{R}^n) = n$, ceci montre que θ est un isomorphisme de E dans $\mathbb{R}^n$. Comme $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\theta) = \big(f_i(x_j)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ en notant $\mathcal{B}_0 = (f_1, \cdots, f_n)$ la base de E, la matrice A est inversible.

($\Longleftarrow$) Soit $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ telle que $A = \big(f_i(x_j)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible. Soit $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f_i = 0$. En appliquant ceci en les x_j, on a donc $\forall j \in [\![1;n]\!]$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x_j) = 0$ ce qui, en définissant $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ par $Y^T = (\lambda_1 \ \cdots \ \lambda_n)$, se traduit par $AY = 0$. Comme A est inversible, on a donc $Y = 0$ donc $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = (0, \cdots, 0)$ et $(f_1, \cdots, f_n)$ est libre.

Par double implication, on a bien montré que $(f_1, \cdots, f_n)$ est libre si et seulement s'il existe une famille $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ telle que la matrice $\big(f_i(x_j)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible.

21 **a.** Soit $x \in E$, comme $\mathrm{id}_E = p + q$, on a $x = p(x) + q(x) \in \mathrm{Im}\,(p) + \mathrm{Im}\,(q)$ donc on a déjà $E = \mathrm{Im}\,(p) + \mathrm{Im}\,(q)$. D'après la formule de GRASSMANN, on a $\dim(E) = \dim(\mathrm{Im}\,(p)) + \dim(\mathrm{Im}\,(q)) - \dim(\mathrm{Im}\,(p) \cap \mathrm{Im}\,(q)) \quad (1)$ donc, comme $\dim(\mathrm{Im}\,(p) \cap \mathrm{Im}\,(q)) \geqslant 0$, on en déduit que $\dim(E) \leqslant \mathrm{rang}\,(p) + \mathrm{rang}\,(q)$. Or on a l'hypothèse $\mathrm{rang}\,(p) + \mathrm{rang}\,(q) \leqslant \dim(E)$ ainsi on a $\mathrm{rang}\,(p) + \mathrm{rang}\,(q) = \dim(E)$ par double inégalité donc, avec (1), on a $\dim(\mathrm{Im}\,(p) \cap \mathrm{Im}\,(q)) = 0$ qui montre que $\mathrm{Im}\,(p) \cap \mathrm{Im}\,(q) = \{0_E\}$. Par conséquent, $E = \mathrm{Im}\,(p) \oplus \mathrm{Im}\,(q)$.

b. Méthode 1 : soit $x \in E$, en écrivant $x = p(x) + q(x)$ avec $p(x) = y \in \mathrm{Im}\,(p)$ et $q(x) = z \in \mathrm{Im}\,(q)$. Par construction, $p(x) = y$ donc p est la projection sur $\mathrm{Im}\,(p)$ parallèlement à $\mathrm{Im}\,(q)$. Par symétrie, $q(x) = z$ donc q est la projection sur $\mathrm{Im}\,(q)$ parallèlement à $\mathrm{Im}\,(p)$.

Méthode 2 : $q = \mathrm{id}_E - p$ donc $\mathrm{Ker}(q) = \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_E - p) \subset \mathrm{Im}\,(p)$ car $\forall x \in \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_E - p),\ x = p(x) \in \mathrm{Im}\,(p)$. Avec la formule du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(q)) = \dim(E) - \mathrm{rang}\,(q) = \mathrm{rang}\,(p) = \dim(\mathrm{Im}\,(p))$ avec la question **a.** donc, par inclusion et égalité des dimensions, $\mathrm{Ker}(q) = \mathrm{Im}\,(p)$. Ainsi, $p^2 = p \circ p = p \circ (\mathrm{id}_E - q) = p - p \circ q) = p$ donc p est un projecteur. Par symétrie, q est un projecteur.

22 **a.** Comme $f^{n-1} \neq 0$, il existe $a \in E$ tel que $f^{n-1}(a) \neq 0_E$. Considérons la famille $\mathcal{B} = (a, f(a), \cdots, f^{n-1}(a))$. Soit $(\lambda_0, \cdots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\lambda_0 a + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(a) = 0_E$ (1). Supposons que $(\lambda_0, \cdots, \lambda_{n-1}) \neq (0, \cdots, 0)$. Il existe alors $k \in [\![0; n-1]\!]$ tel que $\lambda_k \neq 0$ et on peut poser $m = \mathrm{Min}\,\big(\{i \in [\![0; n-1]\!] \mid \lambda_i \neq 0\}\big) \in [\![0; n-1]\!]$. L'équation (1) s'écrit donc $\lambda_m f^m(a) + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(a) = 0_E$ (1) qu'on compose par f^{n-m-1} et, comme $f^n = \cdots = f^{2n-m-2} = 0$, pour qu'il ne reste que $\lambda_m f^{n-1}(a) = 0_E$. Mais ceci est impossible car $f^{n-1}(a) \neq 0_E$ et $\lambda_m \neq 0$. On conclut ce raisonnement par l'absurde, et $(\lambda_0, \cdots, \lambda_{n-1}) = (0, \cdots, 0)$, donc la famille $\mathcal{B}$ est libre. Comme $\mathcal{B}$ comporte n vecteur et que $\dim(E) = n$, on en conclut que $\mathcal{B}$ est une base de E.

b. Comme $f(f^{n-1}(a)) = f^n(a) = 0_E$, on a $f^{n-1}(a) \in \mathrm{Ker}(f)$ donc $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0_E\}$ ce qui garantit que f n'est pas injective donc pas bijective.

c. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à M. Alors $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$ donc, d'après **a.**, il existe un vecteur $a \in \mathbb{R}^3$ tel que $\mathcal{B} = (a, f(a), f^2(a))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Soit P la matrice de passage entre la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et la base $\mathcal{B}$, alors $M = PTP^{-1}$ en notant $T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. Or, comme $f(f^2(a)) = f^3(a) = 0_{\mathbb{R}^3}$, on a $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc M est semblable à T.

d. Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, posons alors $B = P^{-1}BP$ de sorte que $A = PBP^{-1}$, alors on a l'équivalence $AM = MA \iff PBP^{-1}PTP^{-1} = PTP^{-1}PBP^{-1} \iff BT = TB$. En écrivant B avec ses coefficients, c'est-à-dire en posant $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant 3}$, on calcule aisément $BT = \begin{pmatrix} b_{1,2} & b_{1,3} & 0 \\ b_{2,2} & b_{2,3} & 0 \\ b_{3,2} & b_{3,3} & 0 \end{pmatrix}$ et $TB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \end{pmatrix}$, ce qui donne $BT = TB \iff (b_{1,2} = b_{1,3} = b_{2,3} = 0$ et $b_{1,1} = b_{2,2} = b_{3,3}$ et $b_{2,1} = b_{3,2})$.

Ainsi, les matrices A qui commutent avec M sont exactement les matrices $A = P \begin{pmatrix} b_{1,1} & 0 & 0 \\ b_{2,1} & b_{1,1} & 0 \\ b_{3,1} & b_{2,1} & b_{1,1} \end{pmatrix}$, c'est-à-dire les matrices de la forme $A = \mathbb{P}(b_{1,1}I_3 + b_{2,1}T + b_{3,1}T^2)P^{-1} = b_{1,1}I_3 + b_{2,1}M + b_{3,1}M^2 = Q(M)$ avec $Q = b_{1,1} + b_{2,1}X + b_{3,1}X^2 \in \mathbb{R}_2[X]$. Réciproquement, tout polynôme en M commute avec M d'après le cours. On vient de montrer que le commutant $C(M)$ de M est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (c'est classique, c'est même une sous-algèbre de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$) et que $C(M) = \mathrm{Vect}(I_3, M, M^2)$ est de dimension 3.

ORAUX 2024 THÈME 3
SÉRIES NUMÉRIQUES, SÉRIES DE FONCTIONS ET SÉRIES ENTIÈRES

23 **a.** Avec ces hypothèses, pour $n \geqslant N$, $u_n v_n - v_{n+1}u_{n+1} \geqslant c u_n > 0$ donc la suite $(u_n v_n)_{n\geqslant N}$ est décroissante donc $\forall n \geqslant N$, $u_n v_n \leqslant u_N v_N$ donc $u_n \leqslant \dfrac{u_N v_N}{v_n}$ d'où $u_n \underset{+\infty}{=} O\Big(\dfrac{1}{v_n}\Big)$. Comme $\sum\limits_{n\geqslant N} \dfrac{1}{v_n}$ converge par hypothèse, par comparaison, $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge aussi.

b. Ici, pour $n \geqslant N$, $u_n v_n - v_{n+1}u_{n+1} \leqslant 0$ donc $(u_n v_n)_{n\geqslant N}$ est croissante donc $\forall n \geqslant N$, $u_n v_n \geqslant u_N v_N$ ou $u_n \geqslant \dfrac{u_N v_N}{v_n}$. Comme $\sum\limits_{n\geqslant N} \dfrac{1}{v_n}$ diverge par hypothèse, par minoration, $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge aussi.

c. Prenons ici $v_n = n^{1+\frac{c}{2}}$ pour $n \geqslant 0$, alors $w_n = v_n - \dfrac{v_{n+1}u_{n+1}}{u_n} \geqslant n^{1+\frac{c}{2}} - (n+1)^{1+\frac{c}{2}}\Big(1 - \dfrac{1+c}{n}\Big) = z_n$ et on écrit $z_n = n^{1+\frac{c}{2}}\Big(1 - \Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)^{1+\frac{c}{2}}\Big(1 - \dfrac{1+c}{n}\Big)\Big)$. Or on sait que $\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)^{1+\frac{c}{2}} \underset{+\infty}{=} 1 + \Big(1+\dfrac{c}{2}\Big)\dfrac{1}{n} + o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$ donc $z_n \underset{+\infty}{=} n^{1+\frac{c}{2}}\Big(1 - \Big(1 + \Big(1+\dfrac{c}{2}\Big)\dfrac{1}{n} + o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)\Big)\Big(1 - \dfrac{1+c}{n}\Big)\Big) \underset{+\infty}{=} n^{1+\frac{c}{2}}\Big(\dfrac{c}{2n} + o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)\Big)$ donc $z_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{c\,n^{\frac{c}{2}}}{2}$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = +\infty$ donc $\exists N \geqslant 0$, $\forall n \geqslant N$, $z_n \geqslant 1$ donc $\forall n \geqslant N$, $w_n \geqslant 1$. D'après la question **a.**, comme la série de Riemann $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{v_n}$ converge car $1 + \dfrac{c}{2} > 1$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

d. Prenons ici $v_n = n - 1 > 0$ pour $n \geqslant 2$ alors, par hypothèse, on a $\forall n \geqslant N$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1 - \dfrac{1}{n}$ donc $w_n = v_n - \dfrac{v_{n+1}u_{n+1}}{u_n} = (n-1) - n\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant n\Big[\dfrac{n-1}{n} - \dfrac{u_{n+1}}{u_n}\Big] = n\Big[1 - \dfrac{1}{n} - \dfrac{u_{n+1}}{u_n}\Big] \leqslant 0$ dont on déduit, d'après la question **b.**, que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge.

e. .

f. .

24 **a.** <u>Initialisation</u> : pour $n = 0$, $\forall x \in I$, $f^{(0)}(x) = f(x) = \dfrac{P_0(\sin(x))}{\cos^{0+1}(x)}$ en prenant $P_0 = X + 1$ qui est bien à coefficients dans $\mathbb{N}$ par définition de la fonction f.
Pour $n = 1$, en dérivant, on a $f'(x) = \dfrac{\cos^2(x) + (\sin(x)+1)\sin(x)}{\cos^2(x)} = \dfrac{\sin(x)+1}{\cos^2(x)}$ donc $f^{(1)}(x) = \dfrac{P_1(\sin(x))}{\cos^{1+1}(x)}$ avec $P_1 = X + 1$ à coefficients dans $\mathbb{N}$ et de degré $n = 1$ et unitaire.
<u>Hérédité</u> : soit $n \geqslant 1$ tel que $\forall x \in I$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(\sin(x))}{\cos^{n+1}(x)}$ avec $P_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{N}[X]$ de degré n avec $a_n = 1$. On dérive une fois de plus, toutes les fonctions étant de classe C^∞ sur I, et on obtient la relation $\forall x \in I$, $f^{(n+1)}(x) = \dfrac{\cos(x)P_n'(\sin(x))}{\cos^{n+1}(x)} + (n+1)\dfrac{\sin(x)P_n(\sin(x))}{\cos^{n+2}(x)}$ donc, après réduction au même dénominateur, $f^{(n+1)}(x) = \dfrac{\cos^2(x)P_n'(\sin(x)) + (n+1)\sin(x)P_n(\sin(x))}{\cos^{n+2}(x)} = \dfrac{P_{n+1}(\sin(x))}{\cos^{n+2}(x)}$ si on définit le polynôme $P_{n+1} = (1-X^2)P_n' + (n+1)XP_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} - \sum\limits_{k=0}^{n} k a_k X^{k+1} + (n+1)\sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^{k+1}$ qui s'arrange en $P_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n-1}(k+1)a_{k+1}X^k - \sum\limits_{k=1}^{n+1}(k-1)a_{k-1}X^k + (n+1)\sum\limits_{k=1}^{n+1} a_{k-1}X^k$, puis, en regroupant les termes, en

$P_{n+1} = a_n X^{n+1} + 2a_{n-1}X^n + \Big(\sum_{k=1}^{n-1}[(k+1)a_{k+1} + (n+2-k)a_{k-1}]X^k\Big) + a_1 \in \mathbb{N}[X]$ qui est bien unitaire, de degré $n+1$ et à coefficients dans $\mathbb{N}$.

<u>Conclusion</u> : par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists P_n \in \mathbb{N}[X],\ \forall x \in I,\ f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(\sin(x))}{\cos^{n+1}(x)}$. De plus, s'il existait, pour $n \in \mathbb{N}$, un autre polynôme $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in I,\ f^{(n)}(x) = \dfrac{Q_n(\sin(x))}{\cos^{n+1}(x)} = \dfrac{P_n(\sin(x))}{\cos^{n+1}(x)}$, on aurait $\forall x \in I,\ P_n(\sin(x)) = Q_n(\sin(x))$ donc $P_n = Q_n$ car P_n et Q_n coïncident sur $]-1;1[$ qui est infini. Ainsi, la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est unique et vérifie $P_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1} = (1-X^2)P'_n + (n+1)XP_n$ et on a montré lors de la récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P_n$ est de degré n et unitaire.

b. Soit $x \in J = \Big[0;\dfrac{\pi}{2}\Big[$, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(0)x^k}{k!} + \dfrac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$ par la formule de TAYLOR reste intégral. Or $\forall t \in [0;x] \subset J$, on a $(x-t)^n f^{(n+1)}(t) = (x-t)^n \dfrac{P_{n+1}(\sin(t))}{\cos^{n+2}(t)} \geqslant 0$ car $x - t \geqslant 0$, $\sin(t) \geqslant 0$ donc $P_{n+1}(\sin(t)) \geqslant 0$ car $P_n \in \mathbb{N}[X]$ et $\cos(t) > 0$. Ainsi, $\dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt \geqslant 0$ donc $0 \leqslant S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(0)x^k}{k!} \leqslant f(x)$ ce qui montre que les sommes partielles de la série de TAYLOR de f en x sont majorées. Comme il s'agit d'une série à termes positifs, cette série converge d'après le cours. Ceci montre que le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\dfrac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}$ vérifie $R \geqslant \dfrac{\pi}{2}$. D'après le cours toujours, la série de TAYLOR de f converge donc sur l'intervalle ouverte de convergence $]R;R[$ qui contient I.

c. Soit $g : I \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in I,\ g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}$, g est bien définie d'après la question précédente. La fonction f est dérivable sur I et $f'(x) = \dfrac{\sin(x)+1}{\cos^2(x)} = \dfrac{(\sin(x)+1)^2 + \cos^2(x)}{2\cos^2(x)} = \dfrac{f(x)^2+1}{2}$ donc on obtient $\forall x \in I,\ 2f'(x) = f(x)^2 + 1$. Par la formule de LEIBNIZ, en écrivant $(2f'(x))^{(n)} = (f(x)^2+1)^{(n)}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a la relation $2f^{(n+1)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(x)f^{(n-k)}(x)$. En particulier en prenant $x = 0$, on a la relation $2f^{(n+1)}(0) = 2P_{n+1}(0) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(0)f^{(n-k)}(0) = \sum_{k=0}^{n}\dfrac{n!}{k!(n-k)!}P_k(0)P_{n-k}(0)$ donc $2\alpha_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\dfrac{\alpha_k\alpha_{n-k}}{n+1}$ en posant $\alpha_k = \dfrac{P_k(0)}{k!}$ si $n \geqslant 1$. On a aussi $2f'(0) = f(0)^2 + 1$ donc $2\alpha_1 = \alpha_0^2 + 1$.

Mais on a $\forall x \in I,\ g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_n x^n$ et, par produit de CAUCHY, $\forall x \in I,\ g(x)^2 = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\alpha_{n-k}\Big)x^n$ d'où $g(x)^2 = \alpha_0^2 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)\Big(\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\alpha_{n-k}\Big)x^n = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)\alpha_{n+1}x^n = -1 + 2\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\alpha_{n+1}x^n$ donc $g(x)^2 = -1 + 2g'(x)$. Les deux fonctions f et g sont donc solutions sur I de l'équation différentielle non linéaire $2y' = y^2 + 1$. Comme on n'a pas au programme de théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ non linéaire, on va poser les fonctions $a = \mathrm{Arctan} \circ f$ et $b = \mathrm{Arctan} \circ g$ qui sont dérivables sur I comme composées de fonctions dérivables. $\forall x \in I,\ a'(x) = \dfrac{f'(x)}{1+f(x)^2} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{g'(x)}{1+g(x)^2} = b'(x)$ donc, comme I est un intervalle, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in I,\ a(x) = b(x) + C$. Or $a(0) = b(0) = \mathrm{Arctan}(\alpha_0) = \dfrac{\pi}{4}$ donc $C = 0$. Ainsi, $\forall x \in I,\ f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}$ ce qui justifie que f est développable en série entière sur I.

De plus, si on avait $R > \dfrac{\pi}{2}$, alors $f = g$ serait de classe C^∞ sur $\Big[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\Big] \subset]-R;R[$ donc, en particulier, f

serait continue en $\frac{\pi}{2}$ alors que $\lim\limits_{x\to\pi/2^-} f(x) = +\infty$. Ainsi, le rayon R de la série de TAYLOR de f vaut $R = \frac{\pi}{2}$.

Questions de cours :

- D'après le cours, on sait que $\forall x \in]-1;1[,\ \mathrm{Arctan}(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$.
- Pour une fonction $f : I \mapsto \mathbb{C}$ de classe C^{n+1} sur l'intervalle I, pour tout $(a,b) \in I^2$, on a la formule de TAYLOR reste intégral suivante, $f(b) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(b-a)^k}{k!} + \int_a^b \frac{(b-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n!}\mathrm{d}t$.
- Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et $g : t \mapsto f\big(\cos(t), \mathrm{Arctan}(t), 2^t\big)$. D'après la règle de la chaîne, comme $t \mapsto \cos(t)$, $t \mapsto \mathrm{Arctan}(t)$ et $t \mapsto 2^t$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, g l'est aussi et

$$\begin{aligned} g'(t) &= -\sin(t)\frac{\partial f}{\partial x}\big(\cos(t), \mathrm{Arctan}(t), 2^t\big) \\ &\quad + \frac{1}{1+t^2}\frac{\partial f}{\partial y}\big(\cos(t), \mathrm{Arctan}(t), 2^t\big) + \ln(2)2^t\frac{\partial f}{\partial z}\big(\cos(t), \mathrm{Arctan}(t), 2^t\big). \end{aligned}$$

- Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I et $(a,b) \in I^2$, alors $\forall y \in [\widetilde{f(a); f(b)}]$, il existe un réel $c \in [\widetilde{a;b}]$ tel que $f(c) = y$.

25 **a.** On suppose qu'il existe deux réels $A \neq 0$ et $r \neq 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ g_n = Ar^n$. Pour que $\frac{1}{\sqrt{g_n}}$ soit défini pour tout entier n, il est nécessaire et suffisant que $A > 0$ et $r > 0$. Alors $g_{n+1} - g_n = Ar^n(r-1)$ et $\frac{1}{\sqrt{g_n}} = \frac{1}{\sqrt{A}}r^{-\frac{n}{2}}$. On traite deux cas :

- Si $r = 1$, on a $g_{n+1} - g_n = 0$ alors que $\frac{1}{\sqrt{g_n}} = \frac{1}{\sqrt{A}} \neq 0$.
- Si $r \neq 1$, $Ar^n(r-1) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{A}}r^{-\frac{n}{2}}$ équivaut à $A^{3/2}r^{3n/2}(r-1) \underset{+\infty}{\sim} 1$ ou encore $(Ar^n)^{3/2} = \frac{1}{r-1} > 0$.

Or $(Ar^n)_{n\geqslant 0}$ ne peut pas converger vers un réel strictement positif sans que r soit égal à 1.

Il n'existe donc aucune suite géométrique $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $g_{n+1} - g_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{g_n}}$.

b. Soit $(A,\alpha) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et $v_n = An^\alpha > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $\frac{1}{\sqrt{v_n}} = \frac{1}{\sqrt{An^\alpha}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{A}}n^{\frac{-\alpha}{2}}$ et on a aussi $v_{n+1} - v_n = A(n+1)^\alpha - An^\alpha = An^\alpha\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha - 1\right) \underset{+\infty}{=} An^\alpha\left(1 + \frac{\alpha}{n} - 1 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{+\infty}{=} A\alpha n^{\alpha-1} + o\left(n^{\alpha-1}\right)$ donc $v_{n+1} - v_n \underset{+\infty}{\sim} A\alpha n^{\alpha-1}$. Ainsi, $v_{n+1} - v_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{v_n}} \iff A\alpha n^{\alpha-1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{A}}n^{\frac{-\alpha}{2}} \underset{+\infty}{\sim} n^{\frac{3\alpha}{2}-1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{A^{3/2}\alpha}$ ce qui impose $A^{3/2}\alpha = 1$ et $\frac{3\alpha}{2} - 1 = 0$. Il existe donc un unique couple $(A,\alpha) = \left(\left(\frac{3}{2}\right)^{2/3}, \frac{2}{3}\right) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tel qu'en posant $v_n = An^\alpha$, on ait $v_{n+1} - v_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{v_n}}$.

c. La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est bien définie car $u_0 > 0$ et, si $u_n > 0$ pour un entier $n \in \mathbb{N}$, alors $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{\sqrt{u_n}} > 0$ donc, par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$ est bien défini.

La relation $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{\sqrt{u_n}}$ (1) montre que $u_{n+1} > u_n$ la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante. De plus, si elle était majorée, elle convergerait vers un réel $\ell > u_0 = 1$ d'après le théorème de la limite monotone et, en passant à la limite dans (1), on a $\ell = \ell + \frac{1}{\sqrt{\ell}}$ qui est absurde. Par conséquent, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante non majorée donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ toujours d'après le théorème de la limite monotone.

Comme $\beta > 0$ et que $t \mapsto t^\beta$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, l'inégalité $u_{n+1} > u_n$ implique $u_{n+1}^\beta > u_n^\beta$ donc $p_n = \left(\frac{1}{u_n}\right)^\beta - \left(\frac{1}{u_{n+1}}\right)^\beta$ est bien défini et $p_n > 0$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n^\beta} = 0$, la suite $\left(\frac{1}{u_n^\beta}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc, par dualité suite-série, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} p_n$ converge et on sait qu'alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n = \frac{1}{u_0^\beta} - \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n^\beta} = 1$.

d. Initialisation : comme $u_1 = u_0 + \dfrac{1}{\sqrt{u_0}} = 1 + 1 = 2$, on a bien $1 \leqslant u_1 = 2 \leqslant 2.1 = 2$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sqrt{n} \leqslant u_n \leqslant 2n$, alors $\sqrt{n} + \dfrac{1}{\sqrt{2n}} \leqslant u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{\sqrt{u_n}} \leqslant 2n + \dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{n}}}$.

Or on a $\sqrt{n} + \dfrac{1}{\sqrt{2n}} \geqslant \sqrt{n+1} \iff n + \sqrt{2} + \dfrac{1}{2n} \geqslant n+1 \iff \sqrt{2} + \dfrac{1}{2n} \geqslant 1$ est vrai en élevant au carré. De plus, $2n + \dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{n}}} \leqslant 2(n+1) \iff \dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{n}}} \leqslant 2$ est clairement vrai pour $n \geqslant 1$. On a donc $\sqrt{n+1} \leqslant \sqrt{n} + \dfrac{1}{\sqrt{2n}} \leqslant u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{\sqrt{u_n}} \leqslant 2n + \dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{n}}} \leqslant 2n+2$ et, par transitivité, $\sqrt{n+1} \leqslant u_{n+1} \leqslant 2n+2$.

Conclusion : par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{n} \leqslant u_n \leqslant 2n$.

Pour aller plus loin, si on cherche un équivalent de u_n, on emploie une méthode classique mais maintenant hors programme. On cherche $m \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1}^m - u_n^m) = \lambda \neq 0 \in \mathbb{R}$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, on a $u_{n+1}^m - u_n^m = \left(u_n + \dfrac{1}{\sqrt{u_n}}\right)^m - u_n^m = u_n^m\left[\left(1 + \dfrac{1}{u_n^{3/2}}\right)^m - 1\right] \underset{+\infty}{\sim} u_n^m\left(1 + \dfrac{m}{u_n^{3/2}} - 1 + o\left(\dfrac{1}{u_n^{3/2}}\right)\right)$ ce qui montre que $u_{n+1}^m - u_n^m \underset{+\infty}{=} \dfrac{m}{u_n^{3/2-m}} + o\left(\dfrac{1}{u_n^{3/2-m}}\right)$ donc que $u_{n+1}^m - u_n^m \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{m}{u_n^{3/2-m}}$. Il est donc nécessaire et suffisant de prendre $m = \dfrac{3}{2}$ pour avoir $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1}^m - u_n^m) = \lambda = \dfrac{3}{2} \neq 0$. D'après le théorème de Cesaro (hors programme), et puisque $\dfrac{u_n^m - u_0^m}{n} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}^m - u_k^m)$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n^m - u_0^m}{n} = \dfrac{3}{2}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n^m}{n} = \dfrac{3}{2}$ puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_0^m}{n} = 0$. On a donc $u_n^{m/2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{3n}{2}$ donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} \left(\dfrac{3}{2}\right)^{2/3} n^{\frac{2}{3}} = An^\alpha$ (tiens tiens).

e. Je ne vois pas comment faire avec **d.** sans utiliser l'équivalent qu'on vient d'établir.

26 **a.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est définie sur $\mathbb{R}$. Soit donc $x \in \mathbb{R}$ fixé, on a $|f_n(x)| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ donc il n'y a pas convergence absolue de $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(x)$ par comparaison à la série harmonique. Par contre, en écrivant $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n} \times \dfrac{1}{1 + \frac{|x|}{n^2}}$, on a $f_n(x) \underset{+\infty}{=} \dfrac{(-1)^n}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$. Par le critère des séries alternées, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^n}{n}$ converge car $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et tend vers 0. De plus, comme $f_n(x) - \dfrac{(-1)^n}{n} \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$, par comparaison aux séries de Riemann, $\sum\limits_{n\geqslant 1}\left(f_n(x) - \dfrac{(-1)^n}{n}\right)$ converge car $3 > 1$. Par somme, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge. Ceci montre bien la convergence simple de $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ sur $\mathbb{R}$.

b. Initialisation : $0 \leqslant (-1)^0 \sum\limits_{k=0}^{0}(-1)^k a_k = a_0 \leqslant a_0$.

Hérédité : soit un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que l'on suppose $0 \leqslant (-1)^n \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k a_k \leqslant a_n$. Comme on peut écrire $(-1)^{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n+1}(-1)^k a_k = a_{n+1} - (-1)^n\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$ et que $0 \leqslant (-1)^n\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k a_k \leqslant a_n$, on a l'encadrement $a_{n+1} - a_n \leqslant (-1)^{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n+1}(-1)^k a_k \leqslant a_{n+1} - 0$. Mais comme $a_{n+1} - a_n \geqslant 0$ puisque la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a été supposée croissante, on obtient bien $0 \leqslant (-1)^{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n+1}(-1)^k a_k \leqslant a_{n+1}$.

Conclusion : par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant (-1)^n\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k a_k \leqslant a_n$.

c. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^*$, $|f_k(x)| = \dfrac{k}{k^2 + |x|} = g_x(k)$ avec $g_x : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $g_x(t) = \dfrac{t}{t^2 + |x|}$.

Or g_x est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $g_x'(t) = \dfrac{|x| - t^2}{(t^2+|x|)^2}$ donc g_x est croissante sur $[0;\sqrt{|x|}]$ et décroissante sur $[\sqrt{|x|};+\infty[$. Ainsi, la suite $\big(|f_k(x)|\big)_{k\leqslant \lfloor\sqrt{|x|}\rfloor-1}$ est croissante et la suite $\big(|f_k(x)|\big)_{k\geqslant \lfloor\sqrt{|x|}\rfloor+1}$ est décroissante. Ainsi, l'entier $N(x) = \mathrm{Inf}\,\big(\{n \in \mathbb{N}^* \mid \forall k \geqslant n,\ |f_{k+1}(x)| \leqslant |f_k(x)|\}\big)$ est bien défini par propriété fondamentale des entiers car la partie $\{n \in \mathbb{N}^* \mid \forall k \geqslant n,\ |f_{k+1}(x)| \leqslant |f_k(x)|\}$ est non vide car elle contient $\left\lfloor\sqrt{|x|}\right\rfloor + 1$, incluse dans $\mathbb{N}$ et minorée. De plus, d'après l'étude de g_x, on a $N(x) = \left\lfloor\sqrt{|x|}\right\rfloor + 1$ ou $N(x) = \left\lfloor\sqrt{|x|}\right\rfloor$.

Questions de cours :

- Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ continue. Alors $\forall (a,b) \in I^2,\ \forall y \in [\widetilde{f(a);f(b)}]$, il existe $c \in [\widetilde{a;b}]$ tel que $f(c) = y$: c'est le théorème des valeurs intermédiaires.

27 **a.** Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \cos(n^2x)e^{-n}$.

(H_1) Comme $f_n(x) \underset{+\infty}{=} O(e^{-n})$ pour tout réel x et que la série géométrique $\sum\limits_{n\geqslant 0}(e^{-1})^n$ converge car $e^{-1} \in]-1;1[$, par comparaison, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(x)$ converge absolument. Ainsi, on a convergence simple de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ vers f sur $\mathbb{R}$.

(H_2) f_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_n^{(k)}(x) = n^{2k}\cos\left(n^2x + \dfrac{k\pi}{2}\right)e^{-n}$.

(H_3) Pour $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$, $f_n^{(k)}$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et $||f_n^{(k)}||_{\infty,\mathbb{R}} = n^{2k}e^{-n}$. Or, $\sum\limits_{n\geqslant 0} n^{2k}e^{-n}$ converge car, par croissances comparées, $n^{2k}e^{-n} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Ainsi, on a convergence normale de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n^{(k)}$ sur $\mathbb{R}$.

Par le théorème idoine de dérivation des séries de fonctions, la fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et les relations $\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(k)}(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n^{2k}\cos\left(n^2x + \dfrac{k\pi}{2}\right)e^{-n}$.

b. Soit $p \in \mathbb{N}$, on a vu ci-dessus que $f^{(4p)}(0) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n^{8p}\cos\left(n^2.0 + \dfrac{4p\pi}{2}\right)e^{-n} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n^{8p}e^{-n}$ donc il vient $f(0) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} e^{-n} = \dfrac{1}{1-(1/e)} = \dfrac{e}{e-1} \sim 1,58 > 0$ et $\forall p \in \mathbb{N}^*, f^{(4p)}(0) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^{8p}e^{-n} > 0$.

c. .

d. .

e. .

28 **a.** Les fonctions $f : t \mapsto e^{-t}\cos(t)$ et $g : t \mapsto e^{-t}\sin(t)$ sont continues sur $\mathbb{R}_+$ et $f(t), g(t) \underset{+\infty}{=} O(e^{-t})$ donc f et g sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$, et a fortiori sur $[x;+\infty[$ car $t \mapsto e^{-t}$ l'est : φ et ψ sont bien définies sur $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, il vient $\varphi(x) + i\psi(x) = e^x\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t}e^{it}dt = e^x\left[\dfrac{e^{(-1+i)t}}{-1+i}\right]_x^{+\infty} = e^x\dfrac{e^{(-1+i)x}}{1-i} = \dfrac{e^{ix}}{1-i}$ donc on a $\varphi(x) + i\psi(x) = \dfrac{1+i}{2}e^{ix} = \dfrac{1+i}{2} \times (\cos(x) + i\sin(x)) = \dfrac{\cos(x)-\sin(x)}{2} + i\dfrac{\sin(x)+\cos(x)}{2}$. En identifiant partie réelle et imaginaire, on a $\varphi(x) = \dfrac{\cos(x)-\sin(x)}{2}$ et $\psi(x) = \dfrac{\sin(x)+\cos(x)}{2}$.

b. Les solutions réelles sur $\mathbb{R}\dfrac{1}{u_n}$ de (E_0) : $y' - y = 0$ sont les fonctions $y : x \mapsto \lambda e^x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Par variation de la constante, en écrivant $y : x \mapsto \lambda(x)e^x$ avec $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable, y est solution de (E) si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x)e^x + \lambda(x)e^x - \lambda(x)e^x = -\cos(x) \iff \lambda'(x) = -e^{-x}\cos(x)$ et on prend

$\lambda : x \mapsto -\int_0^x e^{-t}\cos(t)dt$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto -e^x\int_0^x e^{-t}\cos(t)dt$ est solution particulière de (E). Par structure affine de l'ensemble des solutions de (E), celles-ci sont de la forme $y : x \mapsto e^x\Big(\alpha - \int_0^x e^{-t}\cos(t)dt\Big)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\Big(\alpha - \int_0^x e^{-t}\cos(t)dt\Big) = \alpha - \int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(t)dt$, si y est bornée sur $\mathbb{R}$, il est nécessaire que $\alpha - \int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(t)dt = 0$. La seule fonction candidate solution de (E) et bornée sur $\mathbb{R}$ est donc $y_1 : x \mapsto e^x\Big(\int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(t)dt - \int_0^x e^{-t}\cos(t)dt\Big) = e^x\int_x^{+\infty} e^{-t}\cos(t)dt = \varphi(x)$.
Comme $\forall x \in \mathbb{R},\ |\varphi(x)| = \Big|e^x\int_x^{+\infty} e^{-t}\cos(t)dt\Big| = e^x\Big|\int_x^{+\infty} e^{-t}\cos(t)dt\Big| \leqslant e^x\int_x^{+\infty} e^{-t}|\cos(t)|dt$ par inégalité triangulaire, on obtient $|\varphi(x)| \leqslant e^x\int_x^{+\infty} e^{-t}dt = e^x\Big[-e^{-t}\Big]_x^{+\infty} = 1$ donc φ est bien la seule solution de (E) qui soit bornée sur $\mathbb{R}$.

c. <u>Initialisation</u> : d'après **a.**, f_1 est bien définie sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x) = e^x\int_x^{+\infty} e^{-t}(a\cos(t)+b\sin(t))dt$ donc $f_1(x) = a\varphi(x)+b\psi(x) = a\dfrac{\cos(x)-\sin(x)}{2} + b\dfrac{\cos(x)+\sin(x)}{2} = \Big(\dfrac{a+b}{2}\Big)\cos(x) + \Big(\dfrac{b-a}{2}\Big)\sin(x)$.
Si on pose $a_0 = a$, $b_0 = b$, $a_1 = \dfrac{a+b}{2}$ et $b_1 = \dfrac{b-a}{2}$, on a $\forall x \in \mathbb{R},\ f_0(x) = a_0\cos(x)+b_0\sin(x)$ et $f_1(x) = a_1\cos(x)+b_1\sin(x)$.
<u>Hérédité</u> : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = a_n\cos(x)+b_n\sin(x)$, alors, toujours d'après la question **a.**, f_{n+1} est bien définie sur $\mathbb{R}$ et on a $\forall x \in \mathbb{R},\ f_{n+1}(x) = e^x\int_x^{+\infty} e^{-t}(a_n\cos(t)+b_n\sin(t))dt = a_n\varphi(x)+b_n\psi(x)$ ce qui donne $f_{n+1}(x) = a_n\dfrac{\cos(x)-\sin(x)}{2}+b_n\dfrac{\cos(x)+\sin(x)}{2} = \Big(\dfrac{a_n+b_n}{2}\Big)\cos(x)+\Big(\dfrac{b_n-a_n}{2}\Big)\sin(x)$ donc $f_{n+1}(x) = a_{n+1}\cos(x)+b_{n+1}\sin(x)$ en posant $a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = \dfrac{b_n-a_n}{2}$.
<u>Conclusion</u> : par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists (a_n,b_n) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = a_n\cos(x)+b_n\sin(x)$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont définies par $a_0 = a$, $b_0 = b$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = \dfrac{b_n-a_n}{2}$.

29 **a.** Soit $x \in [0;1]$, traitons deux cas :

- Si $x = 0$, alors $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n(x) = 0$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(0)$ converge.
- Si $x \in]0;1]$, comme $\dfrac{1}{1+x} \in]0;1[$, la série géométrique $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{1}{(1+x)^n}$ converge donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(x)$ converge.

On a donc montré la convergence simple de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ sur $[0;1]$.

b. La fonction $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in [0;1],\ f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est bien définie d'après **a.** et on a $f(0) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} 0 = 0$. Si $x \in]0;1]$, $f(x) = x\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\Big(\dfrac{1}{1+x}\Big)^n = x \times \dfrac{1}{1-\frac{1}{1+x}} = 1+x$. Ainsi, f n'est pas continue en 0 car $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1 \neq 0 = f(0)$ alors que toutes les fonctions f_n sont continues sur $[0;1]$. Par la contraposée d'un théorème du cours, on ne peut pas avoir convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ sur $[0;1]$.

Comme $\forall n \in \mathbb{N},\ \lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x) = 0 = \ell_n$ et que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\ell_n = 0 \neq 1 = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, d'après la contraposée du théorème de la double limite, il n'y a pas non plus convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ sur $]0;1]$.

c. Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur le segment $[0;1]$ donc $\int_0^1 f_n(x)dx$ existe.

- Pour les petites valeurs de n, on calcule facilement $\int_0^1 f_0(x)dx = \int_0^1 xdx = \Big[\dfrac{x^2}{2}\Big]_0^1 = \dfrac{1}{2}$, puis

$\displaystyle\int_0^1 f_1(x)dx = \int_0^1 \Big(1-\frac{1}{1+x}\Big)dx = \big[x-\ln(1+x)\big]_0^1 = 1-\ln(2)$ et enfin, pour $n=2$, on arrive à $\displaystyle\int_0^1 f_2(x)dx = \int_0^1 \Big(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}\Big)dx = \Big[\ln(1+x)+\frac{1}{1+x}\Big]_0^1 = \ln(2)-\frac{1}{2}$.

• Pour $n \geqslant 3$, $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \Big(\frac{1+x-1}{(1+x)^n}\Big)dx = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^{n-1}} - \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^n}$ et, classiquement, $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx = \Big[-\frac{1}{(n-2)(1+x)^{n-2}}\Big]_0^1 - \Big[-\frac{1}{(n-1)(1+x)^{n-1}}\Big]_0^1 = \frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}+\frac{2^{1-n}}{n-1}-\frac{2^{2-n}}{n-2}$ qui se factorise en $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{1}{(n-2)(n-1)} - \frac{n2^{1-n}}{(n-2)(n-1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$.

Utilisons le théorème d'intégration terme à terme :

(H_1) La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement vers f sur $[0;1]$.

(H_2) Les fonctions f_n sont intégrables sur $[0;1]$ car elles y sont continues.

(H_3) La fonction f est continue par morceaux sur $[0;1]$ d'après **a.**.

(H_4) La série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 0}\displaystyle\int_0^1 |f_n(x)|dx$ converge par comparaison aux séries de Riemann car f_n est positive donc $|f_n(x)| = f_n(x)$ et, avec les calculs précédents, $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$.

D'après le fameux théorème, f est intégrable sur $[0;1]$ (on le savait déjà) et $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx$ ce qui donne, puisque $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \Big[x+\frac{x^2}{2}\Big]_0^1 = \frac{3}{2}$, la valeur $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{3}{2}$.

On pouvait le calculer par télescopage (dualité suite-série) car $\displaystyle\int_0^1 f_0(x)dx + \int_0^1 f_1(x)dx + \int_0^1 f_2(x)dx = 1$ car $\frac{1}{2}+1-\ln(2)+\ln(2)-\frac{1}{2} = 1$ et $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \sum_{n=3}^{+\infty}\Big(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}-\Big(\frac{2^{2-n}}{n-2}-\frac{2^{1-n}}{n-1}\Big)\Big) = 1-\frac{1}{2}$ car $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n-1} = \lim_{n\to+\infty}\frac{2^{1-n}}{n-1} = 0$.

Ainsi, on a à nouveau $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 f_0(x)dx+\int_0^1 f_1(x)dx+\int_0^1 f_2(x)dx+\sum_{n=3}^{+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

30 **a.** Soit $r>0$ et $p\in\mathbb{N}$, par hypothèse, on a $f(re^{it}) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{int}$ car le rayon de $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ vaut $R=+\infty$. Ainsi, $f\big(re^{it}\big)e^{-ipt} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{int}e^{ipt} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{i(n-p)t} = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(t)dt$ si $g_n : t \mapsto a_n r^n e^{i(n-p)t}$.

On a $||g_n||_{\infty,[0;2\pi]} = |a_n| r^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n r^n$ converge absolument par le lemme d'Abel car $r<R=+\infty$, donc la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} g_n$ converge normalement sur le segment $[0;2\pi]$. Par le théorème d'intégration terme à terme par convergence normale sur segment, $\displaystyle\int_0^{2\pi}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} g_n(t)\Big)dt = \sum_{n=0}^{2\pi}\int_0^{2\pi} g_n(t)dt$. Or on calcule $\displaystyle\int_0^{2\pi} g_n(t)dt = \Big[\frac{a_n r^n e^{i(n-p)t}}{i(n-p)}\Big]_0^{2\pi} = 0$ si $n\neq p$ et $\displaystyle\int_0^{2\pi} g_p(t)dt = 2\pi a_p r^p$.

On en déduit donc que $\forall p\in\mathbb{N}$, $\forall r>0$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} f\big(re^{it}\big)e^{-ipt}dt = 2\pi\, a_p r^p$.

b. Comme f est bornée sur $\mathbb{C}$, posons $M = ||f||_{\infty,\mathbb{C}} = \operatorname*{Sup}\limits_{z\in\mathbb{C}} |f(z)|$ et, par inégalité triangulaire sur les intégrales, $\displaystyle\Big|\int_0^{2\pi} f\big(re^{it}\big)e^{-ipt}dt\Big| \leqslant \int_0^{2\pi}\big|f\big(re^{it}\big)\big|dt \leqslant 2\pi M$. D'après **a.**, $|2\pi a_p r^p| \leqslant 2\pi M$ donc $|a_p| \leqslant \frac{M}{r^p}$. Comme ceci est vrai pour tout $r>0$, en faisant tendre r vers $+\infty$ dans cette inégalité pour $p\in\mathbb{N}^*$, on a

$0 \leqslant |a_p| \leqslant \lim\limits_{r\to+\infty} \dfrac{M}{r^p} = 0$ donc $a_p = 0$. Ainsi, $\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = a_0$ donc f est constante.

Bien sûr, ceci est faux si f n'est que bornée sur $\mathbb{R}$ comme en témoigne la fonction $\cos$ par exemple.

c. Pour un entier $p \geqslant q+1$ et un réel $r > 0$, toujours par inégalité triangulaire sur les intégrales, on obtient $\left|\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-ipt}dt\right| \leqslant \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|dt \leqslant \int_0^{2\pi}(\alpha r^q + \beta)dt \leqslant 2\pi(\alpha r^q + \beta)$. Ainsi, avec la question **a.**, on a $|2\pi\, a_p r^p| \leqslant 2\pi(\alpha r^q + \beta)$ d'où $0 \leqslant |a_p| \leqslant \alpha r^{q-p} + \beta r^{-p}$. Encore une fois, comme $\lim\limits_{r\to+\infty}(\alpha r^{q-p} + \beta r^{-p}) = 0$, en passant à la limite, on a $|a_p| = 0$ si $p > q$. Par conséquent, $\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = \sum\limits_{p=0}^{q} a_p z^p$ donc f est polynomiale.

d. Soit $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $g(z) = f(z)e^{-z}$. Comme f et $\exp$ sont développables en série entière avec un rayon $+\infty$, par produit de Cauchy, la fonction g est elle-même développable en série entière sur $\mathbb{C}$. Pour $z \in \mathbb{C}$, $|g(z)| = |f(z)||e^{-z}| = |f(z)|e^{-\mathrm{Re}\,(z)} \leqslant 1$ donc g est bornée sur $\mathbb{C}$ ce qui, avec la question **b.**, montre que g est constante sur $\mathbb{C}$. Ainsi, il existe $k \in \mathbb{C}$ tel que $\forall z \in \mathbb{C},\ g(z) = f(z)e^{-z} = k$ d'où $\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = ke^z$.

31 **a.** Initialisation : $u_1(x) = 1 + \int_0^x dt = x + 1$ de sorte que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leqslant u_1(x) - u_0(x) = x = \dfrac{x^{0+1}}{(0+1)!}$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall x \in I,\ 0 \leqslant u_{n+1}(x) - u_n(x) \leqslant \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$. Pour tout réel $x \in I$, on a $u_{n+2}(x) = 1 + \int_0^x u_{n+1}(t-t^2)dt$ et $u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n(t-t^2)dt$ ce qui donne en soustrayant l'égalité $u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x) = \int_0^x \big(u_{n+1}(t-t^2) - u_n(t-t^2)\big)dt$ donc, comme $u_{n+1}(t-t^2) - u_n(t-t^2) \geqslant 0$ car $t - t^2 \in I$, on a déjà $u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x) \geqslant 0$. De plus, $u_{n+1}(t-t^2) - u_n(t-t^2) \leqslant \dfrac{(t-t^2)^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant \dfrac{t^{n+1}}{(n+1)!}$ par hypothèse et car $t - t^2 = t(1-t)$ avec $0 \leqslant 1-t \leqslant 1$, donc $u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x) \leqslant \int_0^x \dfrac{t^{n+1}}{(n+1)!}dt = \dfrac{x^{n+2}}{(n+2)!}$.

Conclusion : par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ 0 \leqslant u_{n+1}(x) - u_n(x) \leqslant \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.

b. Soit $x \in I$ et $n \in \mathbb{N}$, d'après la question précédente, $|f_n(x)| = |u_{n+1}(x) - u_n(x)| \leqslant \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant \dfrac{1}{(n+1)!}$ donc f_n est bornée sur I et $||f_n||_{\infty,I} \leqslant \dfrac{1}{(n+1)!}$. Comme la série exponentielle $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{(n+1)!}$ converge, la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $I = [0;1]$.

c. Ainsi, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur I, ce qui signifie que $\forall x \in I$, $\sum\limits_{n\geqslant 0}\big(u_{n+1}(x) - u_n(x)\big)$ converge et, par dualité suite-série, on en déduit que la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Ainsi, la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction u. De plus, comme toutes les u_n sont continues sur I par récurrence, donc toutes les f_n le sont aussi, et qu'on a convergence normale de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ sur I, la somme $u - u_0$ de cette série de fonctions est aussi continue sur I donc $u \in C^0(I, \mathbb{R})$.

d. Pour $x \in I$ et $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u(x) - u_n(x) = \sum\limits_{k=n}^{+\infty}(u_{k+1}(x) - u_k(x)) \leqslant \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \dfrac{x^{k+1}}{(k+1)!} \leqslant \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \dfrac{1}{(k+1)!} = R_n$ donc $u - u_n$ est bornée sur I. Or R_n est le reste d'ordre n de la série exponentielle convergente $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{n!}$. Ainsi, $||u - u_n||_{\infty,[0;1]} \leqslant R_n$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = 0$ donc $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers u sur le segment $[0;1]$. Comme $\left|\int_0^x u(t-t^2)dt - \int_0^x u_n(t-t^2)dt\right| = \int_0^x \big(u(t-t^2) - u_n(t-t^2)\big)dt \leqslant \int_0^x ||u-u_n||_{\infty,I}dt \leqslant ||u-u_n||_{\infty,I}$ car $\forall t \in I,\ t - t^2 \in I$ et que $x \leqslant 1$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^x u_n(t-t^2)dt = \int_0^x u(t-t^2)dt$ pour tout $x \in I$. Il suffit donc de passer à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans la relation $u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n(t-t^2)dt$ et

on obtient $\forall x \in I,\ u(x) = 1 + \int_0^x u(t - t^2)dt$ car $\lim_{n \to +\infty} u_{n+1}(x) = u(x)$ aussi. u est donc solution de (E).
Soit $v : I \to \mathbb{R}$ une autre fonction continue solution de (E), alors la fonction $f = u - v$ est continue sur I et vérifie $\forall x \in I,\ f(x) = \int_0^x f(t - t^2)dt$. On en déduit en dérivant par le théorème fondamental de l'intégration que $\forall x \in I,\ f'(x) = f(x - x^2)$.

32 **a.** Pour $s = 0$, on sait d'après le cours que la série entière géométrique $\sum_{n \geqslant 1} x^n$ est de rayon 1 avec divergence grossière pour $x = \pm 1$ donc le domaine de définition de $x \mapsto f(x, 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n$ vaut $]-1; 1[$.
Pour $s = 1$, on sait d'après le cours que la série entière logarithme $\sum_{n \geqslant 1} \frac{x^n}{n}$ est de rayon 1 (c'est la primitive formelle de la précédente) avec divergence pour $x = 1$ (série harmonique) et convergence pour $x = -1$ par le critère spécial des séries alternées car $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geqslant 1}$ est décroissante et tend vers 0. Ainsi, le domaine de définition de $x \mapsto f(x, 1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ vaut $[-1; 1[$.
De plus, on sait que $\forall x \in]-1; 1[,\ f(x, 0) = x \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} = \frac{x}{1 - x}$ et $\forall x \in]-1; 1[,\ f(x, 1) = -\ln(1 - x)$.
b. Posons $u_n = \frac{1}{n^s} > 0$ pour $n \geqslant 1$. On a $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^s = 1 = L$ donc, d'après le cours le rayon de convergence de $\sum_{n \geqslant 1} \frac{x^n}{n^s}$ vaut $R_s = \frac{1}{L} = 1$.
c. Comme $R_s = 1$, le domaine de définition de $x \mapsto f(x, s)$ vérifie la double inclusion $]-1; 1[\subset I_s \subset [-1; 1]$ d'après le cours sur les séries entières. Traitons trois cas :

Si $s > 1$, d'après le critère des séries de RIEMANN, $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^s}$ converge donc $\sum_{n \geqslant 1} \frac{x^n}{n^s}$ converge absolument pour $x = \pm 1$. Ainsi, $I_s = [-1; 1]$.

Si $s \in]0; 1]$, parRIEMANN, $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^s}$ diverge mais $\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^s}$ converge par le critère spécial des séries alternées car $\left(\frac{1}{n^s}\right)_{n \geqslant 1}$ est décroissante et tend vers 0. Ainsi, $I_s = [-1; 1[$.

Si $s \leqslant 0$, $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^s}$ et $\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^s}$ divergent grossièrement. Ainsi, $I_s =]-1; 1[$.

d. Pour $x \in]-1; 1[$, on est dans l'intervalle ouvert de convergence donc on peut dériver terme à terme et avoir $f'(x, s) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{x^{n-1}}{n^s}$. On a donc $xf'(x, s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^{s-1}} = f(x, s - 1)$.
e. Pour $x \in]-1; 1[$, on a $f(x, -1) = xf'(x, 0)$ d'après **d.** et $f(x, 0) = \frac{x}{1 - x} = \frac{1}{1 - x} - 1$ d'après **a.** donc $f(x, -1) = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1 - x)^2}$. De même, $f(x, -2) = xf'(x, -1) = \frac{x(1 + x)}{(1 - x)^3}$.
f. .

33 **a.** • Si $x \leqslant 0$, la suite $\left(\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right)_{n \geqslant 1}$ ne tend pas vers 0 donc la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ diverge grossièrement. Par contre, si $x > 0$, la suite $\left(\frac{1}{n^x}\right)_{n \geqslant 1}$ est positive, décroissante et tend vers 0 donc la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge par le critère spécial des séries alternées. Ainsi, le domaine de définition de η est $\mathbb{R}_+^*$.
• Si $x \leqslant 0$, la suite $\left(\frac{1}{n^x}\right)_{n \geqslant 1}$ ne tend pas vers 0 donc la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^x}$ diverge grossièrement. Par contre, si on a $x > 0$, la fonction $f_x : t \mapsto \frac{1}{t^x}$ étant décroissante et continue sur $[1; +\infty[$, $\forall n \geqslant 2,\ f_x(n) \leqslant \int_{n-1}^n f_x(t)dt \quad (1)$

et $\forall n \geqslant 1,\ \int_n^{n+1} f_x(t)dt \leqslant f_x(n)$ (2). Traitons deux cas :

<u>Si $x > 1$</u> , en sommant les inégalités (1) pour $k \in [\![2;n]\!]$ et par CHASLES, on obtient la majoration $S_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} f_x(k) \leqslant 1 + \int_1^n f_x(t)dt = 1 + \left[\frac{t^{1-x}}{1-x}\right]_1^n = 1 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)n^{x-1}} \leqslant 1 + \frac{1}{x-1}$ (comparaison série-intégrale). Comme la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ des sommes partielles de cette série à termes positifs $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^x}$ est bornée, on sait d'après le cours que $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^x}$ converge.

<u>Si $x \leqslant 1$</u> , en sommant les inégalités (2) pour $k \in [\![1;n]\!]$ et par CHASLES, on obtient la minoration $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x} = \sum_{k=1}^{n} f_x(k) \geqslant \int_1^{n+1} f_x(t)dt \geqslant \int_1^{n+1} \frac{dt}{t}$ car $x \in]0;1]$ donc $S_n \geqslant \ln(n+1)$. Comme $\lim_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$, par minoration, $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ donc $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^x}$ diverge.

Ainsi, le domaine de définition de ζ est $]1;+\infty[$.

b. Pour $x > 1$, posons les deux sommes partielles $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x}$ et $S'_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^x}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $S'_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^x} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^x} - 2 \times \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^x}$ (séparer termes d'indices pairs et impairs). Ainsi, $S'_{2n} = S_{2n} - \frac{1}{2^{x-1}} S_n$. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans cette relation, comme les deux séries convergent d'après **a.**, $\eta(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x)$ car $\lim_{n\to+\infty} S'_{2n} = \theta(x)$ et $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} S_{2n} = \zeta(x)$ (suite extraite).

c. Pour $n \geqslant 1$, posons $g_n : x \mapsto \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ de sorte que $\forall x > 0,\ \eta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x)$.

(H_1) $\sum_{n\geqslant 1} g_n$ converge simplement vers η sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après la question **a.**.

(H_2) Toutes les fonctions g_n sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations.

(H_3) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x > 0,\ g'_n(x) = (-1)^n \frac{\ln(n)}{n^x}$ et $|g'_n|$ est clairement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, pour $a > 0$, on a $||g'_n||_{\infty,[a;+\infty[} = \frac{\ln(n)}{n^a}$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n^a}$ ne converge pas si $a \leqslant 1$ donc la convergence normale de $\sum_{n\geqslant 1} g'_n$ n'est pas assurée et on va passer par la convergence uniforme.

Comme la série $\sum_{n\geqslant 1} g'_n(x)$ est alternée pour $x > 0$, on s'intéresse à la décroissance de la suite $(|g'_n(x)|)_{n\geqslant 1}$, au moins à partir d'un certain rang. Posons $h_x : t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^x}$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $h'_x(t) = \frac{1 - x\ln(t)}{t^{x+1}}$. Ainsi, h_x est décroissante sur $[e^{1/x};+\infty[$, donc notamment sur $[e^{1/a};+\infty[$ car $\frac{1}{a} \geqslant \frac{1}{x}$. Ainsi, dès que $n \geqslant e^{1/a}$, $h_x(n) = |g'_n(x)| \geqslant |g'_{n+1}(x)| = h_x(n+1)$ donc la suite $(|g'_n(x)|)_{n\geqslant \lfloor e^{1/a}+1 \rfloor}$ est décroissante et tend vers 0 par croissances comparées. Par le critère spécial des séries alternées, la série $\sum_{n\geqslant 1} g'_n(x)$ converge et on peut donc définir sa fonction reste d'ordre n, $R_n : x \mapsto \sum_{k=n+1} g'_k(x)$. Pour $n \geqslant e^{1/a}$, le critère spécial montre aussi que l'on a $|R_n(x)| \leqslant |g'_{n+1}(x)| = \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^x} \leqslant \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a}$. Ainsi, la fonction R_n est bornée sur $[a;+\infty[$ et on a $||R_n||_{\infty,[a;+\infty[} \leqslant \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a}$. Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a} = 0$ par croissances comparées toujours, la série $\sum_{n\geqslant 1} g'_n$ converge uniformément sur $[a;+\infty[$, donc sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$.

Par le théorème de dérivation des séries de fonctions, η est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x > 0,\ \eta'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n^x}$.

d. Pour $n \geqslant 1$, posons $S'_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ la somme partielle de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ dont la somme vaut $\eta(1)$. Alors $S'_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\int_0^1 t^{k-1}dt = \int_0^1\Big(\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j t^j\Big)dt$ par linéarité de l'intégrale. Comme $\forall t \in [0;1]$, $\sum_{j=0}^{n-1}(-t)^j = \frac{1-(-t)^n}{1+t}$, on a $\left|S'_n - \int_0^1 \frac{dt}{1+t}\right| = \left|\int_0^1 \frac{(-1)^{n+1}t^n}{1+t}dt\right| \leqslant \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$ car $\forall t \in [0;1]$, $\frac{1}{1+t} \leqslant 1$. Par encadrement, on a $\lim_{n\to+\infty} S'_n = \eta(1) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln(2)$ car $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$. Or $1-2^{1-x} = 1-e^{(1-x)\ln(2)} \underset{1}{=} 1-(1+(1-x)\ln(2)+o(1-x)) \underset{1}{\sim} (x-1)\ln(2)$ donc, par continuité de η en 1, $\zeta(x) = \frac{\eta(x)}{1-2^{1-x}} \underset{1^+}{\sim} \frac{\ln(2)}{(1-x)\ln(2)} = \frac{1}{1-x}$ et on a déjà $\zeta(x) \underset{1}{\sim} \frac{1}{1-x}$ donc $a = 1$.

Pour avoir b, il nous faudrait le développement limité de η en 1 à l'ordre 1 et pas seulement 0 donc la valeur de $\eta'(1)$. Pour $n \geqslant 1$, posons $H_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ et $T_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k\ln(k)}{k}$ de sorte que $\eta'(1) = \lim_{n\to+\infty} T_n$ d'après **c.**. Or, en séparant les termes d'indices pairs et impairs dans $T_{2n} = \sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k\ln(k)}{k}$, on obtient $T_{2n} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\ln(2k+1)}{2k+1} = 2\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{2n}\frac{\ln(k)}{k}$ donc, comme $\ln(2k) = \ln(2)+\ln(k)$, on a $T_{2n} = \ln(2)H_n + U_n - U_{2n}$ en posant $U_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(k)}{k}$. Or la fonction $f : t \mapsto \frac{\ln(t)}{t}$ est dérivable et décroissante sur $[e;+\infty[$ car $\forall t > 1$, $f'(t) = \frac{1-\ln(t)}{t^2}$. Ainsi, par comparaison série-intégrale, on a $\forall k \geqslant 4$, $\int_{k-1}^{k} f(t)dt \geqslant f(k)$ (1) et $\forall k \geqslant 3$, $\int_{k}^{k+1} f(t)dt \leqslant f(k)$ (2). Pour $n \geqslant 4$, on somme (1) pour $k \in [\![4;n]\!]$ et, par Chasles, $\int_3^n \frac{\ln(t)}{t}dt \geqslant U_n - f(2) - f(3)$ et on somme (2) pour $k \in [\![3;n]\!]$ pour avoir $\int_3^{n+1}\frac{\ln(t)}{t}dt \leqslant U_n - f(2)$. Ainsi, $\frac{\ln(2)}{2} + \left[\frac{\ln^2(t)}{2}\right]_3^{n+1} \leqslant U_n \leqslant \frac{\ln(2)}{2} + \frac{\ln(3)}{3} + \left[\frac{\ln^2(t)}{2}\right]_4^{n}$. Comme on a $\frac{\ln^2(n+1)}{2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln^2(n)}{2}$, par encadrement, on a donc $U_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln^2(n)}{2}$.

De plus, en posant $a_n = U_n - \frac{\ln^2(n)}{2}$ pour $n \geqslant 1$, on a $\forall n \geqslant 2$, $a_n - a_{n-1} = \frac{\ln(n)}{n} - \frac{\ln^2(n)}{2} + \frac{\ln^2(n-1)}{2}$ donc $a_n - a_{n-1} = \frac{\ln(n)}{n} - \frac{\ln^2(n)}{2} + \frac{\Big(\ln(n)+\ln\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\Big)^2}{2} = \frac{\ln(n)}{n} + \ln(n)\ln\Big(1-\frac{1}{n}\Big) + \frac{1}{2}\ln\Big(1-\frac{1}{n}\Big)^2$ et on arrive à $a_n - a_{n-1} \underset{+\infty}{=} \frac{\ln(n)}{n} + \ln(n)\Big(-\frac{1}{n}+O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big) + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big) \underset{+\infty}{=} O\Big(\frac{1}{n^{3/2}}\Big)$ ce qui montre par comparaison aux séries de Riemann que $\sum_{n\geqslant 2}(a_n - a_{n-1})$ converge donc que, par dualité suite-série, la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ converge, notons $\alpha = \lim_{n\to+\infty} a_n$ de sorte que $U_n \underset{+\infty}{=} \frac{\ln^2(n)}{2} + \alpha + o(1)$.

Par conséquent, $T_{2n} \underset{+\infty}{=} \ln(2)\big(\ln(n)+\gamma+o(1)\big) + \frac{\ln^2(n)}{2} + \alpha + o(1) - \frac{\ln^2(2n)}{2} - \alpha + o(1)$ dont on déduit que $T_{2n} \underset{+\infty}{=} \ln(2)\ln(n) + \gamma\ln(2) - \frac{\ln^2(2)}{2} - \ln(2)\ln(n) + o(1)$ car $\ln(2n) = \ln(2)+\ln(n)$ et on a enfin la valeur $\lim_{n\to+\infty} T_{2n} = \gamma\ln(2) - \frac{\ln^2(2)}{2} = \eta'(1)$.

Comme $\forall x > 1$, $\zeta(x) = \frac{\eta(x)}{1-2^{1-x}}$, la connaissance locale du numérateur et du dénominateur au voisinage de 1^+ va nous donner les valeurs de a et b. En effet, $\eta(x) = \eta(1) + \eta'(1)(x-1) + o\big((x-1)\big)$

par le théorème de TAYLOR-YOUNG car η est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $1-2^{1-x} = 1-e^{(1-x)\ln(2)}$ donc $1-2^{1-x} \underset{1}{=} 1-\Big(1+\ln(2)(1-x)+\frac{\ln^2(2)}{2}(1-x)^2+o\big((1-x)^2\big)\Big) \underset{1}{=} \ln(2)(x-1)-\frac{\ln^2(2)}{2}(x-1)^2+o\big((x-1)^2\big)$

puis $\zeta(x) \underset{1^+}{=} \dfrac{\ln(2)+\Big(\gamma\ln(2)-\frac{\ln^2(2)}{2}\Big)(x-1)+o(x-1)}{\ln(2)(x-1)-\frac{\ln^2(2)}{2}(x-1)^2+o\big((x-1)^2\big)} \underset{1^+}{=} \dfrac{1}{x-1}\times\dfrac{1+\Big(\gamma-\frac{\ln(2)}{2}\Big)(x-1)+o(x-1)}{1-\frac{\ln(2)}{2}(x-1)+o(x-1)}$. Or

il vient $\dfrac{1+\Big(\gamma-\frac{\ln(2)}{2}\Big)(x-1)+o(x-1)}{1-\frac{\ln(2)}{2}(x-1)+o(x-1)} \underset{1^+}{=} \Big(1+\Big(\gamma-\frac{\ln(2)}{2}\Big)(x-1)+o(x-1)\Big)\times\Big(1+\frac{\ln(2)}{2}(x-1)+o(x-1)\Big)$

et on a enfin $\zeta(x) \underset{1^+}{=} \frac{1}{x-1}\big(1+\gamma(x-1)+o(x-1)\big) \underset{1^+}{=} \frac{1}{x-1}+\gamma+o(1)$ donc $a=1$ (on le savait) et $b=\gamma$.

34 **a.** Pour $n\in\mathbb{N}^*$, soit la fonction $u_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $u_n(x)=\dfrac{(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{n(2n+1)}$. Pour tout réel $x\in\mathbb{R}^*$, $\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \dfrac{n(2n+1)}{(n+1)(2n+3)}x^2$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = x^2=\ell$.

- Si $|x|<1$, on a $\ell<1$ donc, par critère de D'ALEMBERT, $\sum\limits_{n\geqslant 0}u_n(x)$ converge. Ainsi, $R\geqslant 1$.
- Si $|x|>1$, on a $\ell>1$ donc, par critère de D'ALEMBERT, $\sum\limits_{n\geqslant 0}u_n(x)$ diverge. Ainsi, $R\leqslant 1$.

Par conséquent, le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{n(2n+1)}$ vaut $R=1$.

b. Comme $|u_n(\pm 1)| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^2}$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1}u_n(\pm 1)$ converge absolument par comparaison aux séries de RIEMANN.

Le domaine I de définition de S est $I=[-1;1]$.

c. D'après le cours, la fonction S (somme d'une série entière) est continue (et même de classe C^∞) au moins sur l'intervalle ouvert de convergence, c'est-à-dire dans notre cas sur $]-1;1[$.

d. Comme $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $||u_n||_{\infty,I}=|u_n(1)|=\dfrac{1}{n(2n+1)}\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{2n^2}$ et que la série de RIEMANN $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^2}$ converge car $2>1$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}u_n$ converge normalement sur I. Comme toutes les fonctions u_n sont continues sur I, par théorème de continuité des séries de fonctions, la fonction S est continue sur I.

e. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on a $\dfrac{1}{n(2n+1)}=\dfrac{(2n+1)-2n}{n(2n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{2n+1}$ et le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{x^{2n+1}}{n}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$ vaut aussi 1 donc, pour $x\in]-1;1[$, on peut écrire $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{n}+2\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ en séparant les sommes. On reconnaît des séries entières classiques et $S(x)=x\ln(1+x^2)+2(\text{Arctan}(x)-1)$.

f. Comme la fonction S est impaire et continue sur $[-1;1]$ donc en 1, on a $S(1)=S(-1)=\lim\limits_{x\to 1^-}S(x)$ donc $S(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}\big(x\ln(1+x^2)+2(\text{Arctan}(x)-1)\big)=\ln(2)-2+\frac{\pi}{2}\sim 0,26>0$. Pour $x=\pm 1$, la série alternée $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^n}{n(2n+1)}$ converge aussi par le critère spécial des séries alternées car $\left(\dfrac{1}{n(2n+1)}\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et tend vers 0. On sait alors que sa somme $S(1)$ est du signe de son premier terme $\dfrac{(-1)^{1+1}}{1(2+1)}>0$ donc $S(1)>0$.

35 **a.** Pour $n\in\mathbb{N}^*$, soit $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f_n(x)=\dfrac{\text{Arctan}(nx)}{n^2}$. Alors $|f_n(x)|\leqslant\dfrac{\pi}{2n^2}$ donc, par comparaison et critère de RIEMANN, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}f_n(x)$ converge pour tout réel x. Ainsi, $\sum\limits_{n\geqslant 1}f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$: f est définie sur $\mathbb{R}$. La majoration précédente montre même que f_n est bornée sur $\mathbb{R}$ et que $||f_n||_{\infty,\mathbb{R}} \leqslant \frac{\pi}{2n^2}$ (on a même égalité car $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \frac{\pi}{2n^2}$) et la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{\pi}{2n^2}$ converge donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Comme toutes les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}$, par théorème, la fonction somme f est aussi continue sur $\mathbb{R}$.

b. Utilisons le théorème de dérivation des séries de fonctions :

- (H_1) On vient de voir que $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^*$ (et même sur $\mathbb{R}$).
- (H_2) Pour tout entier $n \geqslant 1$, f_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec $f'_n(x) = \frac{1}{n(1+n^2x^2)}$.
- (H_3) Soit $a > 0$, posons $J_a =]-\infty;-a] \cup [a;+\infty[$, on a $\forall x \in J_a$, $\forall n \geqslant 1$, $|f'_n(x)| \leqslant f'_n(a)$ donc $||f'_n||_{\infty,J_a} = f'_n(a) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^3a^2}$ donc, par comparaison, $\sum\limits_{n\geqslant 1} ||f'_n||_{\infty,J_a}$ converge ce qui justifie que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f'_n$ converge normalement sur J_a.

Ainsi, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \neq 0$, $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1+n^2x^2)}$.

c. On effectue une comparaison série-intégrale. Si $x > 0$ est fixé, la fonction $g_x : t \mapsto \frac{1}{t(1+t^2x^2)}$ est continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, pour $n \geqslant 2$, on a $\int_n^{n+1} g_x(t)dt \leqslant g_x(n) = f'_n(x) \leqslant \int_{n-1}^{n} g_x(t)dt$. On somme pour n allant de 1 à p pour l'inégalité de gauche et pour n allant de 2 à p pour celle de droite et on obtient par CHASLES $\int_1^{p+1} g_x(t)dt \leqslant \sum\limits_{n=1}^{p} f'_n(x) \leqslant f'_1(x) + \int_1^{p} g_x(t)dt$. Or, pour $y \geqslant 1$, on a $\int_1^y g_x(t)dt = \int_1^y \Big(\frac{1}{t} - \frac{x^2t}{2(1+x^2t^2)}\Big)dt = \Big[\ln(t) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2t^2)\Big]_1^y = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}\ln\Big(\frac{1+x^2y^2}{y^2}\Big)$ donc $\lim\limits_{y\to+\infty} \int_1^y g_x(t)dt = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \ln(x)$. Ainsi, en passant à la limite quand p tend vers $+\infty$ dans l'encadrement ci-dessus, on parvient à $\frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \ln(x) \leqslant f'(x) \leqslant \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \ln(x)$. Par encadrement, on en déduit l'équivalent $f'(x) \underset{x\to0^+}{\sim} -\ln(x)$ donc $\lim\limits_{x\to0^+} f'(x) = +\infty$. Pour $x > 0$ par exemple, par le théorème des accroissements finis, puisque f est continue sur $[0;x]$ et dérivable sur $]0;x[$, il existe $c_x \in]0;x[$ tel que $\frac{f(x)}{x} = f'(c_x)$ donc, comme $\lim\limits_{x\to0^+} c_x = 0^+$, on a $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty$: le graphe de f admet donc en 0^+ une tangente verticale et f n'est pas dérivable en 0, ni à gauche ni à droite car toutes les f_n étant impaires, la fonction f est aussi impaire.

Pour $x > 0$, comme $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$ pour $a > 0$ par le théorème fondamental de l'intégration, en faisant tendre a vers 0, par continuité de f en 0, on a $f(x) = \int_0^x f'(t)dt$. Comme $f'(t) \underset{0}{\sim} -\ln((t)$, on a $f'(t) + \ln(t) \underset{0}{=} o(\ln(t))$. Pour $\varepsilon > 0$, il existe donc $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in]0;\alpha[$, $|f'(t) + \ln(t)| \leqslant \varepsilon|\ln(t)|$. Ainsi, $\Big|\int_0^x (f'(t)+\ln(t))dt\Big| \leqslant \varepsilon \int_0^x (-\ln(t))dt$. Il vient donc $\big|f(x) + x\ln(x) - x\big| \leqslant \varepsilon\big|x\ln(x) - x\big|$, ce qui garantit que $f(x) + x\ln(x) - x \underset{0}{=} o(x\ln(x) - x)$, ou encore que $f(x) \underset{0}{\sim} -x\ln(x) + x$. Mais comme $-x\ln(x) + x \underset{0}{\sim} -x\ln(x)$, on a enfin l'équivalent $f(x) \underset{0}{\sim} -x\ln(x)$.

d. Comme toutes les f_n sont croissantes comme la fonction Arctan, la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$. On pouvait aussi utiliser la continuité de f sur $\mathbb{R}$ et l'expression de sa dérivée positive vue en **b.**.

e. On a vu en **b.** que $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Or les fonctions f_n admettent des limites finies en $\pm\infty$. Par le théorème de la double limite, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)\right) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\pi}{2n^2} = \frac{\pi}{2}\zeta(2) = \frac{\pi^3}{12}$. Comme f est impaire car toutes les fonctions f_n le sont, on a aussi $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\pi^3}{12}$.

f. La fonction f est impaire, croissante et on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi^3}{12} \sim 2,58$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\pi^3}{12}$. Son graphe ressemble donc à celui de la fonction Arctan, avec deux asymptotes horizontales d'équation $y = \pm\frac{\pi^3}{12}$, mais avec une tangente verticale en 0.

36 Déjà, la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est bien définie car a_0 est donné et la relation $a_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k a_{n-k}$ définit bien a_{n+1} connaissant les termes $a_0, \cdots, a_n$. On peut montrer facilement par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \in \mathbb{N}$.

a. <u>Initialisation</u> : comme $u_0 = 1$, $u_1 = u_0^2 = 1$ et $u_2 = 2u_0u_1 = 2$. Ainsi, $0 \leqslant \frac{a_0}{0!} = 1 \leqslant 1$, $0 \leqslant \frac{a_1}{1!} = 1 \leqslant 1$.

<u>Hérédité</u> : soit $n \geqslant 2$ tel que $\forall k \in [\![0;n]\!]$, $0 \leqslant \frac{a_k}{k!} \leqslant 1$, alors $a_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k a_{n-k} \geqslant 0$ car $a_0, \cdots, a_n$ sont positifs. Par hypothèse de récurrence, $a_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k a_{n-k} = n!\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{a_k a_{n-k}}{k!(n-k)!} \leqslant n!\sum\limits_{k=0}^{n} 1 = (n+1)!$ donc on a bien l'inégalité $\frac{a_{n+1}}{(n+1)!} \leqslant 1$.

<u>Conclusion</u> : par principe de récurrence forte, on a établi que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \frac{a_n}{n!} \leqslant 1$.

Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \frac{a_n}{n!} \leqslant 1$, et puisque le rayon de convergence de la série entière géométrique $\sum\limits_{n\geqslant 0} x^n$ vaut 1, d'après le cours, le rayon R de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{a_n}{n!}x^n$ vérifie $R \geqslant 1$. Ainsi, la fonction f, qui est la somme de cette série entière, est bien définie sur $I =]-1;1[\subset]-R;R[$.

b. On dérive terme à terme à l'intérieur de l'intervalle ouvert de convergence qui contient $]-1;1[$ d'après la question **a.** pour avoir $\forall x \in I$, $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\frac{a_n}{n!}x^{n-1} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{a_{n+1}}{n!}x^n$ à l'intérieur de l'intervalle ouvert de convergence et après changement d'indice. On a donc $\forall x \in I$, $f'(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{a_k}{k!}.\frac{a_{n-k}}{(n-k)!}\right)x^n$ car $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. On reconnaît un produit de CAUCHY, valide puisque $I \subset]-R;R[$, et on a $f'(x) = f(x)^2$. Par conséquent, f est bien solution sur I de l'équation $(E)\ :\ y' = y^2$.

c. <u>Analyse</u> : supposons que f ne s'annule pas sur I, alors $\forall x \in I$, $\frac{f'(x)}{f(x)^2} = 1 \iff \left(\frac{1}{f(x)} + x\right)' = 0$ donc $x \mapsto \frac{1}{f(x)} + x$ est constante sur l'intervalle I. Or $f(0) = 1$ donc $\forall x \in I$, $\frac{1}{f(x)} + x = 1$ et $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

<u>Synthèse</u> : soit $g :]-1;1[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{1}{1-x}$, alors g ne s'annule pas sur I, $g(0) = 1$ et, pour $x \in I$, on a $g'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = g(x)^2$. Ainsi, f et g sont solutions du même problème de CAUCHY (non linéaire donc hors programme) et sont donc égales sur I.

Si on veut rester dans le programme, on décompose $\forall x \in]-1;1[$, $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$. Posons, $v_n = n!$ pour $n \in \mathbb{N}$ de sorte que $\forall x \in]-1;1[$, $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{v_n}{n!}x^n$. Par produit de CAUCHY et par unicité du développement en série entière dans $]-1;1[$, on a $g'(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)\frac{v_{n+1}}{(n+1)!}x^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{v_k}{k!}\,\frac{v_{n-k}}{(n-k)!}\right)x^n$, il vient donc la relation $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{v_{n+1}}{n!} = \sum\limits_{k=0}^{n}\frac{v_k}{k!}\,\frac{v_{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!}\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}v_k v_{n-k}$. Par récurrence forte, on montre facilement que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n = n!$ car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont le même premier terme et la même relation de récurrence, à savoir $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} v_k v_{n-k}$.

Bien sûr, on pouvait le conjecturer en calculant quelques termes initiaux de plus et le démontrer par récurrence forte sans passer par les séries entières.

37 **a.** On pose $u_n = H_n - \ln(n)$ pour $n \geqslant 1$. Pour $n \geqslant 2$, $u_n - u_{n-1} = H_n - H_{n-1} - \ln(n) + \ln(n-1)$ donc $u_n - u_{n-1} = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et, par comparaison aux séries de RIEMANN, la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} (u_n - u_{n-1})$ converge donc, par dualité suite-série, la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge. Si on note γ sa limite, on a donc $u_n \underset{+\infty}{=} \gamma + o(1)$ donc $H_n \underset{+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$.

b. D'après **a.**, $H_{2n} - H_n \underset{+\infty}{=} \ln(2n) + \gamma - \ln(n) - \gamma + o(1) \underset{+\infty}{=} \ln(2) + o(1)$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} (H_{2n} - H_n) = \ln(2)$.

c. Pour $n \geqslant 1$, $H_{2n} - H_n = \sum\limits_{j=n+1}^{2n} \frac{1}{j} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ en posant $j = n+k$ qu'on écrit aussi comme une somme de RIEMANN $H_{2n} - H_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \frac{b-a}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$ en posant $a = 0$, $b = 1$ et $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$.
Comme f est continue sur le segment $[0;1]$, par un théorème du cours relatif à la convergence des sommes de RIEMANN, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} (H_{2n} - H_n) = \int_0^1 f(x)dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2)$.

d. Posons, pour $n \geqslant 1$, $S_{1,n} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$, $S_{2,n} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(2k-1)}$ et $S_{3,n} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{k} i^2}$ les trois sommes partielles associées aux séries proposées.

<u>S_1</u> La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge par le critère spécial des séries alternées car la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et tend vers 0, ce qui garantit l'existence de sa somme S_1. Pour $n \geqslant 1$, on a $S_{1,2n} = \sum\limits_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}\right) - 2\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = \sum\limits_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ donc $S_{1,2n} = H_{2n} - H_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{1,2n} = \ln(2)$. Comme on a vu que $(S_{1,n})_{n\geqslant 1}$ converge vers S_1, sa suite extraite $(S_{1,2n})_{n\geqslant 1}$ converge aussi vers S_1 donc $S_1 = \ln(2)$.

<u>S_2</u> La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(2n-1)}$ converge absolument par comparaison aux séries de RIEMANN car on a $\frac{1}{n(2n-1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$ d'où l'existence de sa somme S_2. $S_{2,n} = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{2k-1} - \frac{1}{k}\right)$ en décomposant en éléments simples donc $S_{2,n} = 2\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 2\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}\right) - 2\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $S_{2,n} = 2\sum\limits_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - 2\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ donc $S_{2,n} = 2H_{2n} - 2H_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2,n} = 2\ln(2)$. Ainsi, $S_2 = 2\ln(2)$.

<u>S_3</u> On sait que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} > 0$. Comme $\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} k^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{3}{n^3}$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} k^2}$ converge par comparaison aux séries de RIEMANN. Et on peut décomposer la fraction rationnelle $\frac{6}{X(X+1)(2X+1)}$ en éléments simples en trouvant trois réels a, b, c tels que l'on ait la relation $\frac{6}{X(X+1)(2X+1)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{2X+1} = \frac{a(X+1)(2X+1) + bX(2X+1) + cX(X+1)}{X(X+1)(2X+1)}$ et qui donne,

par identification, $(2a+2b+c)X^2+(3a+b+c)X+a=6$. On a donc le système linéaire $a-6=3a+b+c=2a+2b+c=0$ qui se résout en $a=6$, $b=6$ et $c=-24$. Ainsi, pour $n\geqslant 1$, $S_{3,n}=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{6}{k}+\frac{6}{k+1}-\frac{24}{2k+1}\right)=6H_n+6(H_{n+1}-1)+24-24\left(\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1}+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}\right)$, d'où $S_{3,n}=12H_n-6+\frac{6}{n+1}+24-24H_{2n}+12H_n-\frac{24}{2n+1}=18-24(H_{2n}-H_n)+\frac{6}{n+1}-\frac{24}{2n+1}$. D'après le résultat des questions **b.** et **c.**, et comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{6}{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{24}{2n+1}=0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}S_{3,n}=18-24\ln(2)$. Ainsi, $S_3=18-24\ln(2)\sim 1,36$.

38

39 **a.** On sait que $\forall x\in\mathbb{R}$, $e^x=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$ donc, comme $\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}+\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}=\sum\limits_{k=0}^{n+1}\frac{(-1)^k}{k!}$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1}-u_n)=e^{-1}=\frac{1}{e}$. D'après (C), on a donc $\sum\limits_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}-u_k)=u_n-u_0=u_n-1\underset{+\infty}{\sim}n\ell$ par télescopage ce qui montre que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$ donc que $u_n-1\underset{+\infty}{\sim}u_n\underset{+\infty}{\sim}\frac{n}{e}$.

Comme le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{nx^n}{e}$ est égal à 1 car $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(n+1)e}{en}=1$ avec la règle de D'ALEMBERT, le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0}u_nx^n$ vérifie aussi $R=1$.

b. Si on note $S_k=\sum\limits_{i=0}^{k}\frac{(-1)^i}{i!}$ pour tout $k\in\mathbb{N}$, comme $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n=S_{n+1}$, on a par télescopage $u_n-u_0=\sum\limits_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}-u_k)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}S_{k+1}=\sum\limits_{j=1}^{n}S_j$ en posant $j=k+1$ donc, comme $S_0=1=u_0$, on obtient $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n=\sum\limits_{k=0}^{n}S_k$. Comme $S_n\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{e}$, le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0}S_nx^n$ vaut 1 comme celui de la série géométrique $\sum\limits_{n\geqslant 0}x^n$. Par produit de CAUCHY, pour x dans l'intervalle ouvert de convergence $]-1;1[$, on a $\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}S_nx^n\right)\times\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}x^n\right)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{n}1.S_k\right)x^n=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_nx^n=f(x)$ donc $\frac{g(x)}{1-x}=f(x)$ en posant $g(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}S_nx^n$. Mais, de même, pour $x\in]-1;1[$, on a $\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n\right)\times\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}x^n\right)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{n}1.\frac{(-1)^k}{k!}\right)x^n$ car le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{n!}x^n$ vaut $+\infty$ donc $\frac{e^{-x}}{1-x}=g(x)$. Ainsi, $\forall x\in]-1;1[$, $f(x)=\frac{e^{-x}}{(1-x)^2}$.

c. Soit $\varepsilon>0$, par convergence de $({}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ, il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n\geqslant n_0$, $|u_n-\ell|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$. Mais $\forall n\geqslant n_0$, $\left|\sum\limits_{k=0}^{n-1}u_k-n\ell\right|=\left|\sum\limits_{k=0}^{n-1}(u_k-\ell)\right|=\left|\sum\limits_{k=0}^{n_0-1}(u_k-\ell)+\sum\limits_{k=n_0}^{n-1}(u_k-\ell)\right|\leqslant\left|\sum\limits_{k=0}^{n_0-1}(u_k-\ell)\right|+\sum\limits_{k=n_0}^{n-1}|u_k-\ell|$ par inégalité triangulaire donc $\left|\sum\limits_{k=0}^{n-1}u_k-n\ell\right|\leqslant A+\sum\limits_{k=n_0}^{n-1}|u_k-\ell|\leqslant A+\frac{(n-n_0)\varepsilon}{2}\leqslant A+\frac{n\varepsilon}{2}$ en posant $A=\left|\sum\limits_{k=0}^{n_0-1}(u_k-\ell)\right|\geqslant 0$. Or il existe un entier $n_1\geqslant n_0$ tel que $\forall n\geqslant n_1$, $A\leqslant\frac{n\varepsilon}{2}$ car $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n\varepsilon}{2}=+\infty$ d'où $\forall n\geqslant n_1$, $\left|\sum\limits_{k=0}^{n-1}u_k-n\ell\right|\leqslant\frac{n\varepsilon}{2}+\frac{n\varepsilon}{2}=n\varepsilon$. Ainsi, $\sum\limits_{k=0}^{n-1}u_k-n\ell\underset{+\infty}{=}o(n)\underset{+\infty}{=}o(n\ell)$ donc $\sum\limits_{k=0}^{n-1}u_k\underset{+\infty}{\sim}n\ell$.

40 **a.** Soit $n\in\mathbb{N}$, la fonction $f_n:t\mapsto\frac{t^n}{2+t^2}$ étant continue sur le segment $[0;1]$, le réel a_n est bien défini. De plus, comme $\forall t\in[0;1]$, $0\leqslant t^n\leqslant 1$ et $0<1\leqslant 2+t^2$, on a $0\leqslant f_n(t)\leqslant 1$ donc, par croissance de l'intégrale, on a $0\leqslant a_n\leqslant 1$. Puisque le rayon de convergence de la série géométrique entière $\sum\limits_{n\geqslant 0}x^n$ vaut 1, d'après le cours, la rayon R de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0}a_nx^n$ vérifie $R\geqslant 1$.

b. Pour $x \in]-1;1[$, comme $|x| < R$, $f(x)$ est défini et $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(xt)^n}{2+t^2} dt$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $g_n : [0;1] \to \mathbb{R}$ définie par $g_n(t) = \frac{(xt)^n}{2+t^2}$. Comme $\forall t \in [0;1]$, $|g_n(t)| \leqslant \frac{|x|^n}{2} \leqslant |x|^n$ car $|t|^n \leqslant 1$ et $2+t^2 \geqslant 2$, la fonction g_n est bornée sur $[0;1]$ et $||g_n||_{\infty,[0;1]} \leqslant |x|^n$. Comme la série géométrique $\sum_{n \geqslant 0} |x|^n$ converge car $|x| < 1$, la série $\sum_{n \geqslant 0} g_n$ converge normalement sur $[0;1]$. Par convergence uniforme (puisque normale) d'une série de fonctions continues sur un segment, on sait par le théorème d'intégration terme à terme sur un segment que $f(x) = \int_0^1 \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} g_n(t)\Big) dt = \int_0^1 \frac{1}{(1-xt)(2+t^2)} dt$ car $\sum_{n=0}^{+\infty} (xt)^n = \frac{1}{1-xt}$. On décompose cette fraction rationnelle en éléments simples pour $x \neq 0$ en écrivant $\frac{1}{(1-xt)(2+t^2)} = \frac{a}{1-xt} + \frac{bt+c}{2+t^2}$ avec des réels a, b, c qui dépendent de x mais pas de t....

c. .

41 **a.** La fonction $g : t \mapsto \frac{\text{th}(t)}{t^2}$ est continue sur $[1;+\infty[$ et $g(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$ donc la fonction g est intégrable sur $[n;+\infty[$ par comparaison aux intégrales de RIEMANN d'où l'existence de a_n pour tout entier $n \geqslant 1$. Comme la fonction th est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $\lim_{t\to+\infty} \text{th}(t) = 1$, $\forall t \in [n;+\infty[$, $\text{th}(n) \leqslant \text{th}(t) \leqslant 1$ donc, par croissance de l'intégrale, on a $\int_n^{+\infty} \frac{\text{th}(n)dt}{t^2} = \Big[\frac{\text{th}(n)}{t}\Big]_n^+\infty = \frac{\text{th}(n)}{n} \leqslant a_n \leqslant \frac{1}{n} = \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ donc $a_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. Classiquement, par le critère de D'ALEMBERT par exemple, le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}$ est égal à 1 donc, par équivalence, celui de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} a_n x^n$ vaut aussi $R = 1$.

Comme th est positive et que la suite d'intervalle $\big([n;+\infty[\big)_{n\geqslant 1}$ est décroissante pour l'inclusion, $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et tend vers 0 en tant que reste d'une intégrale convergente. Par le critère spécial des séries alternées, la série $\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n a_n$ converge et la série à termes positifs $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ diverge par comparaison à la série harmonique. Ainsi, le domaine de définition de f est $[-1;1[$.

b. Si $x \in [-1;0]$, on vient de voir que la suite $(a_n|x|^n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et tend vers 0 donc $\sum_{n\geqslant 1} a_n x^n$ converge par le critère spécial des séries alternées et $\forall n \geqslant 1$, $|R_n(x)| = \Big|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k\Big| \leqslant |a_{n+1}x^{n+1}| \leqslant a_{n+1}$. Ainsi, R_n est bornée sur $[-1;0]$ et $||R_n||_{\infty,[-1;0]} \leqslant a_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On a donc convergence uniforme de $\sum_{n\geqslant 1} g_n$ sur $[-1;0]$ si $g_n : x \mapsto a_n x^n$ et donc continuité de f sur $[-1;0]$ car les g_n sont continues sur $[-1;0]$.

c. Comme $f(x) \underset{1^-}{\sim} -\ln(1-x)$ est équivalent à $f(x) + \ln(1-x) \underset{+\infty}{=} o(\ln(1-x))$, on va majorer la différence $f(x) - (-\ln(1-x))$. Comme on sait que $\forall x \in]-1;1[$, $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$, il s'agit de majorer $\sum_{n=1}^{+\infty} \Big(a_n - \frac{1}{n}\Big) x^n$. Or, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{\text{th}(n)}{n} \leqslant a_n \leqslant \frac{1}{n}$ donc $\Big|a_n - \frac{1}{n}\Big| \leqslant \frac{1-\text{th}(n)}{n}$ et $|f(x) + \ln(1-x)| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-\text{th}(n)}{n} x^n$ pour tout $x \in [0;1]$. Posons $b_n = \frac{1-\text{th}(n)}{n}$ pour $n \geqslant 1$, alors $1 - \text{th}(n) = 1 - \frac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}} = \frac{2e^{-n}}{e^n + e^{-n}} \underset{+\infty}{\sim} 2e^{-2n}$ donc $b_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{2e^{-2n}}{n} \underset{+\infty}{=} o(e^{-2n})$ et la série géométrique $\sum_{n\geqslant 1} e^{-2n}$ converge car $0 < e^{-2} < 1$.

Ainsi, $\forall x \in [0;1]$, $|f(x) + \ln(1-x)| \leqslant B = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ ce qui montre que $f(x) \underset{1^-}{=} -\ln(1-x) + O(1)$ donc $f(x) \underset{1^-}{=} -\ln(1-x) + o(\ln(1-x))$ car $\lim_{x\to 1^-} \ln(1-x) = -\infty$ et on conclut bien que $f(x) \underset{1^-}{\sim} -\ln(1-x)$.

42

43 **a.** On a $v_{2n+1} = 0$ car il n'existe aucun $(2n+1)$-uplet $(a_1, \cdots, a_{2n+1}) \in \{-1, 1\}^{2n+1}$ tel que $\sum\limits_{k=1}^{2n+1} a_k = 0$ car tous les a_k sont impairs donc $\sum\limits_{k=1}^{2n+1} a_k$ a la parité de $2n+1$ donc est impair alors que 0 est pair.

b. <u>$n = 1$</u> : il n'existe qu'un couple $(a_1, a_2) \in \{-1, 1\}^2$ tel que $a_1 + a_2 = 0$ et $\forall p \in [\![1; 2]\!]$, $\sum\limits_{k=1}^{p} a_k \geqslant 0$ et il s'agit de $(1, -1)$. Ainsi, $u_1 = 1$.

<u>$n = 2$</u> : il n'y a que deux quadruplets $(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \{-1, 1\}^4$ tels que $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$ et tels que $\forall p \in [\![1; 4]\!]$, $\sum\limits_{k=1}^{p} a_k \geqslant 0$ et il s'agit de $(1, 1, -1, -1)$, $(1, -1, 1, -1)$. Ainsi, $u_2 = 2$.

<u>$n = 3$</u> : il n'y a que cinq sextuplets $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) \in \{-1, 1\}^6$ tel que $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 0$ et tels que $\forall p \in [\![1; 6]\!]$, $\sum\limits_{k=1}^{p} a_k \geqslant 0$ et il s'agit de $(1, 1, 1, -1, -1, -1)$, $(1, 1, -1, 1, -1, -1)$, $(1, 1, -1, -1, 1, -1)$, $(1, -1, 1, 1, -1, -1)$ et $(1, -1, 1, -1, 1, -1)$. Ainsi, $u_3 = 5$.

c. Notons $U_{n+1} = \left\{(a_1, \cdots, a_{2n+1}) \in \{-1, 1\}^{2n+1} \;\middle|\; \sum\limits_{k=1}^{2n+1} a_k = 0 \text{ et } \forall p \in [\![1; 2n+2]\!],\ \sum\limits_{k=1}^{p} a_k \geqslant 0\right\}$ et, pour $m \in [\![1; n+1]\!]$, on note $U_{n+1}^m = \left\{(a_1, \cdots, a_{2n+2}) \in U_{n+1} \;\middle|\; 2m = \mathrm{Min}\left(\left\{j \in [\![1; n+1]\!] \;\middle|\; \sum\limits_{k=1}^{2j} a_k = 0\right\}\right)\right\}$ (la parité de $\mathrm{Min}\left(\left\{j \in [\![1; n+1]\!] \;\middle|\; \sum\limits_{k=1}^{2j} a_k = 0\right\}\right)$ tient au fait que $\sum\limits_{k=1}^{j} a_k$ a la parité de j). On a la partition $U_{n+1} = \bigsqcup\limits_{m=1}^{n+1} U_{n+1}^m$ de sorte que $u_{n+1} = \mathrm{card}\,(U_{n+1}) = \sum\limits_{m=1}^{n+1} \mathrm{card}\,(U_{n+1}^m)$. Traitons trois cas :

- Si $m = 1$ et si $(a_1, \cdots, a_{2n+2}) \in U_{n+1}^1$, alors $a_1 = 1$ et $a_2 = -1$ donc U_{n+1}^1 est en bijection avec U_n en envoyant $(1, -1, a_3, \cdots, a_{2n+2})$ sur $(a_3, \cdots, a_{2n+2})$. Ainsi, $\mathrm{card}\,(U_{n+1}^1) = u_n = u_0 u_n$ car $u_0 = 1$.
- Si $m \in [\![2; n]\!]$ et si $(a_1, \cdots, a_{2n+2}) \in U_{n+1}^m$, alors $u_1 = 1$ et $u_{2m} = -1$ donc l'application qui à $(a_1, \cdots, a_{2n+2}) \in U_{n+1}^m$ associe le couple $\big((a_2, \cdots, a_{2m-1}), (a_{2m+1}, \cdots, a_{2n+2})\big)$ définit une bijection entre les ensembles U_{n+1}^m et $U_{m-1} \times U_{n-m+1}$. En effet, la bijection réciproque est l'application qui à $\big((b_1, \cdots, b_{2m-2}), (c_1, \cdots, c_{2(n-m+1)})\big)$ associe $(1, b_1, \cdots, b_{2m-2}, -1, c_1, \cdots, c_{2(n-m+1)})$. Ainsi, $\mathrm{card}\,(U_n^m) = \mathrm{card}\,(U_{m-1} \times U_{n-m+1}) = \mathrm{card}\,(U_{m-1}) \times \mathrm{card}\,(U_{n-m+1}) = u_{m-1} u_{n-m+1}$.
- Si $m = n+1$ et si $(a_1, \cdots, a_{2n+2}) \in U_{n+1}^{n+1}$, alors $a_1 = 1$ et $a_{2n+2} = -1$ donc U_{n+1}^{n+1} est en bijection avec U_n en envoyant $(1, a_2, \cdots, a_{2n+1}, -1)$ sur $(a_2, \cdots, a_{2n+1})$. Ainsi, $\mathrm{card}\,(U_{n+1}^{n+1}) = u_n = u_n u_0$.

Par conséquent, $u_{n+1} = u_0 u_n + \left(\sum\limits_{m=2}^{n} u_{m-1} u_{n-m+1}\right) + u_n u_0 = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}$ en posant $k = m - 1$.

d. <u>Analyse</u> : supposons que la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n x^n$ a un rayon $R > 0$. Soit alors $f :]-R; R[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Pour $x \in]-R; R[$, on a $f(x)^2 = \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n x^n\right)^2 = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\sum\limits_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}\right) x^n$ par produit de Cauchy donc, avec la relation de **c.**, on a $f(x)^2 = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} x^n$ donc $x f(x)^2 = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} x^{n+1} = f(x) - 1$. Ainsi, $f(x)$ est racine du polynôme $P_x = xX^2 - X + 1$ dont le discriminant vaut $\Delta = 1 - 4x$. Comme $f(x) \in \mathbb{R}$, on a forcément $\Delta \geqslant 0$ donc $x \leqslant \frac{1}{4}$. Ceci garantit déjà que $R \leqslant \frac{1}{4}$. On donc $f(x) = \dfrac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}$ ou $f(x) = \dfrac{1 + \sqrt{1 - 4x}}{2x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = u_0 = 1$. Comme $g : x \mapsto 2xf(x) - 1$ est développable en série entière sur $]-R;R[$, elle y est continue et on sait d'après ce qui précède que $\forall x \in]-R;R[,\ g(x) = \pm\sqrt{1-4x}$. La continuité de g et le fait que g ne s'annule pas sur $]-R;R[$ montre que l'on a soit $\forall x \in]-R;R[,\ g(x) = \sqrt{1-4x}$ soit $\forall x \in]-R;R[,\ g(x) = -\sqrt{1-4x}$. Mais comme g vaut -1 en 0, elle est négative sur $]-R;R[$ et on a donc $\forall x \in]-R;R[,\ g(x) = -\sqrt{1-4x}$ donc $f(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ si $x \neq 0$.

<u>Synthèse</u> : d'après le cours $\forall u \in]-1;1[,\ \sqrt{1+u} = 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}(2n)!u^n}{(2n-1)(n!)^2 4^n}$ (on le retrouve assez vite avec le développement en série entière de $(1+x)^\alpha$ pour $\alpha = \frac{1}{2}$) donc $\forall x \in \left]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right[,\ \sqrt{1-4x} = 1 - \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(2n)!x^n}{(2n-1)(n!)^2}$ ce qui montre que $\forall x \in \left]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right[\setminus \{0\},\ \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(2n)!x^{n-1}}{2(2n-1)(n!)^2} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(2n+2)!x^n}{2(2n+1)\big((n+1)!\big)^2}$ qu'on va plutôt écrire $\dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(2n)!x^n}{n!(n+1)!}$. Posons $v_n = \dfrac{(2n)!}{n!(n+1)!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ de sorte que l'on a $\forall x \in \left]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right[\setminus \{0\},\ g(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$. On pose $g(0) = v_0 = 1$. Comme $0g(0)^2 - g(0) + 1 = 0$ et que $\forall x \in \left]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right[\setminus \{0\},\ xg(x)^2 - g(x) + 1 = \dfrac{1-2\sqrt{1-4x}+(1-4x)}{4x} - \dfrac{2-2\sqrt{1-4x}}{4x} + \dfrac{4x}{4x} = 0$, on a bien $\forall x \in \left]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right[,\ xg(x)^2 - g(x) + 1 = 0$. En effectuant un produit de CAUCHY sur $\left]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right[$, et en identifiant les coefficients (les calculs ont déjà été faits dans la partie analyse), on trouve que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} v_k v_{n-k}$. Comme $v_0 = u_0 = 1$ et que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient la même relation de récurrence, par récurrence forte, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n$. Ainsi, $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n x^n$ est bien de rayon $R = \dfrac{1}{4}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n = \dfrac{(2n)!}{n!(n+1)!} = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$. Par exemple, $u_0 = \dfrac{(2.0)!}{0!(0+1)!} = 1$, $u_1 = \dfrac{(2.1)!}{1!(1+1)!} = 1$, $u_2 = \dfrac{(2.2)!}{2!(2+1)!} = 2$ et $u_3 = \dfrac{(2.3)!}{3!(3+1)!} = 5$ qui confirme les calculs de la question **b.**. Et on a $u_4 = \dfrac{(2.4)!}{4!(4+1)!} = 14$ et $u_5 = \dfrac{(2.5)!}{5!(5+1)!} = 42$.

44 **a.** Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $u_n(x) = \varphi(x+n) + \varphi(x-n)$.

- (H_1) Toutes les fonctions u_n sont continues sur $\mathbb{R}$ par somme et composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ puisque φ est supposée continue sur $\mathbb{R}$ dans l'énoncé.
- (H_2) Soit $a > 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions u_n étant continues sur le segment $[-a;a]$, elles y sont bornées. Dès que $n \geqslant a$, d'après l'hypothèse, $n+x \geqslant n-a \geqslant 0$ et $x-n \leqslant -(n-a) \leqslant 0$ pour $x \in [-a;a]$, alors $|\varphi(x+n)| \leqslant \dfrac{C}{1+(x+n)^2} \leqslant \dfrac{C}{1+(n-a)^2}$ et $|\varphi(x-n)| \leqslant \dfrac{C}{1+(x-n)^2} \leqslant \dfrac{C}{1+(n-a)^2}$ donc, par inégalité triangulaire, $|u_n(x)| \leqslant \dfrac{2C}{1+(n-a)^2}$ ce qui prouve que $||u_n||_{\infty,[-a;a]} \leqslant \dfrac{2C}{1+(n-a)^2}$. Or la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{2C}{1+(n-a)^2}$ converge par comparaison aux séries de RIEMANN car $\dfrac{2C}{1+(n-a)^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2C}{n^2}$. Ainsi, $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge normalement sur $[-a;a]$, donc sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Par le théorème de dérivation des séries de fonctions, $x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = f(x) - \varphi(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc f est continue sur $\mathbb{R}$ par somme car φ est elle-même continue sur $\mathbb{R}$.

b. Pour $x \in \mathbb{R}$, $x+1 \in \mathbb{R}$ et $f(x+1) = \varphi(x+1) + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \big(\varphi(x+n+1) + \varphi(x-(n-1))\big)$ donc, puisque les deux séries convergent d'après la question précédente, on a $f(x+1) = \varphi(x+1) + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \varphi(x+n+1) + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \varphi(x-(n-1)$

d'où, en posant $m=n+1$ et $p=n-1$, $f(x+1)=\varphi(x+1)+\sum_{m=2}^{+\infty}\varphi(x+m)+\sum_{p=0}^{+\infty}\varphi(x-p)$. On obtient donc $f(x+1)=\sum_{m=1}^{+\infty}\varphi(x+m)+\varphi(x)+\sum_{p=1}^{+\infty}\varphi(x-p)=\varphi(x)+\sum_{n=1}^{+\infty}\varphi(x+n)+\sum_{n=1}^{+\infty}\varphi(x-n)=f(x)$ donc la fonction f est bien 1-périodique sur $\mathbb{R}$ comme attendu.

c. Comme g est continue sur le segment $[-1;1]$, d'après le théorème des bornes atteintes, g est bornée sur $[-1;1]$ et on peut poser $||g||_{\infty,[-1;1]}=M$. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $g(x)=g(x-\lfloor x\rfloor)$ car $\lfloor x\rfloor\in\mathbb{Z}$ et que g est 1-périodique donc $|g(x)|\leqslant M$. La fonction g est donc bornée sur $\mathbb{R}$ et $||g||_{\infty,\mathbb{R}}=M$.
Par conséquent, $\varphi\times g$ est continue sur $\mathbb{R}$ par produit et $|\varphi\times g|\leqslant M|\varphi|$ donc $\forall x\in\mathbb{R},\ |\varphi(x)g(x)|\leqslant\dfrac{CM}{1+x^2}$.
Comme la fonction $\psi : x\mapsto\dfrac{CM}{1+x^2}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$ par comparaison aux intégrales de RIEMANN car $\psi(x)\underset{\pm\infty}{=}O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, par comparaison, la fonction $\varphi\times g$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

La fonction fg est continue sur le segment $[0;1]$ donc $\int_0^1 fg$ existe et, par linéarité de l'intégrale, on obtient la relation $\int_0^1 f(x)g(x)dx=\int_0^1\varphi(x)g(x)dx+\int_0^1\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)g(x)\Big)dx$. Pour tout $n\geqslant 1$ et tout $x\in[0;1]$, $|u_n(x)g(x)|\leqslant\big(|\varphi(x+n)|+|\varphi(x-n)|\big)\,|g(x)|\leqslant\Big(\dfrac{C}{1+(x+n)^2}+\dfrac{C}{1+(x-n)^2}\Big)\,|g(x)|$ par inégalité triangulaire.
Ainsi, $|u_n(x)g(x)|\leqslant\Big(\dfrac{CM}{1+n^2}+\dfrac{CM}{1+(n-1)^2}\Big)$ donc $||u_ng||_{\infty,[0;1]}\leqslant\Big(\dfrac{CM}{1+n^2}+\dfrac{CM}{1+(n-1)^2}\Big)$ ce qui prouve une nouvelle fois par comparaison aux séries de RIEMANN que $\sum_{n\geqslant 1}u_ng$ converge normalement sur $[0;1]$. Par le théorème d'intégration terme à terme sur segment, on a donc $\int_0^1\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)g(x)\Big)dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 u_n(x)g(x)dx$.
Mais $\int_0^1 u_n(x)g(x)dx=\int_0^1\big(\varphi(x+n)+\varphi(x-n)\big)g(x)dx=\int_0^1\varphi(x+n)g(x)dx+\int_0^1\varphi(x-n)g(x)dx$ par linéarité de l'intégrale puis, en posant les changements de variable $u=x+n$ et $v=x-n$ on arrive à $\int_0^1 u_n(x)g(x)dx=\int_n^{n+1}\varphi(u)g(u-n)du+\int_{-n}^{-n+1}\varphi(u)g(v+n)du=\int_n^{n+1}\varphi(u)g(u)du+\int_{-n}^{-n+1}\varphi(u)g(v)du$ car g est 1-périodique et $\int_0^1 f(x)g(x)dx=\int_0^1\varphi(x)g(x)dx+\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\int_n^{n+1}\varphi(u)g(u)du+\int_{-n}^{-n+1}\varphi(u)g(v)du\Big)$.
Enfin, on a $\int_0^1 f(x)g(x)dx=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_n^{n+1}\varphi(u)g(u)du$ et, par CHASLES, $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)g(x)dx=\int_0^1 f(x)g(x)dx$.

45 **a.** f est définie comme la somme de la série entière lacunaire $\sum_{n\geqslant 0}a_nx^n$ où $a_n=1$ si n est un carré et $a_n=0$ sinon. Comme $(a_nx^n)_{n\geqslant 0}$ est bornée si et seulement si $(a_{n^2}x^{n^2})_{n\geqslant 0}$ l'est, c'est-à-dire si et seulement si $|x|\leqslant 1$, la rayon de R de cette série entière vaut $R=1$. Pour $x=\pm 1$, cette série est grossièrement divergente donc le domaine de définition de f vaut $I=]-1;1[$.

b. En tant que somme d'une série entière de rayon 1, d'après le cours, f est de classe C^∞ sur son intervalle ouvert de convergence, donc a fortiori continue sur I.

c. Comme on étudie f au voisinage de 1, on peut se contenter de prendre $x\in]0;1[$, et de poser la fonction $h_x : t\mapsto x^{t^2}=e^{t^2\ln(x)}$ qui est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par comparaison aux intégrales de RIEMANN car $h_x(t)=e^{t^2\ln(x)}\underset{+\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées ($\ln(x)<0$).

Comme la fonction h_x est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, on a $\forall k\geqslant 1,\ \int_k^{k+1}h_x(t)dt\leqslant x^{k^2}=h_x(k)\leqslant\int_{k-1}^k h_x(t)dt$.

On somme pour k allant de 0 à $+\infty$ à gauche et de 1 à $+\infty$ à droite (l'intégrale et la série convergent) ce qui donne par CHASLES l'encadrement $\int_0^{+\infty} x^{t^2}dt \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} x^{t^2}dt + h_x(0) = \int_0^{+\infty} x^{t^2}dt + 1$.

En posant $t = \dfrac{u}{\sqrt{-\ln(x)}} = \varphi(u)$, φ étant une bijection strictement croissante de classe C^1 de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, par changement de variable, on a $\int_0^{+\infty} x^{t^2}dt = \int_0^{+\infty} e^{t^2\ln(x)}dt = \dfrac{1}{\sqrt{-\ln(x)}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{-\pi}{\ln(x)}}$ d'après l'intégrale de GAUSS rappelée. Ainsi, on a l'équivalent $f(x) \underset{1^-}{\sim} \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{-\pi}{\ln(x)}}$ car $1 \underset{1^-}{=} o\left(\sqrt{\dfrac{1}{-\ln(x)}}\right)$ puisque $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{-\pi}{\ln(x)}} = +\infty$.

46 **a.** Soit $x \in \mathbb{R}$, traitons deux cas selon le signe de x :

Si $x \leqslant 0$, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(x)$ diverge grossièrement.

Si $x > 0$, $f_n(x) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ par croissances comparées donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(x)$ converge absolument donc converge par comparaison aux séries de RIEMANN.

Ainsi, le domaine de définition D_f de la fonction f vaut $D_f = \mathbb{R}_+^*$.

b. Si $a > 0$, comme f_n est décroissante positive sur $[a;+\infty[$, on a $||f_n||_{\infty,[a;+\infty[} = f_n(a) = e^{-a\sqrt{n}}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} e^{-a\sqrt{n}}$ converge car $a \in D_f$ donc la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur $[a;+\infty[$.

c. Toutes les fonctions f_n sont continues sur $[a;+\infty[$ et par convergence normale (donc uniforme) de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ sur $[a;+\infty[$, on a la continuité de f sur $[a;+\infty[$ donc sur $\mathbb{R}_+^*$ (puisque c'est vrai pour tout $a > 0$).

Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \delta_{n,0}$ et qu'on a convergence normale donc uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ sur $[1;+\infty[$, on peut appliquer le théorème de la double limite pour affirmer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 1$.

d. Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$, on a décroissance de $g_x : t \mapsto e^{-x\sqrt{t}}$, on intègre l'inégalité $g_x(n) = f_n(x) \leqslant g_x(t)$ sur $[n-1;n]$ et l'inégalité $g_x(t) \leqslant g_x(n) = f_n(x)$ sur $[n;n+1]$ pour avoir, par croissance de l'intégrale, l'encadrement $\int_n^{n+1} e^{-x\sqrt{t}}dt \leqslant f_n(x) \leqslant \int_{n-1}^{n} e^{-x\sqrt{t}}dt$ (1).

La fonction g_x est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car $e^{-x\sqrt{t}} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ puisque $\lim\limits_{t\to+\infty} (\sqrt{t})^4 e^{-x\sqrt{t}} = 0$. L'inégalité de gauche dans (1) est aussi vraie pour $n = 0$, on somme toutes ces inégalités pour $n \in \mathbb{N}$ (la série et l'intégrale convergent) et on a par relation de CHASLES la minoration $\int_0^{+\infty} g_x(t)dt \leqslant f(x)$ de $f(x)$. De même à droite dans (1) en sommant pour $n \in \mathbb{N}^*$, et on obtient la majoration $f(x) - 1 \leqslant \int_0^{+\infty} g_x(t)dt$.

Ainsi, on arrive à l'encadrement $\int_0^{+\infty} g_x(t)dt \leqslant f(x) \leqslant 1 + \int_0^{+\infty} g_x(t)dt$ de $f(x)$.

On effectue dans cette dernière intégrale le changement de variable $t = \varphi(u) = u^2$ avec φ qui est bien bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, strictement croissante, de classe C^1, et on a $\int_0^{+\infty} g_x(t)dt = 2\int_0^{+\infty} ue^{-xu}du$. On effectue une intégration par parties en posant $a(u) = u$ et $b(u) = -\dfrac{e^{-xu}}{x}$ avec a et b qui sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ avec $\lim\limits_{u\to+\infty} a(u)b(u) = 0$ et on a $\int_0^{+\infty} g_x(t)dt = 2\left[-\dfrac{ue^{-xu}}{x}\right]_0^{+\infty} + \dfrac{2}{x}\int_0^{+\infty} e^{-xu}du = \dfrac{2}{x}\left[-\dfrac{e^{-xu}}{x}\right]_0^{+\infty} = \dfrac{2}{x^2}$.

Ainsi, $\dfrac{2}{x^2} \leqslant f(x) \leqslant 1 + \dfrac{2}{x^2}$ et, comme $1 + \dfrac{2}{x^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2}{x^2}$, par encadrement, on a l'équivalent $f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{2}{x^2}$.

e. Comme f_n est décroissante positive et continue sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $||f_n||_{\infty,\mathbb{R}_+^*} = f(0) = 1$ et la série numérique

$\sum_{n\geqslant 0} 1$ diverge donc la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+^*$.

Si on avait convergence uniforme de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ sur D_f, comme 0 est adhérent à D_f et que toutes les fonctions f_n admettent des limites finies $\ell_n = \lim_{x\to 0^+} f_n(x) = 1$, on aurait la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} \ell_n$ d'après le théorème de la double limite. Comme la série $\sum_{n\geqslant 0} 1$ diverge, on n'a pas non plus convergence uniforme de $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ sur $D_f = \mathbb{R}_+^*$.

47 **a.** La série alternée $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ converge par le critère spécial des séries alternées car la suite $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et tend vers 0. Par conséquent, le reste d'ordre n de $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$, noté ici $u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$ existe bien pour tout $n \geqslant 1$, ce qui prouve que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est bien définie. En notant $S = \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$ la somme de la série et $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$ les sommes partielles, on a $u_n = S - S_n$ et $\lim_{n\to+\infty} S_n = S$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ (comme pour toute suite de restes d'une série numérique convergente).

b. Le critère spécial des séries alternées nous apprend aussi que u_n est du signe de son premier terme donc de $(-1)^n$. Ainsi, $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n} u_n$ est un terme positif. Enfin, on déduit encore du critère spécial des séries alternées que $|u_n| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ donc $|v_n| \leqslant \dfrac{1}{n\sqrt{n+1}} \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$ donc $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge par comparaison à une série de RIEMANN car $\dfrac{3}{2} > 1$.

c. Comme $S_n = S - u_n$, on a $w_n = \dfrac{(-1)^n S}{n} - \dfrac{(-1)^n}{n} u_n = \dfrac{(-1)^n S}{n} - v_n$. Comme la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n S}{n}$ converge par le critère spécial des séries alternées car $\left(\dfrac{S}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et tend vers 0 et que $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge d'après la question précédente, par somme, la série $\sum_{n\geqslant 1} w_n$ converge.

d. On a $x_n = (-1)^n w_n = \dfrac{S}{n} - (-1)^n v_n$. Comme $\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n v_n$ converge puisque $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge absolument d'après **b.** et que la série harmonique $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{S}{n}$ diverge par RIEMANN, par somme, $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ diverge.

48 **a.** Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on a $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 0$ par croissances comparées donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$.

b. $f_0 : x \mapsto e^{-x}$ est décroissante et positive sur $\mathbb{R}_+$ donc $||f_0||_{\infty,\mathbb{R}_+} = f_0(0) = 1$.

Pour $n \geqslant 1$, la fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x \geqslant 0,\ f_n'(x) = -\dfrac{e^{-x}x^n}{n!} + \dfrac{e^{-x}x^{n-1}}{(n-1)!} = \dfrac{x^{n-1}e^{-x}}{n!}(n-x)$ donc f_n est positive, croissante sur $[0;n]$ et décroissante sur $[n;+\infty[$ donc $||f_n||_{\infty,\mathbb{R}_+} = f_n(n) = \dfrac{e^{-n}n^n}{n!}$.

D'après la formule de STIRLING, $||f_n||_{\infty,\mathbb{R}_+} = \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi n}}$ donc $\lim_{n\to+\infty} ||f_n||_{\infty,\mathbb{R}_+} = 0$, ce qui montre la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$.

c. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on sait que la série entière exponentielle converge sur $\mathbb{R}$ et qu'on a $\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!} = e^x$ donc, en multipliant par e^{-x}, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{e^{-x}x^n}{n!} = f(x) = 1$. On a donc convergence simple de $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ sur $\mathbb{R}_+$ et sa fonction somme est constante égale à 1.

d. Soit $a > 0$, d'après l'étude de fonction de la question **b.**, dès que $n \geqslant a$, la fonction f_n est croissante et positive sur $[0;a]$ donc $||f_n||_{\infty,[0;a]} = f_n(a) = \dfrac{e^{-a}a^n}{n!}$ et, d'après **c.**, la série $\sum\limits_{n\geqslant a} \dfrac{e^{-a}a^n}{n!}$ converge. Ainsi, $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur $[0;a]$. Par contre, comme la série de Riemann $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi n}}$ diverge, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.

e. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n admet une limite finie en $+\infty$ par croissances comparées, il s'agit de $\ell_n = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$. Si on avait convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ sur $\mathbb{R}_+$, d'après le théorème de la double limite, on aurait $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \ell_n = 0$ ce qui est absurde puisque $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = 1$. Il ne saurait y avoir convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ sur $\mathbb{R}_+$.

49 **a.** Soit $x \in [-1;1]$, traitons deux cas :

- Si $x = 0$, $f_n(0) = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$.
- Si $x \neq 0$, par croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty} nxe^{-nx^2} = 0 = \ell$ car $x^2 > 0$ donc, par continuité de la fonction sin en 0, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \sin(\ell) = 0$.

Par conséquent, la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers la fonction $F : x \to 0$ sur $[-1;1]$.

b. Soit $a \in]0;1[$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [a;1]$, alors $0 \leqslant nxe^{-nx^2} \leqslant ne^{-na^2}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} ne^{-na^2} = 0$ par croissances comparées, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geqslant n_0,\ ne^{-na^2} \leqslant \frac{\pi}{2}$. Par croissance de $\sin$ sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, $\forall n \geqslant n_0,\ 0 \leqslant f_n(x) \leqslant \sin(ne^{-na^2})$ donc $||f_n - F||_{\infty,[a;1]} = ||f_n||_{\infty,[a;1]} \leqslant \sin(ne^{-na^2})$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin(ne^{-na^2}) = 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} ||f_n - F||_{\infty,[a;1]} = 0$ d'où, par définition, la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ vers la fonction F sur tout $[a;1]$ avec $a \in]0;1[$.

c. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = \sin\left(e^{-1/n}\right) \geqslant \sin(e^{-1})$ car $\sin$ est croissante sur $[e^{-1};1[$ donc, comme $||f_n||_{\infty,[-1;1]} \geqslant f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) \geqslant \sin(e^{-1})$ puisque $\dfrac{1}{n} \in [-1;1]$, la suite $\left(||f_n||_{\infty,[-1;1]}\right)_{n\geqslant 1}$ ne tend pas vers 0 et la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ ne converge pas uniformément vers la fonction F sur $[-1;1]$.

ORAUX 2024 THÈME 4 ESPACES VECTORIELS NORMÉS

50

51

52

53 **a.** Les matrices $-I_n$ et I_n sont orthogonales et pourtant $[-I_n; I_n] \not\subset O(n)$ car la matrice nulle 0_n n'est pas orthogonale et $O_n \in [-I_n; I_n]$ car $O_n = \frac{1}{2}.I_n + \frac{1}{2}(-I_n)$ avec $\frac{1}{2} \in [0; 1]$ et $\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$.

On en déduit que $O(n)$ n'est pas convexe.

b. Considérons $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ normé par la norme euclidienne associée au produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donné par $(A, B) \mapsto \text{Tr}\ (A^T B)$. C'est un choix mais tous les choix se valent car toutes les normes sont équivalentes puisqu'on est en dimension finie.

Pour toute matrice $M \in O(n)$, on a $M^T M = I_n$ donc $||M||^2 = \text{Tr}\ (M^T M) = \text{Tr}\ (I_n) = n$ et $||M|| = \sqrt{n}$ donc $O(n)$ est inclus dans la sphère de centre O_n et de rayon $\sqrt{n}$, ce qui prouve déjà que $O(n)$ est borné.

Soit une suite $(M_k)_{k\in\mathbb{N}} \in O(n)^{\mathbb{N}}$ de matrices orthogonales qui converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers une matrice M. On a donc $\forall k \in \mathbb{N},\ M_k^T M_k = I_n$. $\varphi : A \mapsto (A^T, A)$ et $\psi : (A, B) \mapsto AB$ sont respectivement linéaires et bilinéaires en dimension finie donc continues d'où $f = \psi \circ \varphi : A \mapsto A^T A$ est continue par composition. Par caractérisation séquentielle de la continuité, la suite $(f(M_k))_{k\geqslant 0}$ converge vers $f(M)$ mais cette suite est constante et vaut I_n donc $f(M) = M^T M = I_n$ d'où $M \in O(n)$. Ainsi, $O(n)$ est fermé.

c. Soit $v_1 = \frac{1}{3}\big(2, 1, 2\big)$, $v_2 = \frac{1}{3}\big(2, -2, -1\big)$, $v_3 = \frac{1}{3}\big(1, 2, -2\big)$ les vecteurs dont les coordonnées sont dans les colonnes de A. Comme $(v_1|v_2) = \frac{1}{9}\big(4 - 2 - 2\big) = (v_1|v_3) = \frac{1}{9}\big(2 + 2 - 4\big) = (v_2|v_3) = \frac{1}{9}\big(2 - 4 + 2\big) = 0$ et que $||v_1||^2 = ||v_2||^2 = ||v_3||^2 = \frac{1}{9}\big(4 + 4 + 1\big) = 1$, (v_1, v_2, v_3) est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ donc $A \in O(3)$. De plus, $\det(A) = \frac{1}{27}\big(8 + 8 - 1 + 4 + 4 + 4\big) = 1$ donc $A \in SO(3)$. Comme A n'est pas symétrique, A représente une "vraie" rotation d'angle $\theta \in]0; 2\pi[$ tel que $\text{Tr}\ (A) = 1 + 2\cos(\theta) = -\frac{2}{3}$ donc $\theta = \pm\,\text{Arccos}\left(-\frac{5}{6}\right)$. Comme $A - I_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix}$, pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, le système $AX = X$ équivaut à $\begin{cases} -x + 2y + z &= 0\ (1) \\ x - 5y + 2z &= 0\ (2) \\ 2x - y - 5z &= 0\ (3) \end{cases}$. En faisant $(2) \longleftarrow (2) + (1)$ et $(3) \longleftarrow (3) + 2(1)$, on a $AX = X \Longleftrightarrow \begin{cases} -x + 2y + z &= 0\ (1) \\ -3y + 3z &= 0\ (2') \\ 3y - 3z &= 0\ (3') \end{cases}$. Par conséquent, on a $AX = X \Longleftrightarrow (x = 3z,\ y = z)$ et $E_1(A) = \text{Vect}(u)$ avec $u = (3, 1, 1)$. Prenons $v = (1, 0, 0)$, alors u et v ne sont pas colinéaires et on sait que $\sin(\theta)$ est du signe de $[v, Av, u] = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}$ donc $\sin(\theta) < 0$.

Ainsi, A est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la rotation d'angle $\theta = -\,\text{Arccos}\left(-\frac{5}{6}\right) \sim -146,4^{\text{o}}$ autour de l'axe orienté par le vecteur $u = (3, 1, 1)$.

54 **a.** L'application Φ est bien définie et elle est linéaire car si $\lambda \in \mathbb{C}$ et $(P, Q) \in \mathbb{C}_n[X]$, on a la relation $\Phi(\lambda P + Q) = \big((\lambda P + Q)(a_0), \cdots, (\lambda P + Q)(a_n)\big) = \big(\lambda P(a_0) + Q(a_0), \cdots, \lambda P(a_n) + Q(a_n)\big)$ qui se transforme en $\Phi(\lambda P + Q) = \lambda\big(P(a_0), \cdots, P(a_n)\big) + \big(Q(a_0), \cdots, Q(a_n)\big) = \lambda\Phi(P) + \Phi(Q)$.

De plus, si $P \in \mathrm{Ker}(\Phi)$, on a $\forall k \in [\![0; n]\!],\ P(a_k) = 0$ donc P admet $n+1$ racines distinctes alors que $\deg(P) \leqslant n$. On sait qu'alors $P = 0$. Ainsi, Φ est injective donc, comme $\dim(\mathbb{C}_n[X]) = \dim(\mathbb{C}^{n+1}) = n + 1$, Φ est un isomorphisme, en particulier c'est une bijection.

b. Pour $i \in [\![0; n]\!]$, soit le vecteur e_i de la base canonique de $\mathbb{C}^n$, puisque Φ est une bijection, il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{C}_n[X]$ tel que $\Phi(L_i) = e_i$, il s'agit de $L_i = \Phi^{-1}(e_i)$. Par définition de Φ, on a $\Phi(L_i) = (L_i(a_0), \cdots, L_i(a_n)) = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$ donc $L_i(a_i) = 1$ et $\forall j \in [\![0; n]\!] \setminus \{i\},\ L_i(a_j) = 0$.

D'après le cours, on a même $L_i = \prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \dfrac{X - a_j}{a_i - a_j}$ (polynômes de LAGRANGE).

c. Comme $\chi_M \in \mathbb{C}_n[X]$ et $\Phi(\chi_M) = \big(\chi_M(a_0), \cdots, \chi_M(a_n)\big) = \sum\limits_{k=0}^{n} \chi_M(a_k)e_k = \sum\limits_{k=0}^{n} \chi_M(a_k)\Phi(L_k)$, par linéarité et bijectivité de Φ, on a $\Phi(\chi_M) = \Phi\Big(\sum\limits_{k=0}^{n} \chi_M(a_k)L_k\Big)$ donc $\chi_M = \sum\limits_{k=0}^{n} \chi_M(a_k)L_k$.

d. Pour $k \in [\![0; n]\!]$, l'application $f_k : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ définie par $f_k(M) = \chi_M(a_k) = \det(a_kI_n - M)$ est continue car polynomiale en les coefficients de M. Or, d'après **c.**, $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ f(M) = \chi_M = \sum\limits_{k=0}^{n} \chi_M(a_k)L_k$ donc $f = \sum\limits_{k=0}^{n} f_kL_k$ est continue en tant que somme de fonctions continues.

e. Considérons deux cas :

- Si A est inversible, alors $BA = A^{-1}(AB)A$ donc AB et BA sont semblables. Directement, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
- Si A n'est inversible, comme χ_A n'admet qu'un nombre fini de racines car $\deg(\chi_A) = n$, la matrice A n'admet qu'un nombre fini de valeurs propres. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, puisque $A - \dfrac{I_n}{p}$ n'est pas inversible si et seulement $\dfrac{1}{p}$ est valeur propre de A, il existe $p_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall p \geqslant p_0,\ A_p = A - \dfrac{I_n}{p} \in GL_n(\mathbb{C})$. D'après le premier cas, comme $A_pB = AB - \dfrac{B}{p} = BA_p$, on en déduit que $\chi_{A_pB} = \chi_{BA_p}$. Comme les deux applications $\varphi_B : M \mapsto MB$ et $\psi_B : M \mapsto BM$ sont linéaires en dimension finie, elles sont continues donc, puisque $\lim\limits_{p\to+\infty} A_p = A$, on a $\lim\limits_{p\to+\infty} \varphi_B(A_p) = \varphi_B(A)$ et $\lim\limits_{p\to+\infty} \psi_B(A_p) = \psi_B(A)$ par caractérisation séquentielle de la continuité. Ainsi, $\lim\limits_{p\to+\infty} A_pB = AB$ et $\lim\limits_{p\to+\infty} BA_p = BA$. Par conséquent, comme f est continue, il vient $\lim\limits_{p\to+\infty} f(A_pB) = f(AB)$ et $\lim\limits_{p\to+\infty} f(BA_p) = f(BA)$. Pour $p \geqslant p_0$, $f(A_pB) = f(BA_p)$ d'après ce qui précède, donc $f(AB) = f(BA) = \lim\limits_{p\to+\infty} f(A_pB) = \chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Dans les deux cas, on a bien le résultat attendu, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

55 Par définition, même si ce n'est plus au programme depuis 2021, $\overset{\circ}{X}$ est la partie de E qui est composée des points intérieurs à X.

a. • Soit $x \in \overset{\circ}{X}$, par définition $\exists r > 0,\ B(x, r) \subset X$. Mais comme $x \in B(x, r)$, on a $x \in X$. Ainsi, $\overset{\circ}{X} \subset X$.

• Soit $x \in X$, pour tout réel $r > 0$, $B(x, r) \cap X \neq \emptyset$ car $x \in B(x, r) \cap X$. Ainsi, x est adhérent à X donc $x \in \overline{X}$. Par conséquent, $X \subset \overline{X}$.

b. • Soit $(a,b) \in (\mathring{C})^2$, montrons que $[a;b] \subset \mathring{C}$. Par définition, il existe deux réels $r_a > 0$ et $r_b > 0$ tels que $B(a,r_a) \subset C$ et $B(b,r_b) \subset C$. Posons alors $r = \text{Min}(r_a,r_b) > 0$. Soit $\lambda \in [0;1]$, posons $c = \lambda a + (1-\lambda)b$ et montrons que c est intérieur à C. Soit $x \in B(c,r_c)$, posons $y = x - c$ de sorte que $||y|| < r_c$ donc $||y|| < r_a$ et $||y|| < r_b$ ce qui montre que $a+y \in B(a,r_a)$ et $b+y \in B(b,r_b)$. Comme $B(a,r_a) \subset$ et $B(b,r_b) \subset C$, on a donc $(a+y,b+y) \in C^2$ donc, par convexité de C, $\lambda(a+y)+(1-\lambda)(b+y) \in C$. Or, $\lambda(a+y)+(1-\lambda)(b+y) = c+y$ donc $c+y \in C$. On en déduit que $B(c,r_c) \subset C$ donc $c \in \mathring{C}$ donc $[a;b] \subset \mathring{C}$. Par conséquent, $\mathring{C}$ est un convexe.

• Soit $(a,b) \in (\overline{C})^2$, montrons que $[a;b] \subset \overline{C}$. Par définition, pour tout réel $r > 0$, $B(a,r) \cap C \neq \emptyset$ et $B(b,r) \cap C \neq \emptyset$ de sorte qu'il existe deux vecteurs $x \in B(a,r) \cap C$ et $y \in B(b,r) \cap C$. Soit $\lambda \in [0;1]$, posons $c = \lambda a + (1-\lambda)b$ et $z = \lambda x + (1-\lambda)y$, alors $||c-z|| = ||\lambda(a-x)+(1-\lambda)(b-y)|| \leqslant |\lambda|\,||a-x||+|1-\lambda|\,||b-y||$ donc, comme $\lambda \geqslant 0$ et $1-\lambda \geqslant 0$, on a $||c-z|| < \lambda r + (1-\lambda)r = r$ donc $z \in B(c,r)$ car $\lambda > 0$ ou $1-\lambda > 0$. Or $z = \lambda x + (1-\lambda)y$ donc $z \in C$ car $(x,y) \in C^2$ et que C est convexe, ce qui prouve que $B(c,r) \cap C \neq \emptyset$ donc $c \in \overline{C}$. Par conséquent, $[a;b] \subset \overline{C}$ et $\overline{C}$ est un convexe.

56 **a.** E est non vide car $0 \in E$ et, si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(f,g) \in E^2$, la fonction $\lambda f + g$ est de classe C^1 sur $[0;1]$par opérations et $(\lambda f + g)(0) = \lambda f(0) + g(0) = \lambda.0 + 0 = 0$ donc $\lambda f + g \in E$. Ainsi, E est un sous-espace vectoriel de $C^1([0;1],\mathbb{R})$ donc est lui-même un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Homogénéité : soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in E$, comme la norme infinie $||\,.\,||_{\infty,[0;1]}$ est une norme sur $C^0([0;1],\mathbb{R})$ d'après le cours, donc a fortiori sur E qui en est un sous-espace vectoriel, par linéarité de la dérivation, on a $N_1(\lambda f) = ||\lambda f + (\lambda f)'||_\infty = ||\lambda(f+f')||_\infty = |\lambda|\,||f+f'||_\infty = |\lambda|\,N_1(f)$.

De même, $N_2(\lambda f) = ||(\lambda f)'||_\infty = ||\lambda f'||_\infty = |\lambda|\,||f'||_\infty = |\lambda|\,N_2(f)$.

Inégalité triangulaire : soit $(f,g) \in E^2$, par linéarité de la dérivation et car $||\,.\,||_{\infty,[0;1]}$ est une norme sur E, $N_1(f+g) = ||(f+g)+(f+g)'||_\infty = ||f+g+f'+g'||_\infty = ||(f+f')+(g+g')||_\infty \leqslant ||f'||_\infty + ||g'||_\infty = N_1(f)+N_1(g)$.
De même, $N_2(f+g) = ||(f+g)'||_\infty = ||f'+g'||_\infty \leqslant ||f'||_\infty + ||g'||_\infty = N_2(f)+N_2(g)$.

Séparation pour N_1 : soit $f \in E$ telle que $N_1(f) = 0$, alors $f'+f = 0$ car $||\,.\,||_{\infty,[0;1]}$ est une norme. On sait résoudre cette équation différentielle sur l'intervalle $[0;1]$ et il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in [0;1],\ f(x) = Ce^{-x}$. Mais $f \in E$ donc $f(0) = C = 0$ et on a bien $f = 0$.

Séparation pour N_2 : soit $f \in E$ telle que $N_2(f) = 0$, alors $f' = 0$ car $||\,.\,||_{\infty,[0;1]}$ est une norme. Comme $[0;1]$ est un intervalle, $\exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in [0;1],\ f(x) = C$. Mais $f \in E$ donc $f(0) = C = 0$ et on a bien $f = 0$.

Les deux applications N_1 et N_2 sont donc bien des normes sur E.

b. Domination de N_2 par N_1 : soit $f \in E$, posons $g = f + f'$. On sait résoudre l'équation homogène (E_0) : $y' + y = 0$ dont les solutions sur l'intervalle $[0;1]$ sont les fonctions $y : x \mapsto \lambda e^{-x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Par variation de la constante, on trouve classiquement que les solutions de (E) : $y' + y = g$ sont les fonctions $y : x \mapsto \lambda e^{-x} + e^{-x}\displaystyle\int_0^x e^t g(t)dt$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Or f est solution de cette équation mais vérifie aussi $f(0) = 0$ car $f \in E$ donc $\lambda = 0$ et $\forall x \in [0;1],\ f(x) = e^{-x}\displaystyle\int_0^x e^t g(t)dt$ donc $f'(x) = g(x) - f(x) = g(x) - e^{-x}\displaystyle\int_0^x e^t g(t)dt$. Ainsi, comme $\forall x \in [0;1],\ |g(x)| \leqslant N_1(f)$ et qu'on a $|f'(x)| \leqslant |g(x)| + e^{-x}\displaystyle\int_0^x e^t|g(t)|dt$ par inégalité triangulaire, on trouve $|f'(x)| \leqslant \left(1 + e^{-x}\displaystyle\int_0^x e^t dt\right)N_1(f) = (2-e^{-x})N_1(f) \leqslant 2N_1(f)$. Ainsi, $N_2(f) \leqslant 2N_1(f)$.

Domination de N_1 par N_2 : soit $f \in E$ et $x \in [0;1]$, alors $f(x) = \int_0^x f'(t)dt$ d'où, par inégalité triangulaire, la majoration $|f(x)| \leqslant \int_0^x |f'(t)|dt \leqslant xN_2(f) \leqslant N_2(f)$. De plus, $|(f+f')(x)| = |f(x)+f'(x)| \leqslant |f(x)| + |f'(x)|$ par inégalité triangulaire donc $|(f+f')(x)| \leqslant 2N_2(f)$ car $|f'(x)| \leqslant N_2(f)$. Par conséquent, on a $N_1(f) \leqslant 2N_2(f)$.
Par définition, comme N_1 domine N_2 et N_2 domine N_1, les normes N_1 et N_2 sont équivalentes.

ORAUX 2024 THÈME 5
RÉDUCTION

57 **a.** Si A est diagonalisable, il existe $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonale telles que $A = QDQ^{-1}$. Par une récurrence classique, on montre que $\forall k \in \mathbb{N},\ A^k = QD^kQ^{-1}$ donc, si $P = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, on a $P(A) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k A^k = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k Q D^k Q^{-1} = Q\Big(\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k D^k\Big)Q^{-1} = QD'Q^{-1}$ avec $D' = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k D^k$ diagonale donc, par définition, $P(A)$ est diagonalisable.

b. Si A est diagonalisable à valeurs propres distinctes, notons $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres distinctes de A et notons u l'endomorphisme canoniquement associé à A. Soit $U \in GL_n(\mathbb{C})$ et $\mathcal{B}$ la base de $\mathbb{C}^n$ telle que U soit la matrice de passage entre la base canonique $\mathcal{B}_0$ de $\mathbb{C}^n$ et la base $\mathcal{B}$.

Par la formule de changement de base, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = U^{-1}AU$ donc $U^{-1}AU$ est diagonale si et seulement si la base $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{C}^n$ constituée de vecteurs propres de A.

Notons $v_1, \cdots, v_n$ des vecteurs propres de u associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. Comme les valeurs propres sont distinctes, les seuls vecteurs propres de u sont des vecteurs non nuls colinéaires à l'un des v_k car tous les sous-espaces propres sont des droites. Ainsi, une matrice inversible $U \in GL_n(\mathbb{C})$ vérifie $U^{-1}AU$ diagonale si et seulement s'il existe une permutation σ de $[\![1;n]\!]$ et des complexes non nuls $\alpha_1, \cdots \alpha_n$ tels que $U = \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\alpha_1 v_{\sigma(1)}, \cdots, \alpha_n v_{\sigma(n)})$.

c. Si A et B sont simultanément diagonalisables, il existe une matrice $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = QDQ^{-1}$ et $B = QD'Q^{-1}$ avec D et D' diagonales. Si les valeurs propres de B sont toutes distinctes, notons-les $\beta_1, \cdots, \beta_n$, on peut choisir Q de sorte que $D' = \text{diag}(\beta_1, \cdots, \beta_n)$. Si on note alors $D = \text{diag}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, et qu'on prend l'unique polynôme d'interpolation de Lagrange $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $\forall k \in [\![1;n]\!],\ P(\beta_k) = \alpha_k$, qui est donné par la formule $P = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \prod\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \dfrac{X - \beta_i}{\beta_k - \beta_i}$, on a donc $P(D') = \text{diag}(P(\beta_1), \cdots, P(\beta_n)) = D$ donc, puisque $P(B) = QP(D')Q^{-1}$ comme en **a.**, on trouve bien $A = QDQ^{-1} = QP(D')Q^{-1} = P(B)$.

d. Si A et B sont simultanément diagonalisables, il existe une matrice $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = QDQ^{-1}$ et $B = QD'Q^{-1}$ avec D et D' diagonales. Posons $\Delta = \text{diag}(1, 2, \cdots, n)$ et $C = Q\Delta Q^{-1}$. D'après **c.**, comme les valeurs propres de C sont distinctes et que A et C sont simultanément diagonalisables, il existe $P_A \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A = P_A(C)$. De même, comme les valeurs propres de C sont distinctes et que B et C sont simultanément diagonalisables, il existe $P_B \in \mathbb{C}[X]$ tel que $B = P_B(C)$.

e. .

f. Les valeurs propres de A sont -1 et -4. S'il existait une matrice $R \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A = R^2$ et si on note λ une valeur propre complexe de R (il en existe d'après le théorème de d'Alembert-Gauss), alors λ^2 est valeur propre de R donc de A et $\lambda \in \{i, -i, 2i, 2i\}$. Mais comme R est une matrice réelle, si $\lambda \in \text{Sp}(R)$, alors $\overline{\lambda} \in \text{Sp}(A)$. Ainsi, $\text{Sp}(R) = \{i, -i\}$ ou $\text{Sp}(R) = \{2i, -2i\}$ ce qui est incompatible avec le fait que -1 et

-4 sont des valeurs propres de R^2. La matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ n'est pas un carré dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

g. Supposons $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible.

($\Longrightarrow$) Si A est diagonalisable, pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, $A^k = X^k(A)$ est diagonalisable d'après la question **a.**. On a donc ($\exists k \in \mathbb{N}^*$, A^k est diagonalisable et même $\forall k \in \mathbb{N}^*$, A^k est diagonalisable.

($\Longleftarrow$) S'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que A^k est diagonalisable, en notant $\mu_1, \cdots, \mu_r$ les valeurs propres distinctes (et non nulles car A^k est aussi inversible) de A^k, on sait que $P = \prod_{i=1}^{i}(X - \mu_i)$ est annulateur de A^k donc $\prod_{i=1}^{r}(A^k - \mu_i I_n) = 0$ ce qui s'écrit aussi $\prod_{i=1}^{r}\prod_{p=0}^{k-1}(A - \delta_i \omega_k^p I_n) = 0$ en notant δ_i une des racines k-ième de μ_i dans $\mathbb{C}$ et $\omega_k = e^{\frac{2i\pi}{k}}$ la première racine primitive k-ième de l'unité. Ainsi, le polynôme $P = \prod_{i=1}^{r}\prod_{p=0}^{k-1}(X - \delta_i \omega_k^p)$ est annulateur de A et scindé à racines simples car $\forall i \in [\![1;r]\!]$, $\forall (p,p') \in [\![0;k-1]\!]^2$, $p \neq p' \Longrightarrow \delta_i \omega_k^p \neq \delta_i \omega_k^{p'}$ car $\delta_i \neq 0$ et $\forall (i,i') \in [\![1;r]\!]$, $\forall (p,p') \in [\![0;k-1]\!]^2$, $i \neq i' \Longrightarrow \delta_i \omega_k^p \neq \delta_{i'} \omega_k^{p'}$ car $\delta_i^k = \mu_i \neq \mu_{i'} = \delta_{i'}^k$. Ainsi, la matrice A est diagonalisable.

Par double implication, si A est inversible, on a A diagonalisable $\Longleftrightarrow$ ($\exists k \in \mathbb{N}^*$, A^k diagonalisable).

58 Soit λ une valeur propre de A, il existe donc un vecteur $u \neq 0 \in \mathbb{C}^n$ tel que $Au = \lambda u$. Considérons un indice $p \in [\![1;n]\!]$ tel que $|u_p| = \underset{1 \leqslant i \leqslant n}{\mathrm{Max}} |u_i| = ||u||_\infty > 0$. Si on écrit la ligne p du système $Au = \lambda u$, on a $\sum_{j=1}^{n} a_{p,j}u_j = \lambda u_p$ qui s'écrit aussi $(\lambda - a_{p,p})u_p = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{n} a_{p,j}u_j$. En passant au module, par inégalité triangulaire, on a donc $|\lambda - a_{p,p}|\,|u_p| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{n} |a_{p,j}|\,|u_j| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{n} |a_{p,j}|\,|u_p|$ par définition de p. Comme $|u_p| > 0$, il vient $|\lambda - a_{p,p}| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{n} |a_{p,j}|$ et on a $\lambda \in \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z - a_{p,p}| < \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{n} |a_{p,j}| \right\}$. Mais comme p dépend de λ et n'est pas unique, on peut juste dire que le spectre de A est inclus dans une réunion de disque fermés, $\mathrm{Sp}(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z - a_{i,i}| < \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}| \right\}$. C'est le théorème de Gerschgorin.

59 **a.** D'abord, si $g \in \mathcal{L}(E)$, $\varphi_f^2(g) = \varphi_f(\varphi_f(g)) = f \circ (f \circ g - g \circ f) - (f \circ g - g \circ f) \circ f = f^2 \circ g - 2f \circ g \circ f + g \circ f^2$. Puis $\varphi_f^3(g) = \varphi_f(\varphi_f^2(g)) = f \circ (f^2 \circ g - 2f \circ g \circ f + g \circ f^2) - (f^2 \circ g - 2f \circ g \circ f + g \circ f^2) \circ f$ qu'on simplifie, après développement, en $\varphi_f^3(g) = f^3 \circ g - 3f^2 \circ g \circ f + 3f \circ g \circ f^2 - g \circ f^3$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall g \in \mathcal{L}(E)$, $\varphi_f^n(g) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} f^{n-k} \circ g \circ f^k$.
Pour $g \in \mathcal{L}(E)$, $\varphi_f^{n+1}(g) = \varphi_f(\varphi_f^n(g)) = f \circ \Big(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} f^{n-k} \circ g \circ f^k \Big) - \Big(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} f^{n-k} \circ g \circ f^k \Big) \circ f$ donc $\varphi_f^{n+1}(g) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} f^{n+1-k} \circ g \circ f^k - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} f^{n-k} \circ g \circ f^{k+1}$. Comme $\binom{n+1}{n} = 0$ et $\binom{n}{-1} = 0$, on a $\varphi_f^{n+1}(g) = \sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k \binom{n}{k} f^{n+1-k} \circ g \circ f^k - \sum_{j=1}^{n+1}(-1)^{j-1} \binom{n}{j-1} f^{n+1-j} \circ g \circ f^j$ en faisant le changement d'indice $j = k+1$ dans la seconde somme. En changeant j en k et en regroupant les sommes, on obtient la relation $\varphi_f^{n+1}(g) = \sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \right) f^{n+1-k} \circ g \circ f^k = \sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k \binom{n+1}{k} f^{n+1-k} \circ g \circ f^k$ avec la formule de Pascal. Comme $\forall g \in \mathcal{L}(E)$, $\varphi_f^n(g) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} f^{n-k} \circ g \circ f^k$ pour $n = 1$ par définition, pour $n = 2$ et $n = 3$ par le calcul précédent et même pour $n = 0$ car $\varphi_f^0(g) = \mathrm{id}_{\mathcal{L}(E)}(g) = g = \sum_{k=0}^{0}(-1)^k \binom{0}{k} f^{0-k} \circ g \circ f^k$,

on peut conclure par principe de récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall g \in \mathcal{L}(E),\ \varphi_f^n(g) = \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}f^{n-k}\circ g\circ f^k$.

b. Pour $(f,g)\in(\mathcal{L}(E))^2$ et $n\in\mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{n} f^k\circ(f\circ g - g\circ f)\circ f^{n-k} = \sum\limits_{k=0}^{n} f^{k+1}\circ g\circ f^{n-k} - \sum\limits_{k=0}^{n} f^k\circ g\circ f^{n+1-k}$ en développant puis $\sum\limits_{k=0}^{n} f^k\circ(f\circ g - g\circ f)\circ f^{n-k} = \sum\limits_{j=1}^{n+1} f^j\circ g\circ f^{n+1-j} - \sum\limits_{k=0}^{n} f^k\circ g\circ f^{n+1-k}$ en posant $j=k+1$ dans la première somme ce qui devient, après télescopage, $\sum\limits_{k=0}^{n} f^k\circ(f\circ g - g\circ f)\circ f^{n-k} = f^{n+1}\circ g - g\circ f^{n+1}$.

c. Supposons f non inversible.

($\Longrightarrow$) Si f est nilpotente, il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $f^n=0$, alors, d'après la relation de la question **a.**, on a $\forall g\in\mathcal{L}(E),\ \varphi_f^{2n}(g) = \sum\limits_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{n}{k}f^{2n-k}\circ g\circ f^k$ et on a $2n-k\geqslant n$ ou $k\geqslant n$ pour tout $k\in[\![0;2n]\!]$ donc $f^{2n-k}=0$ ou $f^k=0$ ce qui montre que $\varphi_f^{2n}=0$ et que φ_f est nilpotente.

($\Longleftarrow$) .

d. .

60 Notons s l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à S.

a. Comme $\chi_S = \begin{vmatrix} X-5 & 3 \\ 3 & X+5 \end{vmatrix} = (X-5)(X+5)-9 = X^2-25-9 = X^2-34$, on a $\mathrm{Sp}(S)=\{-\sqrt{34},\sqrt{34}\}$. χ_S est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ donc S est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et S est semblable à $D_1 = D(\sqrt{34},-\sqrt{34})$. D'après le théorème spectral, comme S est symétrique réelle, elle est même orthosemblable à D_1.

b. Soit $v_1=e_1$ et $v_2=Sv_1=Se_1=5e_1-3e_2$. La famille $\mathcal{B}=(v,v_2)$ est clairement libre donc c'est une base de $\mathbb{R}^2$ car $\dim(\mathbb{R}^2)=2$. Comme $Sv_2 = 5Se_1-3Se_2 = 5(5e_1-3e_2)-3(-3e_1-5e_2) = 34e_1 = 34v_1$, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = N = \begin{pmatrix} 0 & 34 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Par formule de changement de base, $S=PNP^{-1}$ en notant $P=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ à $\mathcal{B}$. Ainsi, S est semblable à N qui est à diagonale nulle.

c. L'application ϕ est clairement linéaire, ce n'est pas un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ car $D(1,2)\neq 0\in\mathrm{Ker}(\phi)$. Par contre, $N\in\mathrm{Im}(\phi)$ car $N=\begin{pmatrix} 0 & 34 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \phi(A)$ avec $A=\begin{pmatrix} 0 & -34 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ puisque si $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a $\phi(M) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 2b \\ c & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 34 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix}$.
En notant $C=PD(1,2)P^{-1}$ et $D=PAP^{-1}$, on a $CD-DC = PD(1,2)P^{-1}PAP^{-1} - PAP^{-1}PD(1,2)P^{-1}$ donc $CD-DC = P\big(D(1,2)A - AD(1,2)\big)P^{-1} = P\phi(A)P^{-1} = PNP^{-1}$ d'où $S=CD-DC$ avec $(C,D)\in(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^2$.

61 **a.** Comme $u^2=\mathrm{id}_E$, on a $\mathrm{Tr}\,(v) = \mathrm{Tr}\,(v\circ u\circ u) = \mathrm{Tr}\,((v\circ u)\circ u) = \mathrm{Tr}\,((-u\circ v)\circ u) = -\mathrm{Tr}\,(u\circ v\circ u)$ donc $\mathrm{Tr}\,(v) = -\mathrm{Tr}\,((u\circ v)\circ u) = -\mathrm{Tr}\,(u\circ(u\circ v))) = -\mathrm{Tr}\,(v)$ (car $\mathrm{Tr}\,(f\circ g) = \mathrm{Tr}\,(g\circ f)$ pour tout endomorphismes f et g d'un espace de dimension finie) d'où $\mathrm{Tr}\,(v)=0$. Bien sûr, par symétrie, $\mathrm{Tr}\,(u)=0$.

b. Par hypothèse, u et v sont des symétries donc elles sont diagonalisables car $X^2=(X-1)(X+1)$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ et annulateur de u et de v et $\mathrm{Sp}(u)\subset\{-1,1\}$ et $\mathrm{Sp}(v)\subset\{-1,1\}$. Comme la trace est la somme des valeurs propres comptées avec leurs ordres de multiplicité, 1 et -1 sont donc valeurs propres doubles de u et de v. Ainsi, $E_1(u), E_{-1}(u), E_1(b)$ et $E_{-1}(v)$ sont des plans.

c. On a $u(v(x)) = u\circ v(x) = -v\circ u(x) = -v(u(x)) = -v(x)$ car $u(x)=x$ donc $v(x)\in E_{-1}(u)$. De même, $v(y)\in E_{-1}(u)$. Soit $(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2$ tel que $\lambda v(x)+\mu v(y)=0_E$, il vient $-\lambda x-\mu y=0_E$ en appliquant u ce qui donne $\lambda = \mu = 0$ car (x, y) libre. Ainsi, $(v(x), v(y))$ est une famille libre de $E_{-1}(u)$ qui est un plan donc $(v(x), v(y))$ est une base de $E_{-1}(u)$.

Comme $E = E_1(u) \oplus E_{-1}(u)$ puisque u est une symétrie de E, et que (x, y) est une base de $E_1(u)$ et $(v(x), v(y))$ une base de $E_{-1}(u)$, la famille $\mathcal{B} = (x, y, v(x), v(y))$ est une base de E adaptée à la décomposition précédente. De plus, on a déjà vu que $u \circ v(x) = -v(x)$ et $u \circ v(y) = -v(y)$ et on a aussi $u \circ v(v(x)) = u(x) = x$ car $v^2 = \mathrm{id}_E$ et, de même, $u \circ v(v(y)) = y$. Ainsi, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u \circ v) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\chi_A = \begin{vmatrix} X & 0 & -1 & 0 \\ 0 & X & 0 & -1 \\ 1 & 0 & X & 0 \\ 0 & 1 & 0 & X \end{vmatrix}$. En effectuant $C_1 \longleftarrow C_1 + XC_3$ et $C_2 \longleftarrow C_2 + XC_4$, on a $\chi_A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ X^2+1 & 0 & X & 0 \\ 0 & X^2+1 & 0 & X \end{vmatrix}$ puis on développe par rapport à la première colonne deux fois et on a $\chi_A = (X^2+1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = (X^2+1)^2$ donc $\mathrm{Sp}(u \circ v) = \{-i, i\}$. Comme $A + iI_4 = \begin{pmatrix} i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & i & 0 & 1 \\ -1 & 0 & i & 0 \\ 0 & -1 & 0 & i \end{pmatrix}$ est de rang 2 car $C_3 = -iC_1$, $C_4 = -iC_2$ et que (C_1, C_2) libre, $E_{-i}(u \circ v) = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ avec $v_1 = ix + v(x)$ et $v_2 = iy + v(y)$. De même, $A - iI_4 = \begin{pmatrix} -i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -i \end{pmatrix}$ avec $C_3 = iC_1$, $C_4 = iC_2$ et (C_1, C_2) libre, donc $E_i(u \circ v) = \mathrm{Vect}(v_3, v_4)$ avec $v_3 = ix - v(x)$, $v_4 = iy - v(y)$. Comme $\dim(E_i(A)) + \dim(E_{-i}(A)) = 4 = \dim(\mathbb{C}^4)$, l'endomorphisme $u \circ v$ est diagonalisable. On pouvait aussi constater que $(u \circ v)^2 = (u \circ v) \circ (u \circ v) = u \circ (v \circ u) \circ v = -u \circ (u \circ v) \circ v = -u^2 \circ v^2 = -\mathrm{id}_E$ donc que $X^2 + 1 = (X+i)(X-i)$ est annulateur de $u \circ v$ et scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$ donc $u \circ v$ est diagonalisable.

62 **a.** Par hypothèse, pour tout $x \in \mathbb{R}$, comme f est continue et intégrable en $-\infty$, $F(x)$ existe donc la fonction F est bien définie sur $\mathbb{R}$. De plus, $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_{-\infty}^{0} f(t)t + \int_0^x f(t)dt$ et f est continue sur $\mathbb{R}$ donc, par le théorème fondamental de l'intégration, F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = f(x)$ car $x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ est la primitive de f s'annulant en 0.

b. Pour une fonction polynomiale P, $t \mapsto P(t)e^t$ est continue sur $]-\infty; x]$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $P(t)e^t \underset{-\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées donc $L(P)(x)$ existe ce qui montre que L est bien définie sur E. La linéarité de L provient de la linéarité de l'intégrale. Soit, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $p_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $p_k(t) = t^k$ de sorte que $E = \mathrm{Vect}_{k \in \mathbb{N}}(p_k)$. On a $L(p_0)(x) = e^{-x} \int_{-\infty}^{x} t^0 e^t dt = e^{-x}[e^t]_{-\infty}^{x} = 1$ donc $L(p_0) = p_0$. De plus, pour $k \in \mathbb{N}^*$, en posant $u = p_k$ et $v : t \mapsto e^t$, les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $]-\infty; x]$ et $\lim\limits_{t \to -\infty} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées donc, par intégration par parties, on a la relation $\forall x \in \mathbb{R}$, $L(p_k)(x) = e^{-x}\left([t^k e^t]_{-\infty}^{x} - \int_{-\infty}^{x} kt^{k-1}e^t dt\right) = x^k - kL(p_{k-1})(x)$ d'où $L(p_k) = p_k - kL(p_{k-1})$ (1). Comme $L(p_0) \in E$, la relation (1) permet de montrer par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}$, $L(p_k) \in E$. Ainsi, comme la famille $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ engendre E, ceci montre bien que L est un endomorphisme de E.

c. La relation (1) permet aussi de montrer par récurrence que si on note E_n le sous-espace des fonctions polynomiales de degrés inférieurs ou égaux à n, alors E_n est stable par L. En effet, E_0 est stable par L car $L(p_0) = p_0$. De plus, pour $n \in \mathbb{N}^*$, si E_{n-1} est stable par L, et si $P = a_n p_n + q_{n-1}$ avec $a_n \in \mathbb{R}$, $q_{n-1} \in E_{n-1}$, $L(P) = a_n L(p_n) + L(q_{n-1}) = a_n(p_n + nL(p_{n-1})) + L(q_{n-1}) = a_n p_n + (na_n L(p_{n-1}) + L(q_{n-1})) \in E_n$ d'après (1) et par hypothèse de récurrence.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de L, alors il existe une fonction polynomiale $P \in E$ telle que $L(P) = \lambda P$. Si on note $n = \deg(P)$, on a $P \in E_n$ et on peut considérer l'application induite $L_n : E_n \to E_n$ définie par $L_n(P) = L(P)$ et $L(P) = \lambda P = L_n(P)$ donc λ est valeur propre de L_n. D'après la relation (1), la matrice de L_n dans la base canonique $\mathcal{B}_n = (p_0, \cdots, p_n)$ de E_n est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale car $L(p_k) = p_k - kL(p_{k-1})$. Ainsi, $\chi_{L_n} = (X-1)^{n+1}$ et $Sp(L_n) = \{1\}$. Ainsi, la seule valeur propre de L est 1 car $L(p_0) = p_0$ et que $p_0 \neq 0$.

Soit $P \in E$ tel que $L(P) = P$, alors $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x}\displaystyle\int_{-\infty}^{x} P(t)e^t dt = P(x)$. Avec la même intégration par parties qu'en **b.**, $e^{-x}\left([P(t)e^t]_{-\infty}^{x} - \displaystyle\int_{-\infty}^{x} P'(t)e^t dt\right) = P(x)$ qui se simplifie en $\forall x \in \mathbb{R},\ \displaystyle\int_{-\infty}^{x} P'(t)e^t dt = 0$. Il suffit de dériver cette relation avec la question **a.** et on a $\forall x \in \mathbb{R},\ P'(x)e^x = 0$ donc $P'(x) = 0$ et P est constante car $\mathbb{R}$ est un intervalle. Par conséquent, 1 est la seule valeur propre de L et $E_1(L) = \mathrm{Vect}(p_0)$.

63 **a.** Dans le calcul de $\det(A)$, on développe par rapport à la dernière colonne et, si $D = \mathrm{diag}(b_1, \cdots, b_{q-1})$, on a $\det(A) = (-1)^{q+1} a_q \det(D)$ donc $\det(A) = (-1)^{q+1} a_q \displaystyle\prod_{k=1}^{q-1} b_k \neq 0$ car les réels $a_q, b_1, \cdots, b_{q-1}$ sont strictement positifs. Ainsi, A est inversible et 0 n'est pas valeur propre de A.

b. On calcule $A^2 = \begin{pmatrix} a_1^2 + a_2 b_1 & a_1 a_2 + a_3 b_2 & \cdots & \cdots & \cdots & a_1 a_q \\ b_1 a_1 & b_1 a_2 & \cdots & \cdots & \cdots & b_1 a_q \\ b_1 b_2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{q-1} b_{q-2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et on se rend compte que les deux premières lignes de A^2 ne contiennent que des termes strictement positifs tout comme la première ligne de A ne contient que des termes strictement positifs. Soit $k \in [\![1; q-1]\!]$ tel que les k premières lignes de A^k ne contiennent que des termes strictement positifs. Avec des notations évidentes, en écrivant $A^{k+1} = AA^k$, $L_1(A^{k+1}) \geqslant a_1 L_1(A^k) > 0$ et $\forall j \in [\![2; k+1]\!],\ L_j(A^{k+1}) = b_{j-1} L_{j-1}(A^k) > 0$ par hypothèse de récurrence. Ainsi, les $k+1$ premières lignes de A^{k+1} ne contiennent que des termes strictement positifs. Par principe de récurrence, cette propriété est vraie pour tout $k \in [\![1; q]\!]$ donc A^q a tous ses coefficients strictement positifs.

c. Soit $\lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(A)$ et $E_\lambda(A) = \mathrm{Ker}(A - \lambda I_q)$ le sous-espace propre associé. Comme les $q-1$ premières colonnes de la matrice $A - \lambda I_q = \begin{pmatrix} a_1 - \lambda & a_2 & \cdots & \cdots & a_q \\ b_1 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b_{q-1} & -\lambda \end{pmatrix}$ forment une famille libre (grâce aux $b_k \neq 0$ échelonnés), on a rang$\,(A - \lambda I_q) \geqslant q-1$. Puisque rang$\,(A - \lambda I_q) < q$ car $A - \lambda I_q$ n'est pas inversible par hypothèse, rang$\,(A - \lambda I_q) = q-1$. D'après la formule du rang, $q = \dim(\mathrm{Ker}(A - \lambda I_q)) + \text{rang}\,(A - \lambda I_q)$

donc $\dim(E_\lambda(A)) = 1$. Les sous-espaces propres associés aux valeurs propres complexes de A sont des droites.

On en déduit que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_q(\mathbb{C})$ si et seulement si χ_A est scindé à racines simples.

d. Dans le calcul de $\chi_A = \begin{vmatrix} X-a_1 & -a_2 & \cdots & \cdots & -a_q \\ -b_1 & X & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -b_{q-1} & X \end{vmatrix}$, on ne change pas le déterminant en effectuant l'opération de GAUSS $C_q \longleftarrow C_q + \dfrac{X}{b_{q-1}} C_{q-1} + \dfrac{X^2}{b_{q-2}b_{q-1}} C_{q-2} + \cdots + \dfrac{X^{q-1}}{b_1 \cdots b_{q-1}} C_1$ et on obtient la valeur

$\chi_A = \begin{vmatrix} X-a_1 & -a_2 & \cdots & \cdots & P \\ -b_1 & X & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & X & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -b_{q-1} & 0 \end{vmatrix}$ avec $P = \dfrac{X^{q-1}}{b_1 \cdots b_{q-1}}(X-a_1) - \Big(\sum\limits_{j=2}^{q-1} \dfrac{X^{q-j}}{b_j \cdots b_{q-1}} a_j \Big) - a_q$. On développe ensuite par rapport à la dernière colonne et, comme en **a.**, on a $\chi_A = (-1)^{q+1} \Big(\prod\limits_{j=1}^{q-1} (-b_j) \Big) P$ donc $\chi_A = X^q - \sum\limits_{j=1}^{q} \Big(\prod\limits_{k=1}^{j-1} b_k \Big) a_j X^{q-j}$.

Méthode 1 : on constate que χ_A a son premier coefficient (celui en X^q) qui est strictement positif et tous les autres sont strictement négatifs. Les dérivées successives $\chi_A', \cdots, \chi_A^{(q-1)}$ de χ_A vont avoir la même propriété. Par exemple $\chi_A^{(q-1)} = q!X - (q-1)!a_1$. Ainsi, $\chi_A^{(q-1)}$ s'annule une unique fois sur $\mathbb{R}_+^*$ (en $\alpha_{q-1} = \dfrac{a_1}{q}$). Ceci montre que $\chi_A^{(q-2)}$ est strictement décroissante sur $[0; \alpha_{q-2}]$ et strictement croissante sur $[\alpha_{q-1}; +\infty[$ alors que $\chi_A^{(q-1)}(0) < 0$ et que $\lim\limits_{t \to +\infty} \chi_A^{(q-2)}(t) = +\infty$. Ceci montre que $\chi_A^{(q-2)}$ ne s'annule qu'une seule fois sur $\mathbb{R}_+^*$ en $\alpha_{q-2} > \alpha_{q-1}$. On continue les tableaux de variations de $\chi_A^{(q-1)}, \chi_A^{(q-2)}, \cdots, \chi_A', \chi_A$ avec la même conclusion à chaque fois, $\chi_A^{(k)}$ ne s'annule qu'une fois sur $\mathbb{R}_+^*$ pour $k \in [\![0; q-1]\!]$.

Méthode 2 : posons $Q = X^q \chi_A(1/X) = 1 - \sum\limits_{j=1}^{q} \Big(\prod\limits_{k=1}^{j-1} b_k \Big) a_j X^j$. Comme $Q' = -\sum\limits_{j=1}^{q} j \Big(\prod\limits_{k=1}^{j-1} b_k \Big) a_j X^{j-1}$ et que tous les $a_1, \cdots, a_q, b_1, \cdots, b_{q-1}$ sont strictement positifs, la fonction polynomiale Q' reste strictement négative sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ donc Q y est strictement décroissante. Puisque $Q(0) = 1 > 0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} Q(t) = -\infty$ car le coefficient dominant de Q est strictement négatif, la fonction Q s'annule une unique fois en α_0 sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme $\forall t > 0,\ Q(t) = 0 \Longleftrightarrow \chi_A(1/t) = 0$, χ_A s'annule une unique fois sur $\mathbb{R}_+^*$ en $1/\alpha_0$.

Quelle que soit la méthode, χ_A ne s'annule qu'une seule fois sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, comme les valeurs propres de A sont les racines de χ_A, A admet une unique valeur propre strictement positive.

64 **a.** Soit $P \in E$, on a $\deg(P(1)(X^2 - X) + P(-1)(X^2 + X)) \leqslant 2$ donc le polynôme $T(P)$ appartient bien à E. De plus, si $(P, Q) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a par définition $T(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)(1)(X^2 - X) + (\lambda P + Q)(-1)(X^2 + X)$ qui devient $T(\lambda P + Q) = (\lambda P(1) + Q(1))(X^2 - X) + (\lambda P(-1) + Q(-1))(X^2 + X)$ et on a enfin la relation $T(\lambda P + Q) = \lambda(P(1)(X^2 - X) + P(-1)(X^2 + X)) + (P(1)(X^2 - X) + P(-1)(X^2 + X)) = \lambda T(P) + T(Q)$ donc T est bien un endomorphisme de E. Comme $\forall k \in [\![0; n-1]\!],\ T(X^k) = X^2 - X + (-1)^k(X^2 + X)$, on a $T(X^k) = 2X^2$ si k est pair et $T(X^k) = -2X$ si k est impair. Ainsi, en notant $\mathcal{B}_0 = (1, X, \cdots, X^n)$ la base canonique de E, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(T) = A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & \cdots & \cdots \\ 2 & 0 & 2 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$. Les colonnes d'indice pairs (resp. impairs) sont égales.

b. Visiblement, $\mathrm{rang}\,(T) = \mathrm{rang}\,(A) = 2$ donc $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = \dim(E) - 2 = n + 1 - 2 = n - 1$ avec la formule du rang. On sait que $\mathrm{Im}\,(T)$ est engendré par les images par T des vecteurs de $\mathcal{B}_0$ donc $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Vect}(X, X^2)$ et il est clair que les vecteurs $P_k = X^{2k} - 1$ pour $2k \leqslant n$ et $Q_k = X^{2k+1} - X$ pour $2k + 1 \leqslant n$ sont dans le noyau de T car $T(X^{2k}) = T(1) = 2X^2$ et $T(X^{2k+1}) = T(X) = -2X$. Ainsi, selon la parité de n :

- Si $n = 2p$ est pair, $\mathcal{B} = (P_1, Q_1, \cdots, Q_{p-1}, P_p)$ est une famille de degrés échelonnés donc libre de $n - 1 = 2p - 1$ vecteurs de $\mathrm{Ker}(T)$ donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathrm{Ker}(T)$.
- Si $n = 2p + 1$ est impair, $\mathcal{B} = (P_1, Q_1, \cdots, P_p, Q_p)$ est une famille de degrés échelonnés donc libre de $n - 1 = 2p$ vecteurs de $\mathrm{Ker}(T)$ donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathrm{Ker}(T)$.

c. On a déjà vu que 0 était valeur propre de T. Comme on a vu que $T(X^2) = 2X^2$, 2 est valeur propre de T. De même, $T(X) = -2X$ donc -2 est aussi valeur propre de T. Ainsi, $\mathrm{Sp}(T) = \{-2, 0, 2\}$ et $E_0(T) = \mathrm{Ker}(T)$ est de dimension $n - 1$, $E_2(T) = \mathrm{Vect}(X^2)$ et $E_{-2}(T) = \mathrm{Vect}(X)$ sont des droites. Comme la somme des dimensions des sous-espaces propres vaut $\dim(E)$, T est diagonalisable.

65 **a.** La deuxième colonne de A vaut j fois la première car $j^3 = 1$ et la troisième vaut j^2 fois la première, ceci justifie que $\mathrm{rang}\,(A) = 1$ car la matrice A est non nulle. Ainsi, d'après la formule du rang, on a $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 3 - \mathrm{rang}\,(A) = 2$ donc $\dim(E_0(A)) = 2$ ce qui montre d'après le cours que 0 est racine au moins double de χ_A. Ainsi, $\chi_A = X^3 - \mathrm{Tr}\,(A)X^2$ car X^2 divise χ_A. Comme $\mathrm{Tr}\,(A) = 1 + j + j^2 = 0$, on a $\chi_A = X^3$ donc $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$ et A est nilpotente d'après le théorème de Cayley-Hamilton. Comme $\dim(E_0(A)) = 2 \neq 3 = m_0(A)$, A n'est pas diagonalisable (par ce raisonnement, la seule matrice nilpotente diagonalisable est la matrice nulle).

b. Comme $\mathrm{Im}\,(A) = \mathrm{Vect}(v_1)$ avec $v_1 = (1, j, j^2)$ et que $v_1 \in \mathrm{Ker}(A)$, on a $\mathrm{Im}\,(A) \subset \mathrm{Ker}(A)$ et $A^2 = 0$. On peut compléter (v_1) en une base de $\mathrm{Ker}(A)$, prenons par exemple $v_3 = (j, -1, 0)$ de sorte que $v_3 \in \mathrm{Ker}(A)$ et que (v_1, v_3) est une base de $\mathrm{Ker}(A)$ car on a clairement (v_1, v_3) libre. Comme $Av_2 = v_1$ en prenant $v_1 = (1, 0, 0)$ en regardant la première colonne de A, et que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ car (v_1, v_3) libre et $v_2 \notin \mathrm{Vect}(v_1, v_3) = \mathrm{Ker}(A)$, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(a) = E_{1,2}$ en notant a l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé à A. En notons P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^3$ à $\mathcal{B}$, on a par formule de changement de base $A = PE_{1,2}P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & j \\ j & 0 & -1 \\ j^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ($\mathcal{B}$ est à nouveau une base de $\mathbb{C}^3$ car $\det(P) = -j^2 \neq 0$).

c. Soit $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, on pose $C = P^{-1}BP$ d'où $B = PCP^{-1}$ et on a l'équivalence $AB = BA \iff E_{1,2}C = CE_{1,2}$. Or en notant $C = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} \\ c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} \end{pmatrix}$, on a $E_{1,2}C = \begin{pmatrix} c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $CE_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & c_{1,1} & 0 \\ 0 & c_{2,1} & 0 \\ 0 & c_{3,1} & 0 \end{pmatrix}$ donc $E_{1,2}C = CE_{1,2} \iff (c_{2,1} = c_{1,1} - c_{2,2} = c_{2,3} = c_{3,1} = 0)$. Ainsi, les matrices qui commutent avec $E_{1,2}$ sont de la forme $C = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} \\ 0 & c_{1,1} & 0 \\ 0 & c_{3,2} & c_{3,3} \end{pmatrix}$ donc l'ensemble des matrices qui commutent avec $E_{1,2}$, noté $C(E_{1,2})$, vérifie $C(E_{1,2}) = \mathrm{Vect}(E_{1,1}+E_{2,2}, E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{3,2})$ est de dimension 5 car la famille $(E_{1,1}+E_{2,2}, E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{3,2})$ est clairement libre. De plus, l'application $\varphi : C(E_{1,2}) \to C(A)$ définie par $\varphi(C) = P^{-1}CP$ est linéaire, injective car $P^{-1}CP = 0 \Longrightarrow C = 0$ et surjective d'après l'équivalence qui précède. Comme φ est un isomorphisme, il conserve la dimension donc $\dim(C(A)) = \dim(C(E_{1,2})) = 5$.

66 **a.** En transposant la relation $M^2+M^T = I_n$, $(M^T)^2+M = I_n$ donc $(I_n - M^2)^2 + M - I_n = M^4 - 2M^2 + M = 0$ et le polynôme $Q = X^4 - 2X^2 + X$ annule M. Or $Q = X(X-1)(X^2+X-1) = X(X-1)(X-\alpha)(X-\beta)$ avec $\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ donc Q est scindé à racines simples. Ainsi M est encore diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathrm{Sp}(M) \subset \{0, 1, \alpha, \beta\}$ d'après le cours.

b. Étant donnée la question, on s'attend à un réponse négative. On va commencer par le cas simple $n = 2$. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $M \neq M^T$ et $M^2 + M^T = I_2$. Distinguons selon les valeurs propres de M avec **a.**.

Si $\mathrm{Sp}(M) = \{\lambda\}$ avec $\lambda \in \{0, 1, \alpha, \beta\}$, alors comme M est diagonalisable d'après **a.**, M est semblable à λI_2 donc $M = \lambda I_2$ ce qui est impossible car M n'est pas symétrique.

Si $\mathrm{Sp}(M) = \{0, 1\}$, comme M est diagonalisable, $M = PDP^{-1}$ avec $P \in GL_2(\mathbb{C})$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $M^2 = PD^2P^{-1} = M$ car $D^2 = D$. Ainsi, $M^2+M^T = M+M^T = I_2$ ce qui montre que $M = \begin{pmatrix} 1/2 & -a \\ a & 1/2 \end{pmatrix}$. Or $M^2 = M = \begin{pmatrix} (1/4) - a^2 & -a \\ a & (1/4) - a^2 \end{pmatrix}$. Ainsi, $\dfrac{1}{4} - a^2 = \dfrac{1}{2}$ donc $a^2 = -\dfrac{1}{4}$ d'où $a = \pm\dfrac{i}{2}$. Il y a donc deux matrices vérifiant ces conditions, $M_1 = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$.

Si $\mathrm{Sp}(M) = \{\alpha, \beta\}$, comme M est diagonalisable, $(X-\alpha)(X-\beta) = X^2 + X - 1$ est annulateur de M donc $M^2 + M - I_2 = 0$. Mais ceci est impossible car $M^2 - I_2 = -M^T \neq -M$.

Si $\mathrm{Sp}(M) = \{0, \alpha\}$, de même, $X(X-\alpha) = X^2 - \alpha X$ annule M d'où $M^2 = \alpha M$ et $\alpha M + M^T = I_2$ (1). En écrivant $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, la relation (1) montre que $M = \dfrac{1}{\alpha+1} I_2$, absurde car M non symétrique.

Si $\mathrm{Sp}(M) = \{0, \beta\}$, de même, $X(X-\beta) = X^2 - \beta X$ annule M d'où $M^2 = \beta M$ et $\beta M + M^T = I_2$ (1). En écrivant $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, la relation (1) montre que $M = \dfrac{1}{\beta+1} I_2$, absurde car M non symétrique.

Si $\mathrm{Sp}(M) = \{1, \alpha\}$, comme avant, $(X-1)(X-\alpha) = X^2 - (\alpha+1)X + \alpha$ annule M, d'où $M^2 = (\alpha+1)M + \alpha I_2$ et $(\alpha+1)M + M^T = (1-\alpha)I_2$ (1). En écrivant $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, la relation (1) montre que $M = \dfrac{1}{\alpha+2} I_2$, absurde car M non symétrique.

Si $\mathrm{Sp}(M) = \{1, \beta\}$, comme avant, $(X-1)(X-\beta) = X^2 - (\beta+1)X + \beta$ annule M, d'où $M^2 = (\beta+1)M + \beta I_2$ et $(\beta+1)M + M^T = (1-\beta)I_2$ (1). En écrivant $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, la relation (1) montre que $M = \dfrac{1}{\beta+2} I_2$, absurde car M non symétrique.

Les seules $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telles que $M \neq M^T$ et $M^2 + M^T = I_2$ sont $M_1 = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$.

Si $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$, il suffit de poser $M = \mathrm{diag}(M_{i_1}, \cdots, M_{i_p})$ avec $(i_1, \cdots, i_p) \in \{1, 2\}^p$ et on a $M^2 = \mathrm{diag}(I_n - M_{i_1}^T, \cdots, I_2 - M_{i_p}^T) = I_n - \big(\mathrm{diag}(M_{i_1}, \cdots, M_{i_p})\big)^T = I_n - M^T$ et M n'est pas symétrique.

Si $n = 2p+1$ avec $p \in \mathbb{N}^*$, il suffit de poser $M = \mathrm{diag}(\alpha, M_{i_1}, \cdots, M_{i_p})$ avec $(i_1, \cdots, i_p) \in \{1,2\}^p$ et on a $M^2 = \mathrm{diag}(\alpha^2, I_n - M_{i_1}^T, \cdots, I_2 - M_{i_p}^T) = I_n - \big(\mathrm{diag}(\alpha, M_{i_1}, \cdots, M_{i_p})\big)^T = I_n - M^T$ car $\alpha^2 + \alpha = 1$ et M n'est pas symétrique.

La réponse à la question posée est :

Si $n = 1$, oui, car toutes les matrices de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ sont symétriques.

Si $n \geqslant 2$, non, la matrice M n'est pas forcément symétrique si elle vérifie les conditions $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^2 + M^T = I_n$, avec les contre-exemples vus ci-dessus dans les cas n pair ou n impair.

67 **a.** Si $f \in E$, par opérations, comme $x \mapsto \dfrac{x}{2}$ et $x \mapsto \dfrac{x+1}{2}$ sont de classe C^∞ de $[0;1]$ dans $[0;1]$, la fonction $T(f)$ est bien définie et de classe C^∞ sur $[0;1]$ donc $T(f) \in E$. Pour $(f,g) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on calcule $\forall x \in [0;1]$, $T(\lambda f+g)(x) = \dfrac{1}{2}\Big((\lambda f+g)\Big(\dfrac{x}{2}\Big)+(\lambda f+g)\Big(\dfrac{x+1}{2}\Big)\Big) = \dfrac{\lambda}{2}\Big(f\Big(\dfrac{x}{2}\Big)+f\Big(\dfrac{x+1}{2}\Big)\Big)+\dfrac{1}{2}\Big(g\Big(\dfrac{x}{2}\Big)+g\Big(\dfrac{x+1}{2}\Big)\Big)$ ce qui donne $T(\lambda f+g)(x) = \lambda T(f)(x)+T(g)(x)$ donc $T(\lambda f+g) = \lambda T(f)+T(g)$: T est en endomorphisme de E.

b. Pour $f \in E$ et $x \in [0;1]$, $T^2(f)(x) = T(T(f))(x) = \dfrac{1}{2}\Big(T(f)\Big(\dfrac{x}{2}\Big) + T(f)\Big(\dfrac{x+1}{2}\Big)\Big)$ et, par définition de $T(f)$, on a $T^2(f)(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\Big(f\Big(\dfrac{x}{4}\Big) + f\Big(\dfrac{x+1}{4}\Big)\Big) + \dfrac{1}{2}\Big(f\Big(\dfrac{x+2}{4}\Big) + f\Big(\dfrac{x+3}{4}\Big)\Big)\right)$ ce qui donne l'initialisation suivante : $T^2(f)(x) = \dfrac{1}{4}\Big(f\Big(\dfrac{x}{4}\Big) + f\Big(\dfrac{x+1}{4}\Big) + f\Big(\dfrac{x+2}{4}\Big) + f\Big(\dfrac{x+3}{4}\Big)\Big)$.

Soit $n \geqslant 1$ tel que $\forall f \in E$, $\forall x \in [0;1]$, $T^n(f)(x) = \dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{2^n-1} f\Big(\dfrac{x+k}{2^n}\Big)$. Par définition, comme $T^{n+1} = T^n \circ T$, on obtient $T^{n+1}(f)(x) = T^n(T(f))(x) = \dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{2^n-1} T(f)\Big(\dfrac{x+k}{2^n}\Big)$ par hypothèse de récurrence puis, par définition de T, $T^{n+1}(f)(x) = \dfrac{1}{2^{n+1}}\displaystyle\sum_{k=0}^{2^n-1}\Big(f\Big(\dfrac{x+k}{2^{n+1}}\Big)+f\Big(\dfrac{x+k+2^n}{2^{n+1}}\Big)\Big) = \dfrac{1}{2^{n+1}}\displaystyle\sum_{k=0}^{2^n-1} f\Big(\dfrac{x+k}{2^{n+1}}\Big)+\dfrac{1}{2^{n+1}}\displaystyle\sum_{k=0}^{2^n-1} f\Big(\dfrac{x+k+2^n}{2^{n+1}}\Big)$.
En posant $j = k+2^n$ dans le seconde somme, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{2^n-1} f\Big(\dfrac{x+k+2^n}{2^{n+1}}\Big) = \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} f\Big(\dfrac{x+j}{2^{n+1}}\Big)$ donc, en changeant j en k et en regroupant les deux sommes, on arrive bien à $T^{n+1}(f)(x) = \dfrac{1}{2^{n+1}}\displaystyle\sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} f\Big(\dfrac{x+k}{2^{n+1}}\Big)$.

Par principe de récurrence, $\forall f \in E$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0;1]$, $T^n(f)(x) = \dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{2^n-1} f\Big(\dfrac{x+k}{2^n}\Big)$, cette formule étant même valable quand $n = 0$ car $T^0(f)(x) = f(x) = \dfrac{1}{2^0}\displaystyle\sum_{k=0}^{2^0-1} f\Big(\dfrac{x+k}{2^0}\Big)$ puisque $T^0 = \mathrm{id}_E$.

c. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons la somme de Riemann $R_n(f) = \dfrac{1-0}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(0 + k\dfrac{1-0}{n}\Big)$ associée à $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ continue. D'après un théorème du cours, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} R_n(f) = \int_0^1 f(t)dt$. D'après **b.**, $T^n(f)(0) = R_{2^n}(f)$. Comme $(R_{2^n}(f))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(R_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$, on a donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} T^n(f)(0) = \int_0^1 f(t)dt$.

d. Pour $x \in [0;1]$ et $n \in \mathbb{N}$, $T^n(f)(x) - T^n(f)(0) = \dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{2^n-1}\Big(f\Big(\dfrac{x+k}{2^n}\Big) - f\Big(\dfrac{x+k}{2^n}\Big)\Big)$ donc, par inégalité triangulaire, $|T^n(f)(x) - T^n(f)(0)| \leqslant \dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{2^n-1}\Big|f\Big(\dfrac{x+k}{2^n}\Big) - f\Big(\dfrac{k}{2^n}\Big)\Big|$. Or, par inégalité des accroissements finis, en posant $M = ||f'||_{\infty,[0;1]}$ qui existe puisque la fonction f' est continue sur le segment $[0;1]$ d'après le théorème des bornes atteintes, on a $\Big|f\Big(\dfrac{x+k}{2^n}\Big) - f\Big(\dfrac{k}{2^n}\Big)\Big| \leqslant \dfrac{Mx}{2^n}$. Ainsi, $|T^n(f)(x) - T^n(f)(0)| \leqslant \dfrac{2^n Mx}{2^{2n}} \leqslant \dfrac{M}{2^n}$.

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}(T^n(f)(x)-T^n(f)(0))=0$ dont on déduit que $\forall x\in[0;1]$, $\lim\limits_{n\to+\infty}T^n(f)(x)=\int_0^1 f(t)dt$ en écrivant $T^n(f)(x)=\big(T^n(f)(x)-T^n(f)(0)\big)+T^n(f)(0)$. On peut donc affirmer que la suite de fonctions $(T^n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction constante $c:x\mapsto\int_0^1 f(t)dt$ sur $[0;1]$. D'ailleurs, avec ce qui précède, $|T^n(f)(x)-c(x)|=|T^n(f)(x)-T^n(f)(0)+T^n(f)(0)-c(x)|\leqslant|T^n(f)(x)-T^n(f)(0)|+|T^n(f)(0)-c(x)|$ donc $|T^n(f)(x)-c(x)|\leqslant\frac{M}{2^n}+\left|T^n(f)(0)-\int_0^1 f(t)dt\right|$. Ainsi, $||T^n(f)-c||_{\infty,[0;1]}\leqslant\frac{M}{2^n}+\left|T^n(f)(0)-\int_0^1 f(t)dt\right|$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{M}{2^n}+\left|T^n(f)(0)-\int_0^1 f(t)dt\right|\right)=0$ donc $(T^n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers c sur $[0;1]$.

e. Si 1 est la fonction constante égale à 1 sur $[0;1]$, $T(1)=1$ donc, comme $1\neq 0$, 1 est valeur propre de T. Soit $f\in E_1(T)$, alors $T(f)=f$ donc, par une récurrence simple, on a $\forall n\in\mathbb{N}$, $T^n(f)=f$. Ainsi, $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}T^n(f)(x)=\int_0^1 f(t)dt$ ce qui prouve que f est constante. Ainsi, $E_1(T)=\mathrm{Vect}(1)$.

f. Soit $k\in\mathbb{R}$ tel que $|k|>1$. Supposons qu'il existe $f\in E$ telle que $T(f)=kf$. Par une autre récurrence simple, pour $x\in[0;1]$, il vient $\forall n\in\mathbb{N}$, $T^n(f)=k^nf(x)$. Comme $(T^n(f)(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge d'après **d.** et que $(k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, ceci impose que $f(x)=0$. Seule la fonction nulle est dans $E_k(f)$ donc k n'est pas valeur propre de f si $|k|>1$. Par le même argument, comme $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, on en déduit aussi que $E_1(T)=\{0\}$ donc que -1 n'est pas valeur propre de T.

g. Pour $f\in E$ et $x\in[0;1]$, on a $T(f)'(x)=\frac{1}{4}\left(f'\left(\frac{x}{2}\right)+f'\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)=\frac{T(f')(x)}{2}$ donc $T(f)'=\frac{T(f')}{2}$. Soit $f\in E_{1/2}(T)$, alors $T(f)=\frac{f}{2}$ donc $\frac{f'}{2}=T(f)'=\frac{T(f')}{2}$ et $T(f')=f'$ ce qui, d'après **e.**, montre que f' est constante. Ainsi, f est une fonction affine. Réciproquement, si on pose $f:x\mapsto ax+b$, alors $f\in E$ et $\forall x\in[0;1]$, $T(f)(x)=\frac{1}{2}\left(a\frac{x}{2}+b+a\frac{x+1}{2}+b\right)=\frac{ax}{2}+\frac{a}{4}+b=\frac{ax+b}{2}=\frac{f(x)}{2}$ si et seulement si $a+2b=0$ ce qui montre que $f(x)=b(1-2x)$. Ainsi, $E_{1/2}(T)=\mathrm{Vect}(g)$ avec $g:x\mapsto 1-2x$ et $\frac{1}{2}\in\mathrm{Sp}(T)$.

68 **a.** Pour $\alpha\in\mathbb{R}$, on écrit $1+\frac{i\alpha}{n}=r_ne^{i\theta_n}$ sous forme trigonométrique en posant $r_n=\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{n^2}}>0$ et $\theta_n=\mathrm{Arctan}\left(\frac{\alpha}{n}\right)\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ car $\frac{\sin(\theta_n)}{\cos(\theta_n)}=\tan(\theta_n)=\frac{r_n\sin(\theta_n)}{r_n\cos(\theta_n)}=\frac{\alpha}{n}$. On a donc $\left(1+\frac{i\alpha}{n}\right)^n=r_n^ne^{in\theta_n}$. Comme $r_n^n=\exp\left(\frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{\alpha^2}{n^2}\right)\right)$ et que $\ln\left(1+\frac{\alpha^2}{n^2}\right)\underset{+\infty}{=}\frac{\alpha^2}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, on a $\frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{\alpha^2}{n^2}\right)\underset{+\infty}{=}\frac{\alpha^2}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{\alpha^2}{n^2}\right)=0$ et, comme $\lim\limits_{t\to0}e^t=1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}r_n^n=1$.

De plus, $n\theta_n=n\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{\alpha}{n}\right)\underset{+\infty}{=}n\left(\frac{\alpha}{n}+o(\frac{1}{n^2})\right)\underset{+\infty}{=}\alpha+o(1)$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}n\theta_n=\alpha$. Par continuité de $\cos$ et $\sin$, comme $e^{in\theta_n}=\cos(n\theta_n)+i\sin(n\theta_n)$, $\lim\limits_{n\to+\infty}e^{in\theta_n}=e^{i\alpha}$. Par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{i\alpha}{n}\right)^n=e^{i\alpha}$.

b. Si $a=0$, $A_n=I_2$ est déjà diagonale.

Si $a\neq0$, on a $\chi_{A_n}=\begin{vmatrix}X-1 & a/n\\ -a/n & X-1\end{vmatrix}=(X-1)^2+\left(\frac{a}{n}\right)^2=\left(X-1+\frac{ia}{n}\right)\left(X-1-\frac{ia}{n}\right)$ donc on obtient $\mathrm{Sp}(A_n)=\left\{1+\frac{ia}{n},1-\frac{ia}{n}\right\}$. Comme A_n admet deux valeurs propres distinctes, A_n est diagonalisable et il existe un matrice inversible $P\in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $A_n=PD_nP^{-1}$ avec $D_n=\mathrm{diag}\left(1+\frac{ia}{n},1-\frac{ia}{n}\right)$. Comme $A_n-\left(1+\frac{ia}{n}\right)I_2=\begin{pmatrix}-ia/n & -a/n\\ a/n & -ia/n\end{pmatrix}$, on constate qu'un vecteur propre associé à la valeur propre

$1+\dfrac{ia}{n}$ est $v_1=(1,-i)$. De même, $v_2=(1,i)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $1+\dfrac{ia}{n}$ car $A_n-\left(1-\dfrac{ia}{n}\right)I_2=\begin{pmatrix} ia/n & -a/n \\ a/n & ia/n \end{pmatrix}$. On peut donc prendre $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$ ci-dessus.

c. <u>Si $a=0$</u>, $A_n^n=I_2$ donc la suite $(A_n^n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=R_0$.

<u>Si $a\neq 0$</u>, d'après **b.**, $A_n^n=PD_n^nP^{-1}$ et $D_n^n=\mathrm{diag}\left(\left(1+\dfrac{ia}{n}\right)^n,\left(1-\dfrac{ia}{n}\right)^n\right)$ donc la suite $(D_n^n)_{n\geqslant 1}$ converge vers la matrice $D=\mathrm{diag}(e^{ia},e^{-ia})$ d'après **a.**. Comme $\varphi : M\mapsto PMP^{-1}$ est linéaire en dimension finie, elle est continue (c'est un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$) donc, par caractérisation séquentielle de la continuité, $(\varphi(D_n^n))_{n\geqslant 1}=(A_n^n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $\varphi(A)=PDP^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{ia} & 0 \\ 0 & e^{-ia} \end{pmatrix}\left(\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}\right)$ donc la suite $(A_n^n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $\begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix}=R_a$.

69 <u>(i) $\Longrightarrow$ (iv)</u> : supposons (i). Par l'absurde, si λ était une valeur propre commune à A et à B, λ serait aussi une valeur propre de B^T car $Sp(B^T)=Sp(B)$ et il existerait deux vecteurs non nuls $U\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $AU=\lambda U$ et $V\in\mathcal{M}n,1(\mathbb{C})$ tel que $B^TV=\lambda V$. Alors, en posant $X=UV^T\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on aurait $AX-XB=AUV^T-UV^TB=(AU)V^T-U(B^TV)^T=\lambda UV^T-U(\lambda V^T)=0$ donc $UV^T=0$ d'après (i). Mais ceci est impossible car si $U^T=(u_1\ \cdots u_n)$ et $V^T=(v_1\ \cdots\ v_n)$, $\exists(i,j)\in[\![1;n]\!]^2$, $u_i\neq 0$ et $v_j\neq 0$ et alors, si $X=(x_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, on a $x_{i,j}=u_iv_j\neq 0$. On conclut ce raisonnement par l'absurde : il n'existe aucune valeur propre commune à A et à B.

<u>(iv) $\Longrightarrow$ (iii)</u> : supposons (iv). En posant $\lambda_1,\cdots\lambda_r$ les valeurs propres distinctes de la matrice B, on écrit $\chi_B=\prod\limits_{k=1}^{r}(X-\lambda_k)^{m_{\lambda_k}(B)}$ donc, par les propriétés des polynômes de matrices, $\chi_B(A)=\prod\limits_{k=1}^{r}(A-\lambda_kI_n)^{m_{\lambda_k}(B)}$. Or, pour un complexe λ, la matrice $A-\lambda I_n$ est inversible si et seulement si λ n'est pas une valeur propre de A. Ici, $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ n'étant pas des valeurs propres de A puisque ce sont des valeurs propres de B, les matrices $A-\lambda_1I_n,\cdots,A-\lambda_rI_n$ sont toutes inversibles. En tant que produit de puissances de matrices inversibles, $\chi_B(A)$ est donc inversible ($GL_n(\mathbb{C})$ est une groupe multiplicatif).

<u>(iii) $\Longrightarrow$ (ii)</u> : supposons la matrice $\chi_A(B)$ inversible. Soit $X\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $AX=XB$. On a alors $A^0X=XB^0=X$ et $A^1X=XB^1$ par hypothèse. Si on suppose que $A^kX=XB^k$ pour un entier $k\geqslant 1$, alors $A^{k+1}X=A(A^kX)=A(XB^k)=(AX)B^k=(XB)B^k=XB^{k+1}$. Par principe de récurrence, $\forall k\in\mathbb{N}$, $A^kX=XB^k$. Si on écrit $\chi_B=\sum\limits_{k=0}^{n}b_kX^k$, alors $\chi_B(A)=\sum\limits_{k=0}^{n}b_kA^k$ donc $\chi_B(A)X=\sum\limits_{k=0}^{n}b_kA^kX=\sum\limits_{k=0}^{n}b_kXB^k=X\chi_B(B)$. Or $\chi_B(B)=0$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton donc $\chi_B(A)X=0$. Comme $\chi_B(A)$ est inversible, on en déduit que $X=0$ comme attendu.

<u>(ii) $\Longrightarrow$ (i)</u> : supposons (ii) et soit l'application $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C})\to\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $\varphi(X)=AX-XB$. φ est clairement linéaire donc c'est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. L'hypothèse $\forall X\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $AX=XB\Longrightarrow X=0$ traduit le fait que $\mathrm{Ker}(\varphi)=\{0\}$ donc que φ est injective. Comme $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))=n^2$ est fini, φ est donc un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, ce qui se traduit bien par (i).

70 **a.** Si on pose $S_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, comme $\forall M\in S_2(\mathbb{R})$, $M=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, on peut écrire $S_2(\mathbb{R})=\mathrm{Vect}(E_{1,1},E_{1,2}+E_{2,1},E_{2,2})$ Puisque la famille $(E_{1,1},E_{1,2}+E_{2,1},E_{2,2})$ est clairement libre, on a $\mathrm{dim}(S_2(\mathbb{R})) = 3 = \dfrac{2\times(2+1)}{2}$ donc $S_2(\mathbb{R})$ est bien un hyperplan de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui ne contient que des matrices diagonalisables d'après le théorème spectral.

b. Par définition, $F = \mathrm{Vect}(I_2, J)$ avec $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et (I_2, J) est clairement libre donc $\mathrm{dim}(F) = 2$. Par la formule de GRASSMANN, $\mathrm{dim}(F\cap V) = \mathrm{dim}(F)+\mathrm{dim}(V)-\mathrm{dim}(F+V)$. Or $F+V \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donc $\mathrm{dim}(F+V) \leqslant 4$ d'où $\mathrm{dim}(F\cap V) \geqslant 2+3-4 = 1$ ce qui montre que $F\cap V \neq \{0\}$.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \neq 0 \in F\cap V$, alors $\chi_A = X^2 - \mathrm{Tr}\,(A)X + \det(A) = X^2 - 2aX + a^2 + b^2$ qu'on factorise en $\chi_A = (X-(a+ib))(X-(a-ib))$ donc, puisque A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, ceci impose que $\mathrm{Sp}(A) = \{a+ib, a-ib\} \subset \mathbb{R}$ donc que $b = 0$. Par conséquent $A = aI_2 \in F\cap V$ avec $a \neq 0$ donc $I_2 \in F\cap V$ car $F\cap V$ est un sous-espace de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Ainsi, $I_2 \in V$.

c. Comme V est un hyperplan de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui est de dimension 4, $\mathrm{dim}(V^\perp) = 1$. De même, $(S_2(\mathbb{R}))^\perp$ est une droite de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et elle est engendrée par la matrice $U = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ qui est orthogonale aux trois matrices $E_{1,1}, E_{1,2}+E_{2,1}, E_{2,2}$ qui engendrent $S_2(\mathbb{R})$.

71 **a.** Après calculs, on a $\chi_A = \begin{vmatrix} X-1 & -3 & 0 \\ -3 & X+2 & 1 \\ 0 & 1 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)(X-3)(X+4)$ donc $\mathrm{Sp}(A) = \{-4, 1, 3\}$. Comme χ_A est scindé à racines simples, A est diagonalisable et $\mathbb{K}^3 = E_1(A) \oplus E_3(A) \oplus E_{-4}(A)$. On peut aussi dire que A est symétrique et réelle donc, d'après le théorème spectral, A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, donc a fortiori dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. De plus, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, toujours avec le théorème spectral, les sous-espaces propres de A sont des supplémentaires orthogonaux dans $\mathbb{R}^3$.

On résout les trois systèmes $AX = X$, $AX = 3X$ et $AX = -4X$ avec $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$ pour trouver les trois droites propres $E_1(A) = \mathrm{Vect}(v_1)$, $E_3(A) = \mathrm{Vect}(v_2)$ et $E_{-4}(A) = \mathrm{Vect}(v_3)$ avec $v_1 = (1,0,3)$, $v_2 = (3,2,-1)$ et $v_3 = (3,-5,-1)$ (on constate que ces vecteurs sont bien orthogonaux dans $\mathbb{R}^3$). On a donc diagonalisé A en $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & -5 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ par formule de changement de base.

Méthode 1: $F = \{0\}$ et $F = \mathbb{K}^3$ sont clairement des sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par A et il n'y a pas d'autres sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ de dimension 0 ou 3. On sait que les droites stables sont celles qui sont engendrées par des vecteurs donc il y a trois droites stables : $F = E_1(A_F)$ ou $F = E_3(A_F)$ ou $F = E_{-4}(A_F)$. Comme, A est symétrique, les orthogonaux des sous-espaces stables par A le sont aussi. Ainsi, il existe exactement trois plans stables qui sont $F = E_1(A_F)^\perp$ ou $F = E_3(A_F)^\perp$ ou $F = E_{-4}(A_F)^\perp$, c'est-à-dire $F = E_3(A) \oplus E_{-4}(A)$, $F = E_1(A) \oplus E_{-4}(A)$ ou $F = E_1(A) \oplus E_3(A)$.

Méthode 2: Soit F un sous-espace de $\mathbb{K}^3$ stable par A, alors A induit sur F un endomorphisme qu'on sait être diagonalisable d'après le cours. On sait aussi que χ_{A_F} divise χ_A. Traitons alors plusieurs cas :

- si $\underline{\mathrm{dim}(F) = 0}$, alors $F = \{0\}$.
- si $\underline{\mathrm{dim}(F) = 1}$, alors on ne peut avoir que $\chi_{A_F} = X-1$ ou $\chi_{A_F} = X-3$ ou $\chi_{A_F} = X+4$ car $\deg(\chi_{A_F}) = 1$. Comme A_F est diagonalisable, F est la somme de ses sous-espaces propres et on a donc $F = E_1(A_F)$ ou $F = E_3(A_F)$ ou $F = E_{-4}(A_F)$. Mais, par exemple si $\chi_{A_F} = X-1$, 1 est valeur propre de A_F donc $v_1 \in F$ et on a $F = \mathrm{Vect}(v_1) = E_1(A)$. Ainsi, on a $F = E_1(A)$ ou $F = E_3(A)$ ou $F = E_{-4}(A)$.

- si $\underline{\dim(F)=2}$, alors on ne peut avoir que $\chi_{A_F} = (X-1)(X-3)$ ou $\chi_{A_F} = (X-1)(X+4)$ ou $\chi_{A_F} = (X-3)(X+4)$ car $\deg(\chi_{A_F}) = 2$. A_F est diagonalisable donc F est la somme de ses sous-espaces propres et on a donc $F = E_1(A) \oplus E_3(A)$ (car v_1 et v_2 sont forcément dans F puisque 1 et 3 sont valeurs propres de A_F) ou $F = E_1(A) \oplus E_{-4}(A)$ (idem v_1 et v_3 sont dans F) ou $F = E_3(A) \oplus E_{-4}(A)$.
- si $\underline{\dim(F)=3}$, alors $F = \mathbb{K}^3$.

La méthode 1 utilise la propriété de symétrie de A (mais seulement dans $\mathbb{R}^3$) alors que la méthode 2 est plus générale pour trouver les sous-espaces stables par un endomorphisme (ou une matrice).

Réciproquement, ces huit sous-espaces de $\mathbb{K}^3$ sont stables par A car ils possèdent tous une base de vecteurs propres de A. Il existe donc exactement 8 sous-espaces de $\mathbb{K}^3$ stables par A.

b. La matrice 0 appartient à $C(A)$ donc $C(A) \neq \emptyset$ et $C(A) \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Si $(M,N) \in C(A)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $A(\lambda M + N) = \lambda AM + AN = \lambda MA + NA = (\lambda M + N)A$ donc $\lambda M + N \in C(A)$. Ainsi, $C(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donc lui-même un espace vectoriel.

De plus, $A(MN) = (AM)N = (MA)N = M(AN) = M(NA) = (MN)A$ par associativité du produit matriciel donc $C(A)$ est aussi stable par produit. Comme $I_3 \in C(A)$, $C(A)$ est une sous-algèbre de l'algèbre $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Méthode 1 : Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ et $N = P^{-1}MP$, alors $M \in C(A) \Longleftrightarrow AM = MA$ ce qui donne en remplaçant $M \in C(A) \Longleftrightarrow PDP^{-1}PNP^{-1} = PNP^{-1}PDP^{-1} \Longleftrightarrow DN = ND$. Si on effectue les calculs ND et DN et qu'on identifie, on trouve sans peine que $M \in C(A) \Longleftrightarrow N$ est diagonale.

Méthode 2 : Si $M \in C(A)$, les sous-espaces propres de A sont stables par M, ce qui prouve que l'on a $Mv_1 \in \mathrm{Vect}(v_1)$, $Mv_2 \in \mathrm{Vect}(v_2)$ et $Mv_3 \in \mathrm{Vect}(v_3)$ donc il existe $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) \in \mathbb{K}^3$ tel que $Mv_1 = \alpha_1 v_1$, $Mv_2 = \alpha_2 v_2$ et $Mv_3 = \alpha_3 v_3$. Ainsi, en notant u l'endomorphisme canoniquement associé à M et que $\mathcal{B} = (v_1,v_2,v_3)$, comme $N = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{diag}(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)$, on a $M = P\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}P^{-1}$.

Comme $\varphi : U \mapsto PUP^{-1}$ est clairement un automorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et que la dimension du sous-espace des matrices diagonales vaut 3, alors $\dim(C(A)) = 3$.

c. Si $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $M^2 = A$, alors $MA = M^3 = AM$ donc $M \in C(A)$. Ainsi, $M = PD'P^{-1}$ avec $D' \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale. Or $M^2 = A$ équivaut à $D'^2 = D$ ce qui est impossible car $-4 < 0$ ne peut être le carré d'un réel. Par contre, pour le cas complexe, si $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $M^2 = A$, alors $MA = M^3 = AM$ donc $M \in C(A)$. Ainsi, $M = PD'P^{-1}$ avec $D' \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ diagonale. Or $M^2 = A$ équivaut à $D'^2 = D$ et, en écrivant $D' = \mathrm{diag}(\alpha\ \beta\ \gamma)$, $D'^2 = D$ implique $\alpha^2 = 1$, $\beta^2 = 3$ et $\gamma^2 = -4$ et on a donc 8 matrices D' qui conviennent, ce sont les $D' = \mathrm{diag}(\pm 1, \pm\sqrt{3}, \pm 2i)$. , il existe exactement huit matrices complexes qui vérifient $M^2 = A$, ce sont les matrices $M = P\mathrm{diag}(\pm 1, \pm\sqrt{3}, \pm 2i)P^{-1}$.

72 **a.** Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})^2$ tel que $AB = BA$. On va considérer différents cas :

- Si χ_A admet deux racines distinctes λ_1 et λ_2, on sait d'après le cours qu'alors A est diagonalisable et il existe donc $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2)$. Posons $D' = P^{-1}BP$, on a l'équivalence $AB = BA \Longleftrightarrow PDD'P^{-1} = PD'DP^{-1} \Longleftrightarrow DD' = D'D$. Or, par un calcul matriciel direct, on montre que $DD' = D'D$ équivaut à $D' = \mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2)$ diagonale. En posant Q l'unique polynôme d'interpolation de LAGRANGE de $\mathbb{R}_1[X]$ tel que $Q(\lambda_1) = \mu_1$ et $Q(\lambda_2) = \mu_2$, on a $Q(D) = D'$ donc $Q(A) = PQ(D)P^{-1} = PD'P^{-1} = B$ et B est bien un polynôme en A.

- Si χ_B admet deux racines distinctes, on conclut par symétrie que A est un polynôme en B.
- Si χ_A admet une racine double λ mais que A est diagonalisable, alors $\dim(E_\lambda(A)) = m_\lambda(A) = 2$ donc $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_2) = \mathbb{C}^2$ et $A = \lambda I_2$ de sorte que $A = Q(B)$ avec $Q = \lambda$.
- Si χ_B admet une racine double μ mais que B est diagonalisable, $B = \mu I_2$ et $B = Q(A)$ avec $Q = \mu$.
- Si χ_A, χ_B admettent respectivement pour racine double λ, μ et que ni A ni B ne sont diagonalisables, on sait néanmoins que A et B sont trigonalisables car χ_A et χ_B sont scindés sur $\mathbb{C}$ et il existe une matrice $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $A = PTP^{-1}$ avec $T = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ avec $a \neq 0$. En notant $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ la base de $\mathbb{C}^2$ telle que P est la matrice de passage entre la base canonique et la base $\mathcal{B}$, on a donc $Av_1 = \lambda v_1$ donc, comme $AB = BA$, $ABv_1 = BAv_1 = \lambda Bv_1$ donc $Bv_1 \in E_\lambda(A) = \mathrm{Vect}(v_1)$ ce qui prouve qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $Bv_1 = \alpha v_1$. Mais comme μ est la seule valeur propre de B, on a forcément $\alpha = \mu$. Comme $\mathrm{Tr}\,(B) = 2\mu$, on a forcément, par la formule de changement de base, $B = PT'P^{-1}$ avec $T' = \begin{pmatrix} \mu & b \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ avec $b \neq 0$. Par exemple, comme $T' = \frac{b}{a}T + \left(\mu - \frac{b\lambda}{a}\right)I_2$, on a aussi en multipliant par P à gauche et P^{-1} à droite, $B = \frac{b}{a}A + \left(\mu - \frac{b\lambda}{a}\right)I_2 = Q(A)$ avec $Q = T' = \frac{b}{a}X\mu - \frac{b\lambda}{a}$ donc B est un polynôme en A (mais A est aussi dans ce cas un polynôme en B).

Dans tous les cas, si $(A, B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})^2$ tel que $AB = BA$, B est un polynôme en A ou A un polynôme en B.

b. Prenons $A = E_{1,2}$ et $B = E_{1,3}$, alors $AB = BA = 0$. Comme $A^2 = 0$, si $Q = \sum_{k=0}^{+\infty} q_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, on a $Q(A) = q_0 I_3 + q_1 A \in \mathrm{Vect}(I_3, A)$ donc l'ensemble des polynômes en A, noté $\mathbb{C}[A]$, vérifie $\mathbb{C}[A] = \mathrm{Vect}(I_3, A)$ car il est clair que $\mathrm{Vect}(I_3, A) \subset \mathbb{C}[A]$. De même, comme $B^2 = 0$, on a $\mathbb{C}[B] = \mathrm{Vect}(I_3, B)$. Par conséquent, $A \notin \mathbb{C}[B]$ et $B \notin \mathbb{C}[A]$ donc A n'est pas un polynôme en B et B n'est pas un polynôme en A.

c. Prenons à nouveau $A = E_{1,2}$ et $B = E_{1,3}$, alors $AB = BA = 0$, $\mathbb{R}[A] = \mathrm{Vect}(I_3, A)$ et $\mathbb{R}[B] = \mathrm{Vect}(I_3, B)$ donc, puisque $A \notin \mathrm{Vect}(I_3, B)$ et $B \notin \mathrm{Vect}(I_3, A)$, donc A (resp. B) n'est pas un polynôme en B (resp. A).

73 Le polynôme $P = X^2 - 6X + 8 = (X-2)(X-4)$ est annulateur de A donc, d'après le cours, $\mathrm{Sp}(A) \subset \{2, 4\}$. De plus, comme P est scindé à racines simples, A est diagonalisable, donc $\det(A) = 2^{m_2(A)} 4^{m_4(A)}$ d'après le cours. Comme $\det(A) = 32 = 2^1 \times 4^2$ par hypothèse, on a forcément $m_2(A) = 1$ et $m_4(A) = 2$. Il existe donc une matrice $Q \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $A = QDQ^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(2, 4, 4)$.

Comme $\psi : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $\psi(M) = QMQ^{-1}$ est clairement linéaire et qu'elle est bijective car $QMQ^{-1} = N \iff N = Q^{-1}MQ$ pour $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, φ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, qui transforme donc une base en base, donc la base canonique $\mathcal{B}_0 = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,1}, E_{3,2}, E_{3,3})$ en une base $\mathcal{B} = (QE_{1,1}Q^{-1}, QE_{1,2}Q^{-1}, QE_{1,3}Q^{-1}, QE_{2,1}Q^{-1}, QE_{2,2}Q^{-1}, QE_{2,3}Q^{-1}, QE_{3,1}Q^{-1}, QE_{3,2}Q^{-1}, QE_{3,3}Q^{-1})$.

L'application φ_A est aussi un endomorphisme de $\mathcal{M}_3(R)$ et on sait que sa trace est la trace de sa matrice dans n'importe quelle base de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, en particulier en notant $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi_A)$, on a $\mathrm{Tr}\,(\varphi_A) = \mathrm{Tr}\,(M)$. Or,

- $\varphi_A(QE_{1,1}Q^{-1}) = QDE_{1,1}Q^{-1} = 2QE_{1,1}Q^{-1}$ car $DE_{1,1} = 2E_{1,1}$.
- $\varphi_A(QE_{1,2}Q^{-1}) = QDE_{1,2}Q^{-1} = 2QE_{1,2}Q^{-1}$ car $DE_{1,2} = 2E_{1,2}$.

- $\varphi_A(QE_{1,3}Q^{-1}) = QDE_{1,3}Q^{-1} = 2QE_{1,3}Q^{-1}$ car $DE_{1,3} = 2E_{1,3}$.
- $\varphi_A(QE_{2,1}Q^{-1}) = QDE_{2,1}Q^{-1} = 4QE_{2,1}Q^{-1}$ car $DE_{2,1} = 4E_{1,1}$.
- $\varphi_A(QE_{2,2}Q^{-1}) = QDE_{2,2}Q^{-1} = 4QE_{2,2}Q^{-1}$ car $DE_{2,2} = 4E_{1,2}$.
- $\varphi_A(QE_{2,3}Q^{-1}) = QDE_{2,3}Q^{-1} = 4QE_{2,3}Q^{-1}$ car $DE_{2,3} = 4E_{1,3}$.
- $\varphi_A(QE_{3,1}Q^{-1}) = QDE_{3,1}Q^{-1} = 4QE_{3,1}Q^{-1}$ car $DE_{3,1} = 4E_{3,1}$.
- $\varphi_A(QE_{3,2}Q^{-1}) = QDE_{3,2}Q^{-1} = 4QE_{3,2}Q^{-1}$ car $DE_{3,2} = 4E_{3,2}$.
- $\varphi_A(QE_{3,3}Q^{-1}) = QDE_{3,3}Q^{-1} = 4QE_{3,3}Q^{-1}$ car $DE_{3,3} = 4E_{3,3}$.

Ainsi, $M = \mathrm{diag}(2,2,2,4,4,4,4,4,4)$ donc $\mathrm{Tr}\,(\varphi_A) = 30$.

74 **a.** Si $k \in \mathbb{R}$, la matrice A est symétrique réelle donc elle est diagonalisable d'après le théorème spectral. Comme les colonnes 1, 3 et 4 de A sont les mêmes et que les deux premières colonnes de A ne sont pas colinéaires, on a rang$\,(A) = 2$ donc , par la formule du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 4 - 2 = 2$ et 0 est valeur propre double de A. Comme on sait que les vecteurs propres associés aux valeurs propres non nulles appartiennent à $\mathrm{Im}\,(A) = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ avec $v_1 = e_2$ et $v_2 = e_1 + ke_2 + e_3 + e_4$, on cherche les vecteurs propres sous la forme $v = (1, \alpha, 1, 1) = v_2 + (\alpha - k)v_1$ (parce que v_1 n'est pas vecteur propre de A). Ainsi, pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $Av = \lambda v \iff (\alpha = \lambda,\ k\alpha + 3 = \lambda\alpha) \iff (\alpha = \lambda,\ \alpha^2 - k\alpha - 3 = 0)$. Les racines de $X^2 - kX - 3$ sont $\lambda_1 = \dfrac{k + \sqrt{k^2+12}}{2}$ et $\lambda_2 = \dfrac{k - \sqrt{k^2+12}}{2}$. D'après l'équivalence précédente, les vecteurs $v_1 = (1, \lambda_1, 1, 1)$ et $v_2 = (1, \lambda_2, 1, 1)$ sont propres pour A respectivement associés aux valeurs propres λ_1 et λ_2. Par conséquent, $\mathrm{Sp}(A) = \{0, \lambda_1, \lambda_2\}$ et 0 est valeur propre double de Aet comme $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}(v_3, v_4)$ avec $v_3 = (1, 0, -1, 0)$ et $v_4 = (1, 0, 0, -1)$ par exemple, on a $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. On peut bien sûr choisir $P \in O(4)$, c'est garanti par le théorème spectral, dans ce cas, comme $||v_1||^2 = 3 + \lambda_1^2 = 6 + k\lambda_1$, $||v_2||^2 = 3 + \lambda_2^2 = 6 + k\lambda_2$ et $\mathrm{Ker}(A) = E_0(A) = \mathrm{Vect}(w_3, w_4)$ avec $w_3 \perp w_4$ si $w_3 = v_3$ et $w_4 = (1, 0, 1, -2)$ on peut prendre $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{k\lambda_1+6} & \frac{1}{k\lambda_2+6} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{\lambda_1}{k\lambda_1+6} & \frac{\lambda_2}{k\lambda_2+6} & 0 & 0 \\ \frac{1}{k\lambda_1+6} & \frac{1}{k\lambda_2+6} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{k\lambda_1+6} & \frac{1}{k\lambda_2+6} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$.

b. Si $k \in \mathbb{C}$, on effectue les opérations $C_1 \longleftarrow C_1 - C_4$ et $C_3 \longleftarrow C_3 - C_4$ dans $\chi_A = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 & 0 \\ -1 & X-k & -1 & -1 \\ 0 & -1 & X & 0 \\ 0 & -1 & 0 & X \end{vmatrix}$ et, par linéarité par rapport aux colonnes 1 et 3, on a $\chi_A = X^2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & X-k & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & X \end{vmatrix}$ puis, en développant par rapport à la dernière colonne, $\chi_A = X^2\left((-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} + X\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & X-k & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}\right)$ qui se calcule en $\chi_A = X^2(-3 + X(X-k)) = X^2(X^2 - kX - 3)$. Soit $\Delta = k^2 + 12$ le discriminant de $X^2 - kX - 3$:

• Si $\Delta \neq 0$, alors A a une racine double 0 alors que $E_0(A) = \mathrm{Ker}(A)$ est de dimension 2 avec la formule du rang car rang $(A) = 2$, et A a aussi deux racines simples $\dfrac{k+\delta}{2}$ et $\dfrac{k-\delta}{2}$ où δ est une racine carrée de Δ. Comme ces deux nouvelles valeurs propres de A sont distinctes et non nulles, les sous-espaces propres associés sont des droites. Ainsi, A est diagonalisable.

• Si $\Delta = 0$, ce qui équivaut à $k = \pm 2\sqrt{3}\,i$, A admet toujours 0 pour valeur propre double avec $E_0(A)$ qui est un plan. Il y a une autre valeur propre double de A qui est $\dfrac{k}{2} = \pm\sqrt{3}\,i$. Par exemple si $k = 2\sqrt{3}\,i$, comme $A - \dfrac{k}{2}I_4 = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}\,i & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{3}\,i & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{3}\,i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\sqrt{3}\,i \end{pmatrix}$ est de rang 3 car ses trois premières colonnes forment une famille libre, on a $\dim(E_{k/2}(A)) = 1$ alors que $\dfrac{k}{2}$ est d'ordre 2, ce qui montre que A n'est pas diagonalisable.

Par conséquent, A est diagonalisable si et seulement si $k \neq \pm 2\sqrt{3}\,i$.

75 Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on constate que la somme des trois colonnes de A donne la colonne $\begin{pmatrix} \sin(\alpha) + \sin(2\alpha) \\ \sin(\alpha) + \sin(2\alpha) \\ \sin(\alpha) + \sin(2\alpha) \end{pmatrix}$ donc on effectue l'opération de Gauss $C_1 \longleftarrow C_1 + C_2 + C_3$ dans $\chi_A = \begin{vmatrix} X & -\sin(2\alpha) & -\sin(\alpha) \\ -\sin(2\alpha) & X & -\sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & 0 & X - \sin(2\alpha) \end{vmatrix}$ et on obtient $\chi_A = \begin{vmatrix} X - \sin(2\alpha) - \sin(\alpha) & -\sin(2\alpha) & -\sin(\alpha) \\ X - \sin(2\alpha) - \sin(\alpha) & X & -\sin(\alpha) \\ X - \sin(2\alpha) - \sin(\alpha) & 0 & X - \sin(2\alpha) \end{vmatrix}$ et on utilise la linéarité du déterminant par rapport à la première colonne pour avoir $\chi_A = \big(X - \sin(2\alpha) - \sin(\alpha)\big) \begin{vmatrix} 1 & -\sin(2\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 1 & X & -\sin(\alpha) \\ 1 & 0 & X - \sin(2\alpha) \end{vmatrix}$. Ensuite $L_2 \longleftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \longleftarrow L_3 - L_1$ et $\chi_A = \big(X - \sin(2\alpha) - \sin(\alpha)\big) \begin{vmatrix} 1 & -\sin(2\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & X + \sin(2\alpha) & 0 \\ 0 & \sin(2\alpha) & X - \sin(2\alpha) + \sin(\alpha) \end{vmatrix}$. En développant par rapport à la première colonne, $\chi_A = \big(X - \sin(2\alpha) - \sin(\alpha)\big)\big(X + \sin(2\alpha)\big)\big(X - \sin(2\alpha) + \sin(\alpha)\big)$. Posons $\lambda_1 = -\sin(2\alpha)$, $\lambda_2 = \sin(2\alpha) + \sin(\alpha)$ et $\lambda_3 = \sin(2\alpha) - \sin(\alpha)$ de sorte que $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont les trois valeurs propres réelles de A.

• $\lambda_1 = \lambda_2 \Longleftrightarrow 2\sin(2\alpha) + \sin(\alpha) = 0 \Longleftrightarrow \sin(\alpha)\big(4\cos(\alpha) + 1\big) = 0 \Longleftrightarrow \big(\alpha \equiv 0\ [\pi]$ ou $\alpha \equiv \pm\alpha_0\ [2\pi]\big)$ en posant $\alpha_0 = \mathrm{Arccos}\left(-\dfrac{1}{4}\right)$ car $\sin(2\alpha) = 2\cos(\alpha)\sin(\alpha)$.

• $\lambda_1 = \lambda_3 \Longleftrightarrow 2\sin(2\alpha) - \sin(\alpha) = 0 \Longleftrightarrow \sin(\alpha)\big(4\cos(\alpha) - 1\big) = 0 \Longleftrightarrow \big(\alpha \equiv 0\ [\pi]$ ou $\alpha \equiv \pm\alpha_1\ [2\pi]\big)$ en posant $\alpha_1 = \mathrm{Arccos}\left(\dfrac{1}{4}\right) \sim 1,32$ (ou $\sim 76^o$) et $\alpha_0 = \pi - \alpha_1$ par les propriétés de la fonction Arccos.

• $\lambda_2 = \lambda_3 \Longleftrightarrow \sin(\alpha) = 0 \Longleftrightarrow \alpha \equiv 0\ [\pi]$.

Nous pouvons maintenant distinguer plusieurs cas :

• Si $\alpha \not\equiv 0, \pi, \pm\alpha_0, \pm\alpha_1\ [2\pi]$, alors d'après les équivalences précédentes, A possède trois valeurs propres réelles distinctes donc A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

• Si $\alpha \equiv 0\ [\pi]$, alors $A = 0$ donc A est diagonalisable.

• Si $\alpha \equiv \alpha_0\ [2\pi]$, $\cos(\alpha) = -\dfrac{1}{4}$ et $\sin(\alpha) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha)} = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$, $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) = -\dfrac{\sqrt{15}}{8}$

donc $\lambda_1 = \dfrac{\sqrt{15}}{8} \sim 0,48$ et $\lambda_3 = -\dfrac{\sqrt{15}}{8} - \dfrac{\sqrt{15}}{4} = -\dfrac{3\sqrt{15}}{8} \sim -1,45$ alors $\mathrm{Sp}(A) = \left\{\dfrac{\sqrt{15}}{8}, -\dfrac{3\sqrt{15}}{8}\right\}$ et λ_1 est valeur propre double de A. Or $A - \lambda_1 I_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{15}}{8} & \frac{\sqrt{15}}{4} \\ -\frac{\sqrt{15}}{8} & 0 & \frac{\sqrt{15}}{4} \\ \frac{\sqrt{15}}{4} & 0 & -\frac{\sqrt{15}}{8} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{15}}{8} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{15}}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{15}}{8} \end{pmatrix}$

donc $A - \lambda_1 I_3 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{15}}{8} & -\frac{\sqrt{15}}{8} & \frac{\sqrt{15}}{4} \\ -\frac{\sqrt{15}}{8} & -\frac{\sqrt{15}}{8} & \frac{\sqrt{15}}{4} \\ \frac{\sqrt{15}}{4} & 0 & -\frac{\sqrt{15}}{4} \end{pmatrix}$ est clairement de rang 2 car les lignes 1 et 2 sont égales et les deux dernières sont indépendantes. Par la formule du rang $\dim(\mathrm{Ker}(A - \lambda_1 I_3)) = 1$ donc A n'est pas diagonalisable mais seulement trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ car χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$.

• Si $\alpha \equiv -\alpha_0\ [2\pi]$, la matrice A est l'opposée de celle du cas précédent donc elle n'est pas non plus diagonalisable mais seulement trigonalisable.

• Si $\alpha \equiv \alpha_1\ [2\pi]$, $\cos(\alpha) = \dfrac{1}{4}$ et $\sin(\alpha) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha)} = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$, $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) = \dfrac{\sqrt{15}}{8}$ donc $\lambda_1 = -\dfrac{\sqrt{15}}{8} \sim -0,48$ et $\lambda_2 = \dfrac{\sqrt{15}}{8} + \dfrac{\sqrt{15}}{4} = \dfrac{3\sqrt{15}}{8} \sim 1,45$ alors $\mathrm{Sp}(A) = \left\{-\dfrac{\sqrt{15}}{8}, \dfrac{3\sqrt{15}}{8}\right\}$ et λ_1 est valeur propre double de A. Or $A - \lambda_1 I_3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{15}}{8} & \frac{\sqrt{15}}{4} \\ \frac{\sqrt{15}}{8} & 0 & \frac{\sqrt{15}}{4} \\ \frac{\sqrt{15}}{4} & 0 & \frac{\sqrt{15}}{8} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{15}}{8} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{15}}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{15}}{8} \end{pmatrix}$

donc $A - \lambda_1 I_3 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{15}}{8} & \frac{\sqrt{15}}{8} & \frac{\sqrt{15}}{4} \\ \frac{\sqrt{15}}{8} & \frac{\sqrt{15}}{8} & \frac{\sqrt{15}}{4} \\ \frac{\sqrt{15}}{4} & 0 & \frac{\sqrt{15}}{4} \end{pmatrix}$ est encore de rang 2 car les lignes 1 et 2 sont égales et les deux dernières sont indépendantes. Par la formule du rang $\dim(\mathrm{Ker}(A - \lambda_1 I_3)) = 1$ donc A n'est pas diagonalisable mais seulement trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ car χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$.

• Si $\alpha \equiv -\alpha_1\ [2\pi]$, la matrice A est l'opposée de celle du cas précédent donc elle n'est pas non plus diagonalisable mais seulement trigonalisable.

En conclusion, A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pour toute valeur de α réelle sauf si $\alpha = \pm \mathrm{Arccos}\left(\pm \dfrac{1}{4}\right)$ (4 valeurs) auquel cas A n'est que trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

76 **a.** Soit $(A, B) \in G^2$ tel que $\varphi(A) = \varphi(B)$. Soit une matrice $M \in F$ qu'on écrit $M = \sum\limits_{k=1}^{r} \lambda_k M_k$, alors $\mathrm{Tr}\ (AM) = \mathrm{Tr}\ \left(\sum\limits_{k=1}^{r} \lambda_k A M_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{r} \lambda_k \mathrm{Tr}\ (AM_k)$ par linéarité de la trace donc $\mathrm{Tr}\ (AM) = \sum\limits_{k=1}^{r} \lambda_k \mathrm{Tr}\ (BM_k)$ car $\varphi(A) = \varphi(B)$ donc $\forall k \in [\![1; r]\!]$, $\mathrm{Tr}\ (AM_k) = \mathrm{Tr}\ (BM_k)$. Comme on a aussi $\mathrm{Tr}\ (BM) = \sum\limits_{k=1}^{r} \lambda_k \mathrm{Tr}\ (BM_k)$, on en déduit que $\mathrm{Tr}\ (AM) = \mathrm{Tr}\ (BM)$. En particulier, en posant $M = B^{-1}$, on a $M \in G \subset F$ par hypothèse donc

$\mathrm{Tr}\,(AB^{-1}) = \mathrm{Tr}\,(BB^{-1}) = \mathrm{Tr}\,(I_n) = n$. Or toute matrice de G est diagonalisable car le polynôme $X^p - 1$ scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$ est annulateur de toute matrice de G. Comme les racines de $X^p - 1$ sont les éléments de $\mathbb{U}_p$ qui sont de module 1 et que $\mathrm{Tr}\,(AB^{-1}) = n = \sum\limits_{\lambda \in Sp(AB^{-1})} m_\lambda(AB^{-1})\lambda$ est la somme de toutes les valeurs propres de AB^{-1}, $n = \Big|\sum\limits_{\lambda \in Sp(AB^{-1})} m_\lambda(AB^{-1})\lambda\Big| = \sum\limits_{\lambda \in Sp(AB^{-1})} m_\lambda(AB^{-1})|\lambda| = \sum\limits_{\lambda \in Sp(AB^{-1})} m_\lambda(AB^{-1}) = n$. D'après le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire, les valeurs propres de AB^{-1} sont positivement colinéaires, la seule possibilité est qu'on ait $Sp(AB^{-1}) = \{1\}$ et $m_1(AB^{-1}) = n$, ce qui montre que $AB^{-1} = I_n$ donc que $A = B$. Par conséquent, l'application φ est bien injective.

b. Par définition d'un sous-espace engendré, pour tout $k \in [\![1;r]\!]$, il existe une famille finie $\mathcal{F}_k$ de vecteurs de G telle que $M_k = \sum\limits_{M \in \mathcal{F}_k} \lambda_M M$. Pour $A \in G$ et $k \in [\![1;r]\!]$, on a $AM_k = \sum\limits_{M \in \mathcal{F}_k} \lambda_M AM$ et $AM \in G$ par hypothèse. Comme $X^p - 1$ annule AM par hypothèse, AM est diagonalisable et sa trace vaut la somme de ses valeurs propres. Comme ces valeurs propres sont toutes incluses dans $\mathbb{U}_p$ qui a p éléments, $\mathrm{Tr}\,(AM)$ ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs. Ainsi, $\mathrm{Tr}\,(AM_k) = \sum\limits_{M \in \mathcal{F}_k} \lambda_M \mathrm{Tr}\,(AM)$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs car $\mathcal{F}_k$ est fini et que les λ_M sont fixés. Comme $\varphi(A) = \big(\mathrm{Tr}\,(AM_1), \cdots, \mathrm{Tr}\,(AM_r)\big)$ pour tout $A \in G$ et que $\mathrm{Tr}\,(AM_k)$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs pour tout $k \in [\![1;r]\!]$, $\varphi(A)$ ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs donc $\mathrm{Im}\,(\varphi)$ est fini.

c. Comme φ est injective, sa restriction $\widetilde{\varphi} : G \to \mathrm{Im}\,(\varphi)$ est toujours injective mais devient aussi surjective donc $\widetilde{\varphi}$ est bijective. Ceci montre, comme $\mathrm{Im}\,(\widetilde{\varphi}) = \mathrm{Im}\,(\varphi)$ est fini d'après la question **b.**, que l'ensemble G est aussi fini et qu'on a $\mathrm{card}\,(G) = \mathrm{card}\,(\mathrm{Im}\,(\varphi))$.

77 **a.** Si f est diagonalisable, il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = D$ est diagonale. Comme on a aussi $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^2) = D^2$ est diagonale, $\mathcal{B}$ est aussi une base de vecteurs propres de f^2 qui est donc diagonalisable.

b. <u>Si $n = 1$</u>, tout endomorphisme de E étant une homothétie, f et f^2 sont diagonalisables. Ainsi, dans ce cas particulier, f^2 diagonalisable $\Longrightarrow$ f diagonalisable.

<u>Si $n \geqslant 2$</u>, soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = E_{1,2}$, alors $E_{1,2}^2 = 0$ donc $f^2 = 0$ est diagonalisable. De plus, $\chi_f = \chi_{E_{1,2}} = X^n$ puisque $E_{1,2}$ est triangulaire supérieure. Comme, par la formule du rang, on obtient $\dim(E_0(f)) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) = n - \mathrm{rang}\,(f) = n - 1 \neq n$ qui est l'ordre de multiplicité algébrique de 0 dans χ_f, l'endomorphisme f n'est pas diagonalisable.

Dès que $n \geqslant 2$, on n'a donc plus forcément f diagonalisable si f^2 l'est.

c. <u>Une inclusion</u> : si $x \in \mathrm{Ker}(f - \mu \mathrm{id}_E) + \mathrm{Ker}(f + \mu \mathrm{id}_E)$, alors $\exists (y,z) \in \mathrm{Ker}(f - \mu \mathrm{id}_E) \times \mathrm{Ker}(f + \mu \mathrm{id}_E)$, $x = y + z$ donc $f^2(x) = f^2(y) + f^2(z)$. Or $f(y) = \mu y$ donc $f^2(y) = f(\mu y) = \mu f(y) = \mu^2 y = \lambda y$ et $f(z) = -\mu z$ donc $u^2(z) = u(-\mu z) = -\mu u(z) = (-\mu)^2 y = \lambda z$ d'où $f^2(x) = \mu^2(y + z) = \lambda x$ et on a bien $x \in \mathrm{Ker}(f^2 - \lambda \mathrm{id}_E)$. On a bien établi l'inclusion $\mathrm{Ker}(f - \mu \mathrm{id}_E) + \mathrm{Ker}(f + \mu \mathrm{id}_E) \subset \mathrm{Ker}(f^2 - \lambda \mathrm{id}_E)$.

<u>L'autre inclusion</u> : si $x \in \mathrm{Ker}(f^2 - \lambda \mathrm{id}_E)$, $x = y + z$ (1) avec $(y,z) \in \mathrm{Ker}(f - \mu \mathrm{id}_E) \times \mathrm{Ker}(f + \mu \mathrm{id}_E)$, on a donc $f(x) = \mu y - \mu z$ (2) donc $y = \dfrac{f(x) + \mu x}{2\mu}$ et $z = \dfrac{\mu x - f(x)}{2\lambda}$ en combinant les deux équations (1) et

(2) puisque $\mu \neq 0$. Réciproquement, si on pose $y = \dfrac{f(x)+\mu x}{2\mu}$ et $z = \dfrac{\mu x - f(x)}{2\mu}$, on a la relation $x = y + z$ et $f(y) = \dfrac{f^2(x)+\mu f(x)}{2\mu} = \dfrac{\mu^2 x + \mu f(x)}{2\mu} = \mu y$ et, de même $f(z) = -\mu z$. On vient de prouver l'inclusion $\text{Ker}(f^2 - \lambda \text{id}_E) \subset \text{Ker}(f - \mu \text{id}_E) + \text{Ker}(f + \mu \text{id}_E)$. Pour cette dernière inclusion, on aurait pu dire que $X^2 - \lambda = (X-\mu)(X+\mu)$ était un polynôme annulateur scindé à racines simples de l'endomorphisme $\tilde{f}$ induit par f dans $E_\lambda(f^2)$ donc que $E_\lambda(f^2) = E_\mu(\tilde{f}) \oplus E_{-\mu}(\tilde{f})$ et on conclut car $E_\mu(\tilde{f}) = E_\mu(f)$ puisque $E_\mu(f) \subset E_\lambda(f^2)$ et $E_{-\mu}(\tilde{f}) = E_{-\mu}(f)$ puisque $E_{-\mu}(f) \subset E_\lambda(f^2)$ d'après la première inclusion.

Par double inclusion, on a donc $\text{Ker}(f^2 - \lambda \text{id}_E) = \text{Ker}(f - \mu \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(f + \mu \text{id}_E)$ puisque les deux sous-espaces propres sont en somme directe car $\mu \neq -\mu$.

d. <u>Méthode 1</u> : si f^2 est diagonalisable, notons $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de f^2, elles sont non nulles car f^2 est inversible. Par définition, $E = \bigoplus_{k=1}^{r} \text{Ker}(f^2 - \lambda_k \text{id}_E)$. D'après la question précédente, on a donc $E = \bigoplus_{k=1}^{r} \text{Ker}(f - \mu_k \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(f + \mu_k \text{id}_E)$ en notant μ_k une racine carrée complexe de λ_k. Comme E est la somme directe de sous-espaces propres associés à f, par définition, f est diagonalisable.

<u>Méthode 2</u> : si f^2 est diagonalisable et f^2 inversible, alors f est aussi inversible et $\text{Ker}(f) = \{0\}$ donc $0 \notin \text{Sp}(f)$. Notons $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de f^2. On sait que $P = \prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_k)$ est annulateur de f^2 d'où $P(f^2) = \prod_{k=1}^{r} (f^2 - \lambda_k \text{id}_E) = 0$. Notons, pour $k \in [\![1;r]\!]$, μ_k une racine carrée (complexe) de λ_k, alors $\prod_{k=1}^{r} (f^2 - \lambda_k \text{id}_E) = \prod_{k=1}^{r} (f - \mu_k \text{id}_E) \circ (f + \mu_k \text{id}_E) = 0$ donc le polynôme $Q = \prod_{k=1}^{r} (X - \mu_k)(X + \mu_k)$ est annulateur de f. De plus, $\forall k \in [\![1;r]\!]$, $\mu_k \neq -\mu_k$ car $\lambda_k = \mu_k^2 \neq 0$ et $\forall (i,j) \in [\![1;r]\!]^2$ avec $i \neq j$, $\pm\mu_i \neq \pm\mu_j$ car $\lambda_i = \mu_i^2 \neq \mu_j^2 = \lambda_j$. Ainsi, Q annule f et est scindé à racines simples donc f est diagonalisable.

78 **a.** Soit E un espace vectoriel et $p \in \mathcal{L}(E)$, on dit que p est un projecteur de E si $p \circ p = p^2 = p$.

b. Pour $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, on sait que $E_{i,j}^2 = E_{i,j}E_{i,j} = \delta_{i,j}E_{i,j}$. On a deux cas :

- Si $i = j$, on a donc $E_{i,i}^2 = E_{i,i}$ donc $E_{i,i}$ est une matrice de projecteur.
- Si $i \neq j$, on a donc $E_{i,j}^2 = 0 \neq E_{i,j}$ donc $E_{i,j}$ n'est pas une matrice de projecteur.

c. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable, alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ diagonale telles que $M = PDP^{-1} = P\Big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k E_{k,k}\Big)P^{-1} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P E_{k,k} P^{-1}$. Posons, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $P_k = PE_{k,k}P^{-1}$, alors $P_k^2 = PE_{k,k}^2P^{-1} = PE_{k,k}P^{-1} = P_k$ donc P_k est une matrice de projecteur et, grâce à la relation $M = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_k$, donc M est une combinaison linéaire de matrices de projecteurs.

d. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A^2 = A$ donc A est, d'après le cours, la matrice de la projection sur $\text{Im}(A) = \text{Ker}(I_2 - A)$ parallèlement à $\text{Ker}(A)$. Comme $I_2 - A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\text{Im}(A) = \text{Vect}((1,1))$ et $\text{Ker}(A) = \text{Vect}((0,1))$.

De même, si on pose $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on calcule $B^2 = B$ donc, d'après le cours, B est la matrice de la projection sur $\text{Im}(B) = \text{Ker}(I_2 - B) = \text{Vect}((1,0))$ parallèlement à $\text{Ker}(B) = \text{Vect}((1,-1))$.

e. <u>Si $n = 1$</u>, toutes les matrices de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ étant diagonalisables car diagonales, une matrice écrite comme combinaison de matrices de projecteurs est toujours diagonalisable dans $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$.

Si $n \geqslant 2$, la matrice $M = A - B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est combinaison linéaire de matrices de projecteurs d'après la question précédente mais $\chi_M = X^2 + 1$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ donc M n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Plus généralement, si on pose $M' = \begin{pmatrix} M & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & 0_{n-2} \end{pmatrix}$ (par blocs), alors $M' = A' - B'$ avec $A' = \begin{pmatrix} A & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & 0_{n-2} \end{pmatrix}$ et $B' = \begin{pmatrix} B & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & 0_{n-2} \end{pmatrix}$ donc $A'^2 = A'$ et $B'^2 = B'$ par calcul par blocs et $\chi'_M = X^{n-2}(X^2+1)$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ donc M' n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ bien que combinaison linéaire de matrices de projecteurs. Ainsi, si $n \geqslant 2$, une matrice écrite comme combinaison de matrices de projecteurs n'est pas toujours diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

79 **a.** Soit λ une valeur propre de A, alors il existe $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $AX = \lambda X$. Si on pose $P = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k X^k$, on a d'abord $A^k X = \lambda^k X$ par une récurrence classique et simple ce qui donne $0 = 0X = P(A)X = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k A^k X$ ou encore $\Big(\sum\limits_{k=0}^{d} a_k \lambda^k\Big) X = P(\lambda)X = 0$. Comme $X \neq 0$, on a $P(\lambda) = 0$ donc λ est une racine de P.

b. χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$ d'après le théorème de d'Alembert-Gauss et ses racines sont les valeurs propres de A d'où $\chi_A = \prod\limits_{k=1}^{r} (X - \lambda_k)^{m_{\lambda_k}(A)}$ avec $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_r\}$ donc $\chi_A(B) = \prod\limits_{k=1}^{r} (B - \lambda_k I_n)^{m_{\lambda_k}(A)}$. Comme les λ_k ne sont pas des valeurs propres de B par hypothèse, les matrices $B - \lambda_k I_n$ sont inversibles (en effet $B - \lambda I_n \notin GL_n(\mathbb{C}) \Longleftrightarrow \lambda \in \mathrm{Sp}(B)$) donc $\chi_A(B)$ l'est aussi (l'ensemble des matrices inversibles est stable par multiplication car $GL_n(\mathbb{C})$ est un groupe). Ainsi, $\chi_A(B) \in GL_n(\mathbb{C})$.

c. ($\Longleftarrow$) Si $M = 0$, on a clairement $AM = MB = 0$.

($\Longrightarrow$) Si $AM = MB$, on a $A^2M = A(AM) = A(MB) = (AM)B = (MB)B = MB^2$. Soit $k \geqslant 2$ tel que $A^kM = MB^k$, alors $A^{k+1}M = A(A^kM) = A(MB^k) = (AM)B^k = (MB)B^k = MB^{k+1}$ et, par principe de récurrence, on peut conclure que $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^kM = MB^k$ (clair pour $k = 0$). Si $P = \sum\limits_{k=0}^{m} p_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, $P(A)M = \Big(\sum\limits_{k=0}^{m} p_k A^k\Big)M = \sum\limits_{k=0}^{m} p_k A^k M = \sum\limits_{k=0}^{m} p_k M B^k = M\Big(\sum\limits_{k=0}^{m} p_k B^k\Big) = MP(B)$. Si on prend $P = \chi_A$, d'après Cayley-Hamilton, on obtient $M\chi_A(B) = 0$ Or $\chi_A(B)$ est inversible d'après **b.** donc $M = 0$.

d. L'application $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $\varphi(M) = AM - MB$ est clairement linéaire, est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui est de dimension finie, on sait alors que φ est un automorphisme si et seulement si elle est injective. Soit $M \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, on a donc $AM = MB$ donc $M = 0$ d'après **c.**. Ceci prouve que φ est injective donc que $\varphi \in GL(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$. Ainsi, pour une matrice $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une unique $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ antécédent de C par φ, c'est-à-dire une unique matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AM - MB = C$.

80 **a.** Si $\alpha \in \mathbb{R}$, A est symétrique réelle donc elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'après le théorème spectral.

b. Par définition, pour $j \in [\![2;n]\!]$, la colonne j-ième colonne de A, notée C_j, vaut α fois la $(j-1)$-ième colonne de A, c'est-à-dire $C_j = \alpha C_{j-1}$. Comme la première colonne de A n'est pas nulle car $\alpha^{1+1-2} = \alpha^0 = 1$, on a donc rang $(A) = 1$. D'après la formule du rang, on a $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = n - 1 > 0$ et 0 est de multiplicité au moins $n-1$ de sorte que $\chi_A = X^{n-1}(X - \lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ puisque χ_A est scindé dans $\mathbb{C}$ par le théorème de d'Alembert-Gauss. Puisque $\chi_A = X^n - \mathrm{Tr}\,(A)X^{n-1}$ grâce au cours et que $\mathrm{Tr}\,(A) = \sum_{i=1}^{n} \alpha^{2i-2}$, la dernière valeur propre est $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \alpha^{2i-2}$. Ainsi, les valeurs propres de A sont $\underbrace{0,\cdots,0}_{n-1 \text{ fois}}, \mathrm{Tr}\,(A)$.

c. Traitons deux cas :

$\underline{\mathrm{Tr}\,(A) = 0}$: dans ce cas, $\chi_A = X^n$ donc A^n par le théorème de Cayley-Hamilton. Comme $A \neq 0$, on a vu ci-dessus que $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = n-1 \neq n$ donc A n'est pas diagonalisable (la seule matrice nilpotente diagonalisable est la matrice nulle).

$\underline{\mathrm{Tr}\,(A) \neq 0}$: comme χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$ et que les ordres de multiplicité des deux valeurs propres de A sont égales aux dimensions des sous-espaces propres associés donc Aest diagonalisable, c'est-à-dire semblable à $\mathrm{Tr}\,(A)E_{n,n}$ par exemple.

Ainsi, A est diagonalisable $\iff$ $\mathrm{Tr}\,(A) = \sum_{i=1}^{n} \alpha^{2i-2} \neq 0$. On a $\mathrm{Tr}\,(A) = n \neq 0$ si $\alpha = \pm 1$ et, si $\alpha^2 \neq 1$, on a $\mathrm{Tr}\,(A) = \dfrac{\alpha^{2n}-1}{\alpha^2-1}$ donc A est diagonalisable si et seulement si α est un racine $(2n)$-ième de l'unité différente de 1 et de -1. En conclusion, A diagonalisable $\iff$ $\alpha \in \mathbb{U}_{2n} \setminus \{1,-1\}$.

81 **a.** On calcule $\chi_A = \begin{vmatrix} X-3 & 3 & -2 \\ 1 & X-5 & 2 \\ 1 & -3 & X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-3 & 3 & 2(2-X) \\ 1 & X-5 & 0 \\ 1 & -3 & X-2 \end{vmatrix}$ avec l'opération $C_3 \longleftarrow C_3 - 2C_1$ et après avoir factorisé par $X-2$ dans la troisième colonne et effectué l'opération $L_1 \longleftarrow L_1 + 2L_3$, on trouve $\chi_A = (X-2)\begin{vmatrix} X-1 & -3 & 0 \\ 1 & X-5 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (X-2)\big[(X-1)(X-5)+3\big] = (X-2)(X^2-6X+8) = (X-2)^2(X-4)$ après développement par rapport à la dernière colonne. Comme $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ est clairement de rang 1, on en déduit que $\dim(\mathrm{Ker}(A-2I_3)) = 2$ avec la formule du rang donc l'ordre de multiplicité algébrique de 2 est égal à la dimension du sous-espace propre $E_2(A)$, ce qui permet de conclure par le cours que la matrice A est diagonalisable (car $\dim(E_2(A)) + \dim(E_4(A)) = 3$).

b. On constate que $C_1 = C_2 + C_3$ dans $A - 4I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$. Comme 4 est une valeur propre simple de A, $E_4(A) = \mathrm{Vect}(v_1)$ avec $v_1 = (1,-1,-1)$. De plus, $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ donc $E_2(A)$ est le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x - 3y + 2z = 0$ et, par exemple, $E_2(A) = \mathrm{Vect}(v_2, v_3)$ avec $v_2 = (3,1,0)$ et $v_3 = (2,0,-1)$.

c. Comme $\mathbb{R}^3 = E_4(A) \oplus E_4(A)$ car A est diagonalisable, $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ donc, en notant P la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$, on a $A = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(4,2,2)$.

Il suffit de prendre $R = P\Delta P^{-1}$ avec $\Delta = \mathrm{diag}(2, \sqrt{2}, \sqrt{2})$ et on a $\Delta^2 = D$ donc $R^2 = P\Delta^2 P^{-1} = PDP^{-1} = A$.

Si $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $R^2 = A$, comme $(X-2)(X-4)$ est annulateur de A car $\mathrm{Sp}(A) = \{2,4\}$ et A diagonalisable, $(R^2 - 2I_3)(R^2 - 4I_3) = (R - \sqrt{2}I_3)(R + \sqrt{2}I_3)(R - 2I_3)(R + 2I_3) = 0$ donc le polynôme $(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})(X-2)(X+2)$ scindé à racines simples dans $\mathbb{R}$ est annulateur de R donc R est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

82 **a.** $\chi_A = \begin{vmatrix} X-2 & -2 & 1 \\ 1 & X-5 & 1 \\ 0 & -1 & X-2 \end{vmatrix} = (X-2)((X-5)(X-2)+1) - (-2(X-2)+1)$ en développement par rapport à la première colonne. Ainsi, $\chi_A = (X-2)(X^2-7X+11)+2X-5 = X^3-9X^2+27X-27 = (X-3)^3$ (binôme de NEWTON). Comme χ_A est scindé dans $\mathbb{R}[X]$, A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Par contre, comme $E_3(A) = \mathrm{Ker}(A-3I_3) \neq \mathbb{R}^3$ donc $\dim(E_3(A)) \neq 3$ (l'ordre de multiplicité de 3 dans χ_A) car $A \neq 3I_3$, A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (ni bien sûr dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$).

b. Comme $\mathrm{Sp}(A) = \{3\}$ d'après **a.**, si x est un vecteur propre de A, alors $Ax = 3x$ donc la droite $D = \mathrm{Vect}(x)$ est stable par A. Réciproquement, si la droite $D' = \mathrm{Vect}(y)$ est stable par A, on a $y \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ car D' est une droite et $Ay \in D'$ donc $\exists \lambda \in \mathbb{R},\ Ay = \lambda y$ donc y est un vecteur propre de A donc $\lambda = 3$ et $y \in E_3(A)$. Par conséquent, les seules droites stables par A sont celles qui sont incluses dans $E_3(A)$. Comme $A - 3I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est de rang 2, et qu'on constate que $(1,1,1)$ est dans le noyau de $A-3I_3$, on a $E_3(A) = \mathrm{Vect}(x)$ avec $x = (1,1,1)$. Il existe donc une seule droite stable par A, et c'est $D = \mathrm{Vect}(x)$.

c. Soit une base $\mathcal{B}' = (a_1, a_2)$ de P qu'on complète en une base $\mathcal{B} = (a_1, a_2, a_3)$ de $\mathbb{R}^3$. Par stabilité de P, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(a) = \begin{pmatrix} A' & * \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ où $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(a')$. Ainsi, $\chi_a = \det(XI_3 - A) = \begin{vmatrix} XI_2 - A' & * \\ 0 & X-\lambda \end{vmatrix}$ donc $\chi_A = (X-\lambda)\chi_{A'}$ ce qui justifie que $\chi_{A'}$ divise χ_A (et en plus que $\lambda = 3$).

d. Comme P est de dimension 2, $\chi_{a'}$ est unitaire et de degré 2 et il divise $\chi_a = (X-3)^3$ donc $\chi_{a'} = (X-3)^2$. Par CAYLEY-HAMILTON, $(a' - 3\mathrm{id}_P)^2 = 0$ donc $\forall x \in P,\ (a'-3\mathrm{id}_P)^2(x) = (a - 3\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})^2(x) = 0$ et on a bien l'inclusion $P \subset \mathrm{Ker}\big((a-3\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})^2\big)$.

e. Comme $A - 3I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, on a $(A-3I_3)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc $(A-3I_3)^2$ et $(a-3\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})^2$ sont de rang 1 ce qui montre avec la formule du rang que $\dim(\mathrm{Ker}((a-3\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})^2) = 2$. Par inclusion et égalité des dimensions, on a $P = \mathrm{Ker}\big((a-3\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})^2\big)$.

Dans cet exemple, il y a seulement quatre sous-espaces stables par a : $\{0\}$ de dimension 0, $D = \mathrm{Ker}\big(a - 3\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}\big)$ de dimension 1, $P = \mathrm{Ker}\big((a-3\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})^2\big)$ de dimension 2 et $\mathbb{R}^3$ de dimension 3.

83 **a.** La matrice A_n symétrique réelle donc elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'après le théorème spectral.

b. $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ donc $\chi_{A_2} = (X-1)(X-2)-1 = X^2-3X+1$. Les racines de χ_{A_2} sont classiquement $\lambda_1 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \sim 2,61$ et $\lambda_2 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \sim 0,38$ donc, d'après le cours, $\mathrm{Sp}(A_2) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$.

c. Pour $n \geqslant 3$, dans le calcul du déterminant $P_n = \chi_{A_n}$, on effectue les opérations de GAUSS $C_k \longleftarrow C_k - C_1$ pour $k \in [\![2;n]\!]$ et on a $P_n = \begin{vmatrix} X-1 & -X & \cdots & \cdots & -X \\ -1 & X-1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & X-2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & X-n+1 \end{vmatrix}$. On développe ensuite par rapport à la dernière colonne et on a $P_n = (X-n+1)P_{n-1} + (-1)^{n+1}(-X)\begin{vmatrix} -1 & X-1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & X-2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 & X-n+2 \\ -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

Dans ce dernier déterminant, après développement par rapport à la dernière ligne pour obtenir la relation $P_n = (X-n+1)P_{n-1} + (-1)^n X(-1)^{n-1+1}(-1)\prod_{k=1}^{n-2}(X-k)$ donc $P_n = (X-n+1)P_{n-1} - \prod_{k=0}^{n-2}(X-k)$.

d. Initialisation : d'après la question **b.**, $P_2 = X^2-3X+1$ vérifie bien $(-1)^0P_2(0) = 1$, $(-1)^1P_2(1) = 1$ ont le même signe que $P_2(0) = 1$ qui est du signe de $(-1)^2$ et on a $P_2(1) = -1$ et $P_2(2) = -1 < 0$.

Hérédité : soit $n \geqslant 3$, supposons que $\forall k \in [\![0; n-2]\!]$, le réel $(-1)^kP_{n-1}(k)$ a le même signe que $P_{n-1}(0)$ qui est du signe de $(-1)^{n-1}$ et que $P_n(n-1) < 0$ et $P_n(n) < 0$. D'après **c.**, $P_n(0) = -(n-1)P_{n-1}(0)$ a un signe opposé à celui de $P_{n-1}(0)$, donc du signe de $(-1)^n$. Pour $k \in [\![1; n-2]\!]$, $(-1)^kP_n(k) = -(-1)^k(n-k-1)P_{n-1}(k)$ donc $(-1)^kP_n(k) = -(n-k-1)(-1)^kP_{n-1}(k)$ est du signe opposé à celui de $(-1)^kP_{n-1}(k)$, donc du signe opposé à celui de $(-1)^{n-1}$ par hypothèse de récurrence, donc du signe de $(-1)^n$. De plus, pour $k = n-1$, $(-1)^{n-1}P_n(n-1) = -(-1)^{n-1}(n-1)(n-2)\cdots 1 = (-1)^n(n-1)!$ est bien du signe de $(-1)^n$. Enfin, $P_n(n-1) = -(n-1)! < 0$ et $P_n(n) = P_{n-1}(n) - n! < 0$.

Conclusion : on a montré par principe de récurrence que $\forall n \geqslant 2$, $\forall k \in [\![0; n-1]\!]$, $(-1)^kP_n(k)$ a le même signe que $P_n(0)$ qui a le même signe que $(-1)^n$ et $P_n(n-1) < 0$ et $P_n(n) < 0$.

e. Comme P_n est une fonction continue et que P_n change strictement de signe sur tous les intervalles $]0;1[$, $]1;2[$, ...,$]n-2;n-1[$ d'après ce qui précède, par le théorème des valeurs intermédiaires, P_n s'annule au moins une fois sur tous les intervalles $]0;1[$, $]1;2[$, ...,$]n-2;n-1[$, ce qui fait déjà $n-1$ racines distinctes de P_n. De plus, $P_n(n) < 0$ et, comme P_n est unitaire et de degré n, $\lim_{t\to+\infty} P_n(t) = +\infty$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires encore, P_n s'annule au moins une fois sur $]n;+\infty[$, ce qui fait en tout n racines distinctes de P_n qui est de degré n.

Comme $P_n = \chi_{A_n}$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$, la matrice A_n est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et tous ses sous-espaces propres sont des droites.

84 **a.** Si $P \in E$, $P(1-X) \in E$ car $\deg(P(1-X)) = \deg(P).\deg(1-X) = \deg(P)$ et $P(0)X^n \in E$ donc $\Phi(P) \in E$. De plus, si $(P,Q) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\Phi(\lambda P+Q) = (\lambda P+Q)(1-X) + (\lambda P+Q)(0)X^n$ qu'on développe $\Phi(\lambda P+Q) = \lambda\big(P(1-X)+P(0)X^n\big) + \big(Q(1-X)+Q(0)X^n\big) = \lambda\Phi(P)+\Phi(Q)$. Ainsi, $\Phi \in \mathcal{L}(E)$.

On a $\Phi(1) = 1+X^n$ et, pour $k \in [\![1;n]\!]$, $\Phi(X^k) = (1-X)^k$ donc la matrice A de Φ dans la base canonique $\mathcal{B}_0 = (1, X, \cdots, X^n)$ de E est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & \cdots & -n \\ \vdots & 0 & 1 & 3 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$.

b. Pour $P \in E$, on a $\Phi^2(P) = \Phi(P(1-X)+P(0)X^n) = P(1-(1-X)) + P(0)(1-X)^n + P(1)X^n$ donc $\Phi^2(P) = P(X) + P(0)(1-X)^n + P(1)X^n$. Ainsi, $\Phi^2(1) = 1+(1-X)^n+X^n$ et $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $\Phi^2(X^k) = X^k + X^n$

et $A^2 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\Phi^2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -n & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ n & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est triangulaire inférieure car $1 + (-1)^n = 0$.

c. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A, alors il existe $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{C})$ tel que $AX = \lambda X$. En multipliant à gauche par A, $A(AX) = A^2X = A(\lambda X) = \lambda(AX) = \lambda^2 X$ et, comme $X \neq 0$, λ^2 est une valeur propre de A^2.

d. Si $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A^2, il existe $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{C})$ tel que $A^2X = \lambda X$. En notant δ l'une des deux racines carrées de λ, on a donc $(A^2 - \lambda I_n)X = (A^2 - \delta^2 I_n)X = (A - \delta I_n)(A + \delta I_n)X = 0$ donc la matrice $(A - \delta I_n)(A + \delta I_n)$ n'est pas inversible. Comme le produit de deux matrices inversibles est encore inversible, on a donc $(A - \delta I_n)$ ou $(A + \delta I_n)$ non inversible : l'une des racines carrées de λ est valeur propre de A.

e. Comme A^2 est triangulaire, $\chi_{A^2} = (X-2)^2(X-1)^{n-1}$ donc $\mathrm{Sp}(A^2) = \{1, 2\}$. D'après la question **c.**, les seules valeurs propres possibles de A sont $-1, 1, -\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$ et, d'après la question **d.**, 1 ou -1 est valeur propre de A, $\sqrt{2}$ ou $-\sqrt{2}$ est valeur propre de A.

85 **a.** $\chi_M = \begin{vmatrix} X-4 & 3 & -3 \\ -5 & X+3 & -4 \\ 1 & -2 & X+1 \end{vmatrix} = (X-4)(X+3)(X+1) - 12 - 30 + 3(X+3) + 15(X+1) - 8(X-4)$ avec SARRUS qui se développe en $\chi_M = X^3 - 3X + 2 = (X-1)(X^2 + X - 2) = (X-1)^2(X+2)$.

b. Comme χ_M est scindé sur $\mathbb{R}$, la matrice M est trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ d'après le cours.

c. Comme $M - I_3 = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 5 & -4 & 4 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ est de rang 2 car les deux premières colonnes sont indépendantes et les deux dernières opposées, par la formule du rang, on a $\dim(\mathrm{Ker}(M - I_3)) = \dim(E_1(M)) = 1$. Cette dimension n'étant pas égale à l'ordre de multiplicité de 1 dans χ_M, M n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

d. La matrice $M - I_3$ ci-dessus montre que $E_1(M) = \mathrm{Vect}(v_1)$ avec $v_1 = (0,1,1)$. De même, comme on a $M + 2I_3 = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 3 \\ 5 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et que $C_1 + C_2 - C_3 = 0$ dans cette matrice, on a $E_2(M) = \mathrm{Vect}(v_3)$ avec $v_3 = (1,1,-1)$. On cherche un vecteur $v_2 \in \mathbb{R}^3$ tel que $Mv_2 = v_2 + v_1$ qui équivaut à $(M - I_3)v_2 = v_1$. On constate que $v_2 = (1,0,-1)$ vérifie cette condition (il y en a d'autres). Posons $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ la matrice de la famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Comme $\det(P) = 1$, $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et, par formule de changement de base, on a $M = PTP^{-1}$ avec $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ (réduction de JORDAN).

Le système différentiel $\begin{cases} x' = & 4x - 3x + 3z \\ y' = & 5x - 3y + 4z \\ z' = & -x + 2y - z \end{cases}$ s'écrit $X' = MX$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Pour $x, y, z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables, on pose $Y = P^{-1}X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, alors a, b, c sont aussi dérivables sur $\mathbb{R}$ par opérations et on a $X' = MX \iff X' = PTP^{-1}X \iff P^{-1}X' = TP^{-1}X \iff Y' = TY$. Or les solutions du système différentiel

$\begin{cases} a' = & a+b \\ b' = & b \\ c' = & -2c \end{cases}$ sont simplement $b : t \mapsto \beta e^t$, $c : t \mapsto \gamma e^{-2t}$ puis, en reportant, $a : t \mapsto (\alpha + \beta t)e^t$ avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ donc, grâce à l'équivalence précédente, les solutions de $\begin{cases} x' = & 4x - 3x + 3z \\ y' = & 5x - 3y + 4z \\ z' = & -x + 2y - z \end{cases}$ sont, comme $X = PY$, toujours avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, $x : t \mapsto b(t)+c(t) = \beta e^t + \gamma e^{-2t}$, $y : t \mapsto a(t)+c(t) = (\alpha+\beta t)e^t + \gamma e^{-2t}$, $z : t \mapsto a(t) - b(t) - c(t) = (\alpha + \beta t)e^t - \beta e^t - \gamma e^{-2t}$.

Ceci peut s'écrire matriciellement $X(t) = \alpha e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta e^t \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) + \gamma e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

86 Par hypothèse, le polynôme $P = X^3 - 3X - 5$ est annulateur de A. Comme $P' = 3(X^2 - 1)$, la fonction polynomiale P est croissante sur $]-\infty; -1]$ et $[1; +\infty[$ et elle est décroissante sur $[-1; 1]$. Comme $P(-1) = 3$ et $P(1) = -7$, d'après le théorème de la bijection, la fonction P ne s'annule qu'une seule fois en α sur $\mathbb{R}$ car elle est strictement négative sur $]-\infty; 1[$ et qu'elle réalise une bijection de $]1; +\infty[$ dans $]-7; +\infty[$ car $\lim\limits_{t \to +\infty} P(t) = +\infty$. De plus, comme $P(2) = -3 < 0 = P(\alpha) < 13 = P(3)$, on a $\alpha \in]2; 3[$. Comme $P \in \mathbb{R}[X]$, on note β et $\overline{\beta}$ (avec $\mathrm{Re}(\beta) > 0$) les deux autres racines complexes de P. Or on sait que les valeurs propres de A sont des racines de P donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \{\alpha, \beta, \overline{\beta}\}$. Puisque P est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$, A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\det(A) = \alpha^{m_\alpha(A)} \beta^{m_\beta(A)} \overline{\beta}^{m_{\overline{\beta}}(A)}$ (en notant $m_\lambda(A)$ la multiplicité de λ dans χ_A) d'après le cours. Comme A est une matrice réelle, $m_{\overline{\beta}}(A) = m_\beta(A)$ donc $\det(A) = \alpha^{m_\alpha(A)} (\beta\overline{\beta})^{m_\beta(A)} = \alpha^{m_\alpha(A)} |\beta|^{2m_\beta(A)} > 0$.

ORAUX 2024 THÈME 6
THÉORÈMES DE DOMINATION

87 **a.** Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $f_x : t \mapsto \dfrac{\mathrm{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}$ est continue sur $]0;+\infty[$ avec un prolongement par continuité en 0 donné par $f_x(0) = x$ car $\mathrm{Arctan}(xt) \underset{0}{=} xt + o(t)$ donc $f_x(t) \underset{0}{=} x + o(1)$. De plus, $f_x(t) \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{t^3}\right)$ car Arctan est bornée donc f_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par comparaison aux intégrales de RIEMANN car $3 > 1$. F est donc définie sur $D = \mathbb{R}$ et elle est clairement impaire car Arctan l'est.

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,t) = \dfrac{\mathrm{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}$.

- (H_1) Pour $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^0 sur $\mathbb{R}$.
- (H_2) Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $f_x : t \mapsto f(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (déjà vu).
- (H_3) Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, $x \in [-a;a]$ et $t > 0$, $\left|f(x,t)\right| = \dfrac{|\mathrm{Arctan}(xt)|}{t} \times \dfrac{1}{1+t^2} \leqslant \varphi_a(t) = \dfrac{a}{1+t^2}$ et φ_a est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car Arctan est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ car $0 \leqslant \mathrm{Arctan}'(t) = \dfrac{1}{1+t^2} \leqslant 1$ donc $|\mathrm{Arctan}(xt)| = |\mathrm{Arctan}(xt) - \mathrm{Arctan}(0)| \leqslant 1 \times |xt - 0| = |x|t \leqslant at$.

Par le théorème de continuité sous le signe somme, F est continue sur $\mathbb{R}$.

b. On souhaite maintenant dériver.

- (H_1) Pour $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \dfrac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}$.
- (H_2) Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $f_x : t \mapsto f(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations.
- (H_3) Pour $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \left|\dfrac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}\right| \leqslant \psi(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ et ψ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ comme φ_a ci-dessus.

Par le théorème de dérivation sous le signe somme, F est C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}$.

c. Si $x \neq 1$, $x > 0$, on décompose $\dfrac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} = \dfrac{x^2}{(x^2-1)(1+x^2t^2)} + \dfrac{1}{(1-x^2)(1+t^2)}$ en éléments simples donc $F'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{x^2}{(x^2-1)(1+x^2t^2)} + \frac{1}{(1-x^2)(1+t^2)}\right)$ et comme $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \mathrm{Arctan}(xt) = \frac{\pi}{2}$, cela donne $F'(x) = \dfrac{x}{x^2-1}\Big[\mathrm{Arctan}(xt)\Big]_0^{+\infty} + \dfrac{1}{(1-x^2)}\Big[\mathrm{Arctan}(t)\Big]_0^{+\infty} = \dfrac{x\pi}{2(x^2-1)} + \dfrac{\pi}{2(1-x^2)} = \dfrac{\pi}{2(1+x)}$. Comme F' est continue en 1, on a $F'(1) = \displaystyle\lim_{x\to1} F'(x) = \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2(1+1)}$. Ainsi, la relation $F'(x) = \dfrac{\pi}{2(1+x)}$ est valable pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. En intégrant sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ F(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{2} + C$. Comme F est continue en 0 d'après **a.** et que $F(0) = 0$, on a $F(0) = 0 = \displaystyle\lim_{x\to0^+} F(x) = \frac{\pi\ln(1+0)}{2} + C = C$ donc $C = 0$. Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ F(x) = \dfrac{\pi\ln(1+x)}{2}$ et, par imparité de F, on a $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \mathrm{sgn}(x)\dfrac{\pi\ln(1+|x|)}{2}$.

88 **a.** Pour $x \in \mathbb{R}$, soit $f_x : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f_x(t) = \dfrac{t^x}{1+t^2}$ qui est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme $f_x(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{t^{-x}}$, par comparaison aux intégrales de Riemann, f_x est intégrable en 0 si et seulement si $-x < 1 \Longleftrightarrow x > -1$. De plus, $f_x(t) \Longleftrightarrow \dfrac{1}{t^{2-x}}$ donc, de même, f_x est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $2 - x > 1 \Longleftrightarrow x < 1$. Comme f_x est positive, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_x$ converge si et seulement si f_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, c'est-à-dire intégrable en 0 et en $+\infty$. Par conséquent, le domaine de définition de f est $D =]-1;1[$.

b. Pour $x \in D$, f_x est intégrable sur $[1;+\infty[$ d'après **a.** et $f_x(t) = \dfrac{t^x}{1+t^2} = \dfrac{e^{x\ln(t)}}{1+t^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x\ln(t))^n}{n!(1+t^2)}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $g_n : [1;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $g_n(t) = \dfrac{(\ln(t))^n x^n}{n!(1+t^2)}$ de sorte que $g(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} g_n(t)\Big)dt$.

(H_1) $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} g_n$ converge simplement sur $[1;+\infty[$ vers f_x (on en vient).

(H_2) Les fonctions g_n sont continues et intégrables sur $[1;+\infty[$ pour $n \in \mathbb{N}$ par comparaison aux intégrales de Riemann car $g_n(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{(\ln(t))^n x^n}{n!t^2} \underset{+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\Big)$ par croissances comparées.

(H_3) La fonction f_x est continue sur $[1;+\infty[$.

(H_4) Pour $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} |g_n(t)|dt = \frac{|x|^n}{n!}\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)^n}{1+t^2}dt \leqslant \frac{|x|^n}{n!}\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)^n}{t^2}dt$. On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)^n}{t^2}dt$ et, avec $u : t \mapsto (\ln(t))^n$ et $v : t \mapsto -\dfrac{1}{t}$ qui sont de classe C^1 sur $[1;+\infty[$ avec $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées, on obtient pour $n \geqslant 1$, par intégration par parties, $J_n = [u(t)v(t)]_1^{+\infty} - \displaystyle\int_1^{+\infty} \Big(\frac{1}{t}\Big)n(\ln(t))^{n-1}\Big(-\frac{1}{t}\Big)dt = nJ_{n-1}$. Puisque $J_0 = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt = \Big[-\frac{1}{t}\Big]_1^{+\infty} = 1$, on a par une récurrence simple $\forall n \in \mathbb{N},\ J_n = n!$. Ainsi, $\displaystyle\int_1^{+\infty} |g_n(t)|dt \leqslant \frac{J_n|x|^n}{n!} = |x|^n$ et la série géométrique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} |x|^n$ converge car $|x| < 1$.

Par le théorème d'intégration terme à terme, $g(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} g_n(t)\Big)dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_1^{+\infty} g_n(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ en posant $a_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln(t)^n}{1+t^2}dt$ donc g est développable en série entière sur $]-1;1[$.

c. Par la relation de Chasles, $\forall x \in D,\ f(x) = \displaystyle\int_0^1 f_x(t)dt + \int_1^{+\infty} f_x(t)dt$. Dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f_x(t)dt$, on effectue le changement de variable $t = \dfrac{1}{u} = \varphi(u)$ avec φ qui est une bijection strictement décroissante de classe C^1 de $[1;+\infty[$ dans $]0;1]$ et on a $\displaystyle\int_0^1 f_x(t)dt = \int_{+\infty}^1 \frac{(1/u)^x}{1+\frac{1}{u^2}}\Big(-\frac{1}{u^2}\Big)du = \int_1^{+\infty}\frac{u^{-x}}{1+u^2}du = g(-x)$.

Ainsi, $f(x) = g(x) + g(-x)$ donc, comme g est développable en série entière sur $]-1;1[$ d'après **b.**, f l'est aussi et on a $\forall x \in D,\ f(x) = g(x) + g(-x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\big(a_n + (-1)^n a_n\big)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 2a_{2n}x^{2n}$. La fonction f est donc paire sur D, ce qu'on pouvait voir directement avec le même changement de variable $t = \dfrac{1}{u}$.

89 **a.** Pour $x \in \mathbb{R}$, $f_x : t \mapsto \dfrac{\mathrm{Arctan}(tx)}{t(1+t^2)}$ est continue sur $]0;+\infty[$ avec un prolongement par continuité en 0 donné par $f_x(0) = x$ car $\mathrm{Arctan}(xt) \underset{0}{\sim} xt + o(t)$ et $f_x(t) \underset{+\infty}{=} O\Big(\dfrac{1}{t^2}\Big)$ car Arctan est bornée donc f_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ d'après Riemann $(2 > 1)$. F est donc définie sur $\mathbb{R}$ et elle est clairement impaire car Arctan l'est.

b. On va utiliser le théorème de dérivation sous le signe somme. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,t)=\dfrac{\mathrm{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}$ si $t>0$ et $f(x,0)=x$.

(H_1) Pour $t\in\mathbb{R}_+$, $x\mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ par opérations et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)=\dfrac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}$.

(H_2) Pour $x\in\mathbb{R}_+$, la fonction $f_x : t\mapsto f(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (déjà vu).

(H_3) Pour $x\in\mathbb{R}_+$ et $t\in\mathbb{R}_+$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|=\left|\dfrac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}\right|\leqslant\dfrac{1}{1+t^2}=\varphi(t)$ et la fonction φ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par comparaison aux intégrales de Riemann car $\varphi(t)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{t^2}$.

Par le fameux théorème, F est C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ F'(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\dfrac{dt}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}$.

c. Si $x>0$ et $x\neq 1$, on décompose $\dfrac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}=\dfrac{x^2}{(x^2-1)(1+x^2t^2)}+\dfrac{1}{(1-x^2)(1+t^2)}$ en éléments simples donc $F'(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\dfrac{x^2}{(x^2-1)(1+x^2t^2)}+\dfrac{1}{(1-x^2)(1+t^2)}\right)$ et comme $\lim\limits_{t\to+\infty}\mathrm{Arctan}(xt)=\dfrac{\pi}{2}$, cela donne $F'(x)=\dfrac{x}{x^2-1}\Big[\mathrm{Arctan}(xt)\Big]_0^{+\infty}+\dfrac{1}{1-x^2}\Big[\mathrm{Arctan}(t)\Big]_0^{+\infty}$ d'où $F'(x)=\dfrac{x\pi}{2(x^2-1)}+\dfrac{\pi}{2(1-x^2)}=\dfrac{\pi}{2(1+x)}$. Comme F' est continue en 0 et en 1 d'après **b.**, on a $F'(0)=\lim\limits_{x\to0^+}F'(x)=\dfrac{\pi}{2}$ et $F'(1)=\lim\limits_{x\to1}F'(x)=\dfrac{\pi}{4}$ ce qui montre que $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ F'(x)=\dfrac{\pi}{2(1+x)}$. Comme $\mathbb{R}_+$ est un intervalle, en intégrant, il existe une constante $\lambda\in\mathbb{R}$ telle que $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ F(x)=\dfrac{\pi\ln(1+x)}{2}+\lambda$. Mais $F(0)=0$ donc $\lambda=0$ et on a $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ F(x)=\dfrac{\pi\ln(1+x)}{2}$. Puisque F est impaire, on a $\forall x\in\mathbb{R}_-,\ F(x)=-F(-x)=-\dfrac{\pi\ln(1-x)}{2}$, ce qu'on peut résumer en $\forall x\in\mathbb{R},\ F(x)=\mathrm{sgn}(x)\dfrac{\pi\ln(1+|x|)}{2}$.

d. La fonction $h:\theta\mapsto\ln\big(\sin(\theta)\big)$ est continue sur l'intervalle $I=\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ et, comme $\lim\limits_{\theta\to0^+}\dfrac{\sin(\theta)}{\theta}=1$, on a $\lim\limits_{\theta\to0^+}\ln\left(\dfrac{\sin(\theta)}{\theta}\right)=1$ donc $\ln\big(\sin(\theta)\big)\underset{0}{=}\ln(\theta)+o(1)$ ce qui implique que $\ln\big(\sin(\theta)\big)\underset{0}{=}\ln(\theta)+o\big(\ln(\theta)\big)$ car $\lim\limits_{t\to0^+}\ln(\theta)=-\infty$ d'où $h(\theta)\underset{0}{\sim}\ln(\theta)\underset{0}{=}o\left(\dfrac{1}{\sqrt{\theta}}\right)$ donc h est intégrable sur I par comparaison aux intégrales de Riemann donc J existe. On pose $t=\tan(\theta)$, ou $\theta=\mathrm{Arctan}(t)=\psi(t)$ avec ψ qui est une bijection strictement croissante de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ et $J=\displaystyle\int_0^{+\infty}\ln\left(\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)\times\left(\dfrac{1}{1+t^2}\right)dt$. Posons maintenant $u:t\mapsto\ln\left(\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)$ et $v:t\mapsto\mathrm{Arctan}(t)$, u et v étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $u(t)\underset{0}{\sim}\ln(t)$ et $v(t)\underset{0}{\sim}t$ donc $u(t)v(t)\underset{0}{\sim}t\ln(t)$ donc $\lim\limits_{t\to0^+}u(t)v(t)=0$ par croissances comparées et $\lim\limits_{t\to+\infty}u(t)=1$ car $\sqrt{1+t^2}\underset{+\infty}{\sim}t$ et $\lim\limits_{t\to+\infty}v(t)=\dfrac{\pi}{2}$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty}u(t)v(t)=0$. Par intégration par parties, comme $u(t)=\ln(t)-\dfrac{1}{2}\ln(1+t^2)$ donc $u'(t)=\dfrac{1}{t}-\dfrac{t}{1+t^2}=\dfrac{1}{t(1+t^2)}$, on a $J=-\displaystyle\int_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{Arctan}(t)}{t(1+t^2)}dt=-F(1)=-\dfrac{\pi\ln(2)}{2}\sim-1,09$ d'après **c.**.

90 **a.** Pour $x\in\mathbb{R}$, on définit $f_x:[1;+\infty[\to\mathbb{R}$ par $f_x(t)=\dfrac{1}{t^{x+1}+t+1}$, de sorte que f_x est continue sur $[1;+\infty[$ par opérations. Traitons trois cas :

- Si $x>0$, $f_x(t)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{t^{x+1}}$ car $t\underset{+\infty}{=}o(t^{x+1})$ donc f_x est intégrable sur $[1;+\infty[$ par comparaison aux intégrales de Riemann car $x+1>1$ donc $\displaystyle\int_1^{+\infty}f_x$ converge.
- Si $x<0$, $f_x(t)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{t}$ car $t^{x+1}\underset{+\infty}{=}o(t)$ donc f_x n'est pas intégrable sur $[1;+\infty[$ par comparaison aux intégrales de Riemann et comme f_x est positive, $\displaystyle\int_1^{+\infty}f_x$ diverge.

• Si $x = 0$, $f_x(t) = \dfrac{1}{2t+1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2t}$ donc f_x n'est pas intégrable sur $[1; +\infty[$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_0$ diverge.

Par conséquent, le domaine de définition D de F vaut $D = \mathbb{R}_+^*$.

b. .

c. .

91 **a.** Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : x \mapsto \dfrac{\mathrm{Arctan}(n+x)}{(n+x)\sqrt{x}}$ est continue sur $I = \mathbb{R}_+^*$. Or $f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2x^{3/2}}$ donc f_n est intégrable que $[1; +\infty[$ d'après RIEMANN car $\dfrac{3}{2} > 1$. De plus, $f_0(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ et, pour $n \geqslant 1$, $f_n(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{\mathrm{Arctan}(n)}{n\sqrt{x}}$ donc f_n est intégrable sur $]0; 1]$ d'après RIEMANN car $\dfrac{1}{2} < 1$. Ainsi, la fonction f_n est intégrable sur I et la suite $(I_n)_{n \geqslant 0}$ est donc bien définie.

b. Utilisons le théorème de convergence dominée :

(H_1) Pour $x > 0$, on a l'inégalité $0 \leqslant f_n(x) \leqslant \dfrac{\pi}{2n\sqrt{x}}$ donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$ par encadrement. La suite $(f_n)_{n \geqslant 0}$ converge donc simplement sur I vers la fonction nulle, notée f.

(H_2) Toutes les fonctions f_n et la fonction f sont continues sur I.

(H_3) Puisque $\forall x > 0,\ 0 \leqslant \mathrm{Arctan}(x) \leqslant x$ (par le théorème des accroissements finis par exemple car $\exists c \in]0; x[,\ \mathrm{Arctan}(x) = \dfrac{1}{1+c^2}x$ ou par une petite étude de fonctions), on a $\forall x \in]0; 1],\ 0 \leqslant f_n(x) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Mais $\mathrm{Arctan}(x) \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ et $n + x \geqslant x$ donc $\forall x > 1,\ 0 \leqslant f_n(x) \leqslant \dfrac{\pi}{2x\sqrt{x}}$. Ainsi, en posant $\varphi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+$ définie par $\forall x \in]0; 1],\ \varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ et $\forall x > 1,\ \varphi(x) = \dfrac{\pi}{2x\sqrt{x}}$, alors φ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (comme avant) et $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x > 0,\ 0 \leqslant f_n(x) \leqslant \varphi(x)$.

Ainsi, par le théorème de convergence dominée, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} I_n = \int_0^{+\infty} f = 0$.

c. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $g_n : x \mapsto \dfrac{1}{(n+x)\sqrt{x}}$ est continue sur $I = \mathbb{R}_+^*$, $g_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^{3/2}}$ et $g_n(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{n\sqrt{x}}$ donc, par comparaison aux intégrales de RIEMANN, g_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $v_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{dx}{(n+x)\sqrt{x}}$ existe. En effectuant le changement de variable $x = u^2 = \varphi(u)$ avec φ bijection strictement croissante de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, on trouve $v_n = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{du}{n+u^2} = 2\left[\dfrac{1}{\sqrt{n}}\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{u}{\sqrt{n}}\right)\right]_0^{+\infty} = \dfrac{\pi}{\sqrt{n}}$.

d. <u>Méthode 1</u> : par croissance de Arctan sur $[n; +\infty[$, $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \mathrm{Arctan}(n) \leqslant \mathrm{Arctan}(n+x) \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ donc, par croissance de l'intégrale, on a $\mathrm{Arctan}(n)v_n \leqslant I_n \leqslant \dfrac{\pi v_n}{2}$. Comme $\mathrm{Arctan}(n)v_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi v_n}{2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi^2}{2\sqrt{n}}$, par encadrement, on a $I_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi^2}{2\sqrt{n}}$.

<u>Méthode 2</u> : La relation $\forall x > 0,\ \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right) + \mathrm{Arctan}(x) = \dfrac{\pi}{2}$ se montre avec $\psi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $\psi(x) = \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right) + \mathrm{Arctan}(x)$, en constatant que ψ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, que $\psi'(x) = \dfrac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} + \dfrac{1}{1+x^2} = 0$, ce qui prouve que φ est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ et vaut $\varphi(1) = 2\,\mathrm{Arctan}(1) = \dfrac{\pi}{2}$.

Ainsi, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\dfrac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{n+x}\right)\right)\dfrac{dx}{(n+x)\sqrt{x}} = \dfrac{\pi}{2}\int_0^{+\infty} \dfrac{dx}{(n+x)\sqrt{x}} - \int_0^{+\infty} \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{n+x}\right)\dfrac{dx}{(n+x)\sqrt{x}}$.

Par croissance de la fonction Arctan, on a $0 \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{n+x}\right)\dfrac{dx}{(n+x)\sqrt{x}} \leqslant \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{n}\right)v_n$. Ainsi,

$I_n \underset{+\infty}{=} \frac{\pi v_n}{2} + o(v_n)$ car $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ donc $I_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi v_n}{2} = \frac{\pi^2}{2\sqrt{n}}$.

92 **a.** Si $x = -n$ avec $n \in \mathbb{N}$, le terme $\frac{(-1)^n}{n!(n+x)}$ n'est pas défini donc $D \subset \mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N})$. Réciproquement, soit $x \in \mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N})$, en posant $u_n = \frac{(-1)^n}{n!(n+x)}$, on a $u_n \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n!}\right)$ et la série exponentielle $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!}$ converge donc par comparaison, la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n!(n+x)}$ converge absolument donc converge. Ainsi, $D = \mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N})$.

b. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Utilisons le théorème de dérivation des séries de fonctions pour $\sum_{n\geqslant n_0+1} f_n$ sur $[-n_0; +\infty[$:

- (H_1) On a convergence simple de $\sum_{n\geqslant n_0+1} f_n$ sur $[-n_0; +\infty[$ car toutes les fonctions f_n pour $n \geqslant n_0+1$ sont définies sur cet intervalle, la convergence ayant été vue en **a.**.
- (H_2) Toutes les fonctions f_n pour $n \geqslant n_0+1$ sont C^∞ sur $[-n_0; +\infty[$ car ce sont des fonctions rationnelles et, par récurrence simple, $\forall n \geqslant n_0+1,\ \forall x \geqslant -n_0,\ \forall k \in \mathbb{N},\ f_n^{(k)}(x) = \frac{(-1)^n}{n!} \times \frac{(-1)^k k!}{(n+x)^{k+1}}$.
- (H_3) $\forall n \geqslant n_0+1,\ \forall x \in [-n_0; +\infty[,\ \forall k \in \mathbb{N},\ |f_n^{(k)}(x)| = \frac{k!}{n!(n+x)^{k+1}} \leqslant \frac{k!}{n!}$ donc $f_n^{(k)}$ est bornée sur $[-n_0; +\infty[$ et $||f_n^{(k)}||_{\infty,[-n_0;+\infty[} \leqslant \frac{k!}{n!}$. Or la série exponentielle $\sum_{n\geqslant n_0+1} \frac{1}{n!}$ converge ($k!$ est une constante) donc $\sum_{n\geqslant n_0+1} f_n^{(k)}$ converge normalement sur $[-n_0; +\infty[$.

Par un théorème du cours, la fonction $R_{n_0} : x \mapsto \sum_{n\geqslant n_0+1} f_n(x)$ est de classe C^∞ sur $[-n_0; +\infty[$. Or $f = R_{n_0} + \sum_{n=0}^{n_0} f_n$ et toutes les fonctions f_n pour $n \leqslant n_0$ sont de classe C^∞ sur D car rationnelles donc, par somme, f est de classe C^∞ sur $[-n_0; +\infty[\cap D$.

Puisque ceci est vrai pour tout entier $n_0 \in \mathbb{N}$, la fonction f est bien de classe C^∞ sur D.

c. Pour $x \in D$, on a $x+1 \in D$ et, en posant $p = n+1$ dans l'expression de $f(x+1)$, on obtient la relation $xf(x) - f(x+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x}{n!(n+x)} - \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{(p-1)!(p+x)}$ donc $xf(x) - f(x+1) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{e}$.

d. En 0^+ : comme f est continue en 1 d'après **b.**, on a $\lim_{x\to 0^+} f(x+1) = f(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{e}$ donc $\lim_{x\to 0^+} xf(x) = \frac{1}{e} + 1 - \frac{1}{e} = 1$. Par conséquent, $f(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{x}$.

En $+\infty$: comme $|f_n|$ est décroissante et positive sur $[1; +\infty[$, on a $||f_n||_{\infty,[1;+\infty[} = |f_n(1)| = \frac{1}{(n+1)!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme la série exponentielle $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(n+1)!}$ converge, la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur $[1; +\infty[$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \ell_n = 0$. Ainsi, par le théorème de la double limite, on a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n = 0$ donc $\lim_{x\to+\infty} f(x+1) = 0$. Avec **c.**, on a $\lim_{x\to+\infty} xf(x) = \frac{1}{e}$ donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{ex}$.

e. Soit $g_x :]0;1] \to \mathbb{R}$ défini par $g_x(t) = t^{x-1}e^{-t}$. La fonction g_x est continue sur $]0;1]$ et $g_x(t) \underset{0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$ donc g_x est intégrable sur $]0;1]$ par comparaison aux intégrales de RIEMANN car $1 - x < 1$. On connaît le développement en série entière de $\exp$, à sa voir $\forall t \in \mathbb{R},\ e^{-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^n}{n!}$ donc $g_x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{n+x-1}}{n!}$.

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $h_n :]0;1] \to \mathbb{R}$ définie par $h_n(t) = \frac{(-1)^n t^{n+x-1}}{n!}$.

- (H_1) La série $\sum_{n\geqslant 0} h_n$ converge simplement vers g_x sur $]0;1]$ (on en vient).
- (H_2) Les h_n sont continues et intégrables par RIEMANN sur $]0;1]$ car $h_n(t) \underset{0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x-n}}$ et $1 - x - n < 1$.

(H_3) La fonction g_x est continue sur $]0;1]$.

(H_4) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 |h_n(t)|dt = \int_0^1 \frac{t^{n+x-1}}{n!}dt = \frac{1}{n!}\Big[\frac{t^{n+x}}{n+x}\Big]_0^1 = \frac{1}{n!(n+x)}$ car $n+x>0$ et la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n!(n+x)}$ converge d'après la question **a.**.

Par le théorème d'intégration terme à terme, on a g_x intégrable sur $]0;1]$ (on le savait déjà) et surtout la relation $\displaystyle\int_0^1 g_x(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 h_n(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+x)} = f(x) = \int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$.

93 La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)\ln(1-x)}{x}$ est continue sur $]0;1[$. $f(x) \underset{0}{\sim} -\ln(x) \underset{0}{=} o\Big(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\Big)$ car $\ln(1-x)\underset{0}{\sim} -x$ donc f est intégrable sur $\Big]0;\dfrac{1}{2}\Big]$ par comparaison aux intégrales de RIEMANN. De plus, f est intégrable sur $\Big[\dfrac{1}{2};1\Big[$ car $f(x)\underset{1^-}{\sim}(x-1)\ln(1-x)$ car $\ln(x)\underset{1}{\sim} x-1)$ donc f se prolonge par continuité en 1 en posant $f(1)=0$. Comme on a le développement en série entière $\forall x \in]0;1[$, $\ln(1-x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$, il vient, avec $f_n :]0;1] \to \mathbb{R}$ définie par avec $f_n(x) = -\dfrac{x^{n-1}\ln(x)}{n}$, la relation $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)\ln(1-x)}{x}dx = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)dx$.

Le fonctions f_n sont continues sur $]0;1]$ et, comme $f_1(x)\underset{0}{\sim} -\ln(x) \underset{0}{=} o\Big(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\Big)$ et que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f_n(x) = 0$ par croissances comparées donc que f_n se prolonge en une fonction continue sur le segment $[0;1]$ en posant $f_n(0)=0$ si $n \geqslant 2$, les fonctions f_n sont intégrables sur $]0;1]$.

D'abord, en posant $u(x) = x^n$ et $v(x) = \ln(x)$, les fonctions u et v sont bien de classe C^1 sur $]0;1]$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} u(x)v(x) = 0$ par croissances comparées car $n \geqslant 1$ donc, par intégration par parties, on obtient la relation $\displaystyle\int_0^1 f_n = \Big[-\frac{x^n\ln x}{n^2}\Big]_0^1 + \frac{1}{n^2}\int_0^1 x^{n-1}dx = \frac{1}{n^2}\Big[\frac{x^n}{n}\Big]_0^1 = \frac{1}{n^3}$ si $n\geqslant 1$.

Méthode 1 : par linéarité de l'intégrale, comme la fonction $f_1 : x \mapsto -\ln(x)$ est intégrable sur $]0;1]$, et donc $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} f_n(x) = f - f_1$ aussi d'après ce qui précède, on a $I = \displaystyle\int_0^1 f_1 + \int_0^1 \sum_{n=2}^{+\infty} f_n(x)dx$.

Pour $n \geqslant 2$, f_n est continue sur $[0;1]$ en posant $f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = 0$. De plus, f_n est dérivable sur $]0;1]$ et $\forall x \in]0;1]$, $f_n'(x) = -\dfrac{1}{n}\Big((n-1)x^{n-2}\ln(x) + x^{n-2}\Big)$ donc, avec le tableau de variations de f_n, on trouve $||f_n||_{\infty,[0;1]} = f_n\Big(e^{-\frac{1}{(n-1)}}\Big) = \dfrac{1}{en(n-1)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e}{n^2}$. Ainsi, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} f_n$ converge normalement sur $[0;1]$ par RIEMANN. Par convergence normale (donc uniforme) de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} f_n$ sur le segment $[0;1]$, d'après le cours, $\displaystyle\int_0^1 \sum_{n=2}^{+\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=2}^{+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^3} = \zeta(3)-1$. Comme $\displaystyle\int_0^1 f_1 = 1$, on obtient la valeur $I = 1 + \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^3} = \zeta(3) \sim 1.202$.

Méthode 2 : utilisons le théorème d'intégration terme à terme :

(H_1) La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement vers f sur $]0;1[$ (on en vient).

(H_2) Les f_n sont continues et intégrables (déjà vu).

(H_3) La fonction f est continue sur $]0;1[$.

(H_4) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 |f_n(x)|dx = \int_0^1 f_n(x)dx = \frac{1}{n^3}$ et la série de RIEMANN $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n^3}$ converge.

Par le fameux théorème, on conclut que f est intégrable sur $]0;1][$ (on le savait déjà) et surtout la relation

$\int_0^1 f(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} = \zeta(3) \sim 1.202.$

94

95 **a.** Pour $n \geqslant 2$, la fonction $g_n : x \mapsto \left(1-\frac{1}{x}\right)^n$ est continue sur le segment $[2, n]$ donc v_n existe. Dans l'intégrale v_n, on pose $x = nt = \varphi_n(t)$ avec $\varphi_n : [2/n; 1] \to [2; n]$ de classe C^1 donc, par changement de variable et par linéarité de l'intégrale, on a $v_n = n \int_{2/n}^1 \left(1 - \frac{1}{nt}\right)^n dt$. Ainsi, $v_n = n \int_0^1 f_n(t)dt$ avec $f_n :]0; 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(t) = 0$ si $t \in \left]0; \frac{2}{n}\right[$ et $f_n(t) = \left(1 - \frac{1}{nt}\right)^n$ pour $t \in \left[\frac{2}{n}; 1\right]$.

(H_1) Pour $t \in]0; 1]$, comme $\forall n \geqslant \frac{2}{t}$, $f_n(t) = \left(1 - \frac{1}{nt}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{nt}\right)\right)$, et puisque l'on a $\ln\left(1 - \frac{1}{nt}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{nt}$, il vient $\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = e^{-1/t} = f(t)$. Ainsi, la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 2}$ converge simplement vers f sur $]0; 1]$.

(H_2) Les fonctions f_n et f sont continues sur $]0; 1]$.

(H_3) $\forall n \geqslant 2$, $\forall t \in]0; 1]$, $0 \leqslant f_n(t) \leqslant f(t)$ car $\ln$ est concave donc si $t \geqslant \frac{2}{n}$, $\ln\left(1 - \frac{1}{nt}\right) \geqslant -\frac{1}{nt}$. De plus, f est continue et intégrable sur $]0; 1]$ car f se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$ car $\lim_{t\to 0^+} \left(-\frac{1}{t}\right) = -\infty$ et $\lim_{u\to-\infty} e^u = 0$.

Par le théorème de convergence dominée, $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)dt = \int_0^1 f(t)dt$. Ainsi, comme $v_n = n \int_0^1 f_n(t)dt$, il vient $v_n \underset{+\infty}{\sim} n \int_0^1 e^{-1/t}dt$ car $\int_0^1 f(t)dt > 0$ puisque f est positive, continue et non nulle sur $]0; 1]$.

b. Pour $n \geqslant 2$, on a $u_n = \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)^n = \sum_{k=1}^{n} g_n(k+1)$. Or, la fonction dérivable g_n est croissante sur $[1; n+1]$ car $g_n'(x) = \frac{n}{x^2}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{n-1} > 0$ donc $\forall k \in [\![1; n]\!]$, $\int_k^{k+1} g_n(t)dt \leqslant g_n(k+1)$ (1). On somme les inégalités (1) pour $k \in [\![2; n-1]\!]$ pour avoir $\int_2^n g_n(t)dt = v_n \leqslant \sum_{k=2}^{n-1} g_n(k+1) = u_n - \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$. De même, on a $\forall k \in [\![1; n]\!]$, $\leqslant \int_{k+1}^{k+2} g_n(t)dt$ (2) et, en sommant (2) pour $k \in [\![1; n-2]\!]$, on obtient l'inégalité $\sum_{k=1}^{n-2} g_n(k+1) = u_n - \left(\frac{n-1}{n}\right)^n - \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \leqslant v_n = \int_2^n g_n(t)dt$.

Par conséquent, on a l'encadrement $v_n + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \leqslant u_n \leqslant v_n + \left(\frac{n-1}{n}\right)^n + \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ et, comme $v_n + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \underset{+\infty}{=} v_n + O(1) \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et $v_n + \left(\frac{n-1}{n}\right)^n + \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \underset{+\infty}{=} v_n + O(1) \underset{+\infty}{\sim} v_n$, on a $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \underset{+\infty}{\sim} n \int_0^1 e^{-1/t}dt$.

96 **a.** Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, comme $x^2 - 2x\cos(\theta) + 1 = (x - \cos(\theta))^2 + \sin^2(\theta) > 0$ car $\sin(\theta) > 0$ si $\theta \in]0; \pi[$ et que $(x - \cos(\theta))^2 > 0$ si $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$ car $x \neq \pm 1$, la fonction $f_x : \theta \mapsto \ln(x^2 - 2x\cos(\theta) + 1)$ est continue sur le segment $[0; \pi]$ donc $I(x)$ existe.

b. Pour $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}$, $(x-\cos(\theta))^2+\sin^2(\theta) = (x-\cos(\theta)-i\sin(\theta))(x-\cos(\theta)+i\sin(\theta)) = |x-e^{i\theta}|^2$ pour $\theta \in [0; \pi]$ donc $f_x(\theta) = 2\ln(|x - e^{i\theta}|)$ de sorte que, par linéarité de l'intégrale, $I(x) = 2\int_0^\pi \ln\left(|x - e^{i\theta}|\right)d\theta$.

c. Par propriété du logarithme, on a $S_n(x) = \frac{2\pi}{n} \ln\left(\prod_{k=0}^{n-1} |x - e^{\frac{ik\pi}{n}}|\right) = \frac{\pi}{n} \ln\left(\left|\prod_{k=0}^{n-1} \left(x - e^{\frac{ik\pi}{n}}\right)\right|^2\right)$ donc

$S_n(x) = \frac{\pi}{n}\ln\left((x-1)^2\left|\prod_{k=1}^{n-1}\left(x-e^{\frac{ik\pi}{n}}\right)\left(x-e^{\frac{-ik\pi}{n}}\right)\right|\right) = \frac{\pi}{n}\ln\left((x-1)^2\left|\prod_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{2n-1}\left(x-e^{\frac{ik\pi}{n}}\right)\right|\right)$. Or on connaît les $2n$ racines distinctes de $X^{2n}-1$ qui sont les éléments de $\mathbb{U}_{2n} = \left\{e^{\frac{ik\pi}{n}} \mid k \in [\![0;2n-1]\!]\right\}$, ainsi on factorise $X^{2n}-1 = \prod_{k=0}^{2n-1}\left(X-e^{\frac{ik\pi}{n}}\right)$. Par conséquent, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n(x) = \frac{\pi}{n}\ln\left(|x^{2n}-1|.\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons la somme de Riemann $R_n(x) = \frac{\pi-0}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_x\left(0+\frac{k(\pi-0)}{n}\right)$ associée à la fonction f_x continue sur le segment $[0;\pi]$. D'après le cours, $\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = \int_0^{\pi} f_x(\theta)d\theta$. Or, avec la question **b.**, on a $R_n(x) = \frac{\pi-0}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(|x-e^{\frac{ik\pi}{n}}|^2\right)$ donc $R_n(x) = S_n(x)$ et $\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \int_0^{\pi}\ln(x^2-2x\cos(\theta)+1)d\theta = I(x)$.

- Si $|x|<1$, $\lim_{n\to+\infty} x^{2n} = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty}\ln\left(|x^{2n}-1|.\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right) = \ln\left(\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)$ ce qui montre avec ce qui précède (pas d'indétermination) que $\lim_{n\to+\infty}\frac{2\pi}{n}\ln\left(|x^{2n}-1|.\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right) = 0$ d'où $I(x)=0$.
- Si $|x|>1$, on a $S_n(x) = \frac{\pi}{n}\ln\left(|x|^{2n}.|1-x^{-2n}|.\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right) = 2\pi\ln(|x|)+\frac{\pi}{n}\ln\left(|1-x^{-2n}|\right)+\frac{\pi}{n}\ln\left(\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)$ et, avec les mêmes arguments, $\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = 2\pi\ln(|x|)$ donc $I(x) = 2\pi\ln(|x|)$.

d. Soit $h : \left(\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}\right)\times[0;\pi] \to \mathbb{R}$ définie par la relation $h(x,\theta) = \ln(x^2-2x\cos(\theta)+1)$ de sorte que $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\},\ I(x) = \int_0^{\pi} h(x,\theta)d\theta$.

(H_1) $\forall\theta\in[0;\pi]$, la fonction $x \mapsto h(x,\theta)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

(H_2) $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, la fonction $f_x : \theta \mapsto h(x,\theta)$ est continue et intégrable sur $[0;\pi]$ (on l'a vu en question **a.**) et $\theta \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x,\theta) = \frac{2(x-\cos(\theta))}{x^2-2x\cos(\theta)+1}$ est continue sur $[0;\pi]$.

(H_3) - Soit $x \in [a;b] \subset]1;+\infty[$ et $\theta\in[0;\pi]$, $\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,\theta)\right| = \frac{2(x-\cos(\theta))}{|x-e^{i\theta}|^2} \leqslant \frac{2(b+1)}{(a-1)^2} = \varphi_{a,b}(\theta)$ et $\varphi_{a,b}$ est continue donc intégrable sur le segment $[0;\pi]$.

- Soit $x \in [a;b] \subset]-\infty;-1[$ et $\theta\in[0;\pi]$, $\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,\theta)\right| = \frac{2(\cos(\theta)-x)}{|x-e^{i\theta}|^2} \leqslant \frac{2(-a+1)}{(b-1)^2} = \psi_{a,b}(\theta)$ et $\psi_{a,b}$ est continue donc intégrable sur le segment $[0;\pi]$.
- Soit $x \in [-a;a] \subset]-1;1[$ et $\theta\in[0;\pi]$, $\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,\theta)\right| = \frac{2|x-\cos(\theta)|}{|x-e^{i\theta}|^2} \leqslant \frac{2(a+1)}{(1-a)^2} = \Theta_a(\theta)$ et Θ_a est continue donc intégrable sur le segment $[0;\pi]$.

Par le théorème de dérivation sous le signe somme, la fonction I est de classe C^1 sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ et, d'après la formule de Leibniz, $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\},\ I'(x) = \int_0^{\pi}\frac{2(x-\cos(\theta))}{x^2-2x\cos(\theta)+1}d\theta$.

On pose $\theta = 2\,\mathrm{Arctan}(u) = \varphi(u)$ avec φ qui est de classe C^1, strictement croissante et bijective de $[0;+\infty[$ dans $[0;\pi[$ et, par changement de variable, comme $\cos(\theta) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ et $\varphi'(u) = \frac{2}{1+u^2}$, on obtient la relation $I'(x) = \int_0^{+\infty}\frac{2(x(1+u^2)-(1-u^2))}{(1+x^2)(1+u^2)-2x(1-u^2)}\left(\frac{2}{1+u^2}\right)du = 4\int_0^{+\infty}\frac{(x-1)+(x+1)u^2}{(1+u^2)((x-1)^2+(1+x)^2u^2)}du$. Pour $x\neq0$, on décompose $\frac{(x-1)+(x+1)U}{(1+U)((x-1)^2+(1+x)^2U)} = \frac{\alpha}{1+U}+\frac{\beta}{(x-1)^2+(1+x)^2U}$ en éléments simples et, classiquement, $\alpha = \frac{1}{2x}$ et $\beta = \frac{x^2-1}{2x}$. Ainsi, $I'(x) = \frac{2}{x}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+u^2}+\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2+(1+x)^2u^2}\right)du$. Les deux intégrales convergent donc, par linéarité, on a $I'(x) = \frac{2}{x}\Big[\mathrm{Arctan}(u)\Big]_0^{+\infty}+\frac{2}{x}\int_0^{+\infty}+\frac{\frac{x+1}{x-1}}{1+\left(\frac{(x+1)u}{x-1}\right)^2}du$ donc

$I'(x)=\frac{2}{x}\Big[\operatorname{Arctan}(u)\Big]_0^{+\infty}+\frac{2}{x}\Big[\operatorname{Arctan}\Big(\frac{(x+1)u}{x-1}\Big)\Big]_0^{+\infty}$.

- Si $|x|>1$, $\frac{x+1}{x-1}>0$ donc $\Big[\operatorname{Arctan}\Big(\frac{(x+1)u}{x-1}\Big)\Big]_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2}$ et on a $I'(x)=\frac{2\pi}{x}$.
- Si $|x|<1$ et $x\neq 0$, $\frac{x+1}{x-1}<0$ donc $\Big[\operatorname{Arctan}\Big(\frac{(x+1)u}{x-1}\Big)\Big]_0^{+\infty}=-\frac{\pi}{2}$ et on a $I'(x)=0$. Par continuité de I' en 0, on a aussi $I'(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}I'(x)=0$ donc $\forall x\in]-1;1[,\ I'(x)=0$.

En intégrant sur les trois intervalles $]-\infty;-1[$, $]-1;1[$ et $]1;+\infty[$, il existe trois constantes C_1,C_2,C_3 réelles telles que $\forall x\in]-\infty;-1[,\ I(x)=2\pi\ln(|x|)+C_1$, $\forall x\in]-\infty;-1[,\ I(x)=C_2$ et $\forall x\in]1;+\infty[,\ I(x)=2\pi\ln(x)+C_3$. Comme $I(0)=0$, on a $C_2=0$. Pour $|x|>1$, on a $I(x)-2\pi\ln(|x|)=\int_0^{\pi}\big(\ln(x^2-2x\cos(\theta)+1)-\ln(|x|^2)\big)d\theta$. Ainsi, $I(x)-2\pi\ln(|x|)=\int_0^{\pi}\ln\Big(1-\frac{2\cos(\theta)}{x}+\frac{1}{x^2}\Big)d\theta=I\Big(\frac{1}{x}\Big)=0$ donc $I(x)=2\pi\ln(|x|)$ ce qui montre que $C_1=C_3=0$. On retrouve, comme avant, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\},\ I(x)=2\pi\ln(|x|)$ si $|x|<1$ et $I(x)=0$ si $|x|<1$.

97 **a.** Si $x\in\mathbb{R}$, $g_x: t\mapsto\frac{t^3e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}}$ est positive et continue sur $\mathbb{R}_+$ et $g_x(t)\underset{+\infty}{\sim}te^{-xt}$. Traitons deux cas :

- si $x\leqslant 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty}te^{-xt}=+\infty$ donc g_x n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et $f(x)$ n'existe pas.
- si $x>0$, par croissances comparées, $g_x(t)\underset{+\infty}{\sim}te^{-xt}\underset{+\infty}{=}o\Big(\frac{1}{t^2}\Big)$ donc, par comparaison aux intégrales de Riemann, g_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc $\int_0^{+\infty}g_x(t)dt$ converge et $f(x)$ existe.

Par conséquent, le domaine de définition D de f vaut $D=\mathbb{R}_+^*$. Pour $0<x<y$, on a $\forall t\in\mathbb{R}_+,\ e^{-xt}\geqslant e^{-yt}$ donc $g_x(t)\geqslant g_y(t)$ et, par croissance de l'intégrale, $f(x)\geqslant f(y)$. Ainsi, f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Soit $h:\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $h(x,t)=\frac{t^3e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}}$ de sorte que $f(x)=\int_0^{+\infty}h(x,t)dt$.

(H_1) Pout $t\geqslant 0$, la fonction $x\mapsto h(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

(H_2) Pour $x>0$, la fonction $g_x: t\mapsto h(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (on vient de le voir) et la fonction $t\mapsto\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)=\frac{-t^4e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

(H_3) Pour $a>0$, $(x,t)\in[a;+\infty[\times\mathbb{R}_+$, $\Big|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\Big|=\frac{t^4e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}}\leqslant t^2e^{-at}=\varphi_a(t)$ avec φ_a qui est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car $a>0$.

Ainsi, par le théorème de dérivation sous le signe somme, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et, avec la formule de Leibniz, $\forall x>0,\ f'(x)=-\int_0^{+\infty}\frac{t^4e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}}dt$. Pour $0<x<y$, on a $\forall t\in\mathbb{R}_+,\ e^{-xt}\geqslant e^{-yt}$ ce qui donne $\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\leqslant\frac{\partial h}{\partial x}(y,t)$ et, par croissance de l'intégrale, $f'(x)\leqslant f'(y)$. Ainsi, f' est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. On peut donc conclure d'après le cours que f est une fonction convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. On peut utiliser le théorème de convergence dominée à paramètre continu mais, plus élémentairement, $0\leqslant f(x)\leqslant\int_0^{+\infty}te^{-xt}dt=\Big[-t\frac{e^{-xt}}{x}\Big]_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{x}dt=\Big[-\frac{e^{-xt}}{x^2}\Big]_0^{+\infty}=\frac{1}{x^2}$ par intégration par parties avec $u: t\mapsto t$ et $v: t\mapsto-\frac{e^{-xt}}{x}$ qui sont C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et $\lim\limits_{t\to\infty}u(t)v(t)=0$. Par encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

d. La fonction $t\mapsto t^3e^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $t^3e^{-xt}\underset{+\infty}{=}o\Big(\frac{1}{t^2}\Big)$ par croissances comparées car $x>0$. Ainsi, $g(x)$ existe. On peut procéder à trois intégrations par parties successives (pour passer de t^3 à t^0) ou, plus simple, poser $t=\frac{u}{x}=\varphi(u)$ avec φ qui est une bijection C^1 strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ et avoir $g(x)=\int_0^{+\infty}\frac{u^3}{x^4}e^{-u}du=\frac{\Gamma(4)}{x^4}=\frac{3!}{x^4}=\frac{6}{x^4}$.

e. Pour $x>0$, par linéarité de l'intégrale, on a $|f(x)-g(x)|=\left|\int_0^{+\infty}\left(\frac{t^3e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}}-t^3e^{-xt}\right)dt\right|$ qu'on écrit aussi $|f(x)-g(x)|=\int_0^{+\infty}t^3e^{-xt}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\right)dt=\int_0^{+\infty}t^3e^{-xt}\left(\frac{\sqrt{1+t^4}-1}{\sqrt{1+t^4}}\right)dt$ et, avec la quantité conjuguée, $|f(x)-g(x)|=\int_0^{+\infty}t^3e^{-xt}\left(\frac{(1+t^4)-1}{\sqrt{1+t^4}(1+\sqrt{1+t^4})}\right)dt=\int_0^{+\infty}t^7e^{-xt}\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^4}(1+\sqrt{1+t^4})}\right)dt$. Or on minore $\forall t\geqslant 0$, $\sqrt{1+t^4}(1+\sqrt{1+t^4})\geqslant 1$ donc $|f(x)-g(x)|\leqslant\int_0^{+\infty}t^7e^{-xt}dt=\frac{\Gamma(8)}{x^8}=\frac{7!}{x^8}$ comme ci-dessus. On a donc $f(x)-g(x)\underset{+\infty}{=}O\left(\frac{1}{x^8}\right)\underset{+\infty}{=}o\left(\frac{1}{x^4}\right)\underset{+\infty}{=}o(g(x))$, ce qui prouve que $f(x)\underset{+\infty}{\sim}g(x)=\frac{6}{x^4}$.

f. Pour $x\in]0;1]$, par la relation de CHASLES, $f(x)=\int_0^{1/x}h(x,t)dt+\int_{1/x}^{+\infty}h(x,t)dt\geqslant\int_{1/x}^{+\infty}h(x,t)dt$. Or, on a $\int_{1/x}^{+\infty}h(x,t)dt=\int_{1/x}^{+\infty}\frac{t^3e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}}dt\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{1/x}^{+\infty}\frac{t^3e^{-xt}}{t^2}dt=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{1/x}^{+\infty}te^{-xt}dt$ car $\sqrt{1+t^4}\leqslant\sqrt{2}\,t^2$ pour $t\in[1/x;+\infty[\subset[1;+\infty[$, d'où $\sqrt{2}\int_{1/x}^{+\infty}h(x,t)dt\geqslant\left[-t\frac{e^{-xt}}{x}\right]_{1/x}^{+\infty}+\int_{1/x}^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{x}dt=\frac{1}{ex^2}+\left[-\frac{e^{-xt}}{x^2}\right]_{1/x}^{+\infty}=\frac{2}{ex^2}$ avec la même intégration par parties qu'à la question **c.**. Comme $\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{ex^2}=+\infty$, par encadrement, on obtient finalement $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

Pour aller plus loin, avec le changement de variable $t=\varphi(u)=\frac{u}{x}$ avec la fonction φ qui est de classe C^1, bijective et strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, on a $f(x)=\frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{u^3e^{-u}}{\sqrt{x^4+u^4}}du$ donc la relation $x^2f(x)=\int_0^{+\infty}a(x,u)du$ en posant $a(x,u)=\frac{u^3e^{-u}}{\sqrt{x^4+u^4}}$.

(H_1) Pour tout $u\in\mathbb{R}_+$, on a $\lim_{x\to0^+}a(x,u)=ue^{-u}=b(u)$.

(H_2) Pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, $u\mapsto a(x,u)$ et $u\mapsto b(u)$ sont continues sur $\mathbb{R}_+$.

(H_3) Pour $x\in\mathbb{R}_+^*$ et $u\in\mathbb{R}_+$, $|a(x,u)|=\left|\frac{u^3e^{-u}}{\sqrt{x^4+u^4}}\right|\leqslant ue^{-u}=b(u)$ avec b continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ comme avant.

Ainsi, par le théorème de convergence dominée à paramètre continu, $\lim_{x\to0^+}x^2f(x)=\int_0^{+\infty}b(u)du=\Gamma(2)=1$. Par conséquent, $f(x)\underset{0}{\sim}\frac{1}{x^2}$ donc $\lim_{x\to0^+}f(x)=+\infty$.

98 **a.** Pour $x\in\mathbb{R}$, soit $g_x:]0;1[\to\mathbb{R}$ définie par $g_x(t)=|\ln(t)|^x=e^{x\ln(|\ln(t)|)}$. La fonction g_x est continue sur $]0;1[$ par opérations. Comme $\ln(t)\underset{1^-}{\sim}t-1$, on a $g_x(t)\underset{1^-}{\sim}(1-t)^x=\frac{1}{(1-t)^{-x}}$. Traitons plusieurs cas :

- Si $x<0$, $\lim_{t\to0^+}|\ln(t)|=+\infty$ donc $\lim_{t\to0^+}g_x(t)=0$ et g_x se prolonge par continuité en 0 avec $g_x(0)=0$.
- Si $x\geqslant 0$, par croissances comparées, $g_x(t)\underset{0}{=}o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ donc g_x est intégrable en 0.
- Comme $g_x(t)\underset{1^-}{\sim}(1-t)^x=\frac{1}{(1-t)^{-x}}$, par comparaison aux intégrales deRIEMANN, g_x est intégrable en 1 si et seulement si $-x<1\iff x>-1$.

Ainsi, g_x est intégrable sur $]0;1[$ si et seulement si $x>-1$. Comme la fonction g_x est positive sur $]0;1[$, g_x est intégrable sur $]0;1[$ si et seulement si $\int_0^1 g_x$ converge. Par conséquent, $D=]-1;+\infty[$.

b. Posons $g:]1;+\infty[\times]0;1[\to\mathbb{R}$ définie par $g(x,t)=|\ln(t)|^x=e^{x\ln(|\ln(t)|)}$ de sorte que $f(x)=\int_0^1 g(x,t)dt$.

(H_1) Pour $t \in]0;1[$, $x \mapsto g(x,t)$ est de classe C^∞ sur D et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t) = \big(\ln(|\ln(t)|)\big)^k g(x,t)$.

(H_2) Pour $x \in D$, $g_x : t \mapsto g(x,t)$ est continue et intégrable sur $]0;1[$ d'après **a.**.

(H_3) Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in D$, $t \mapsto \dfrac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t)$ est continue sur $]0;1[$.

(H_4) Pour $[a;b] \subset D$, $t \in]0;1[$ et $x \in [a;b]$, on a $\left|\dfrac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t)\right| = \big|\ln(|\ln(t)|)\big|^k e^{x\ln(|\ln(t)|)}$. Comme on a $\ln(|\ln(t)|) \leqslant 0 \iff t > \dfrac{1}{e}$, on a $\left|\dfrac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant \varphi_{a,b}(t)$ en définissant $\varphi_{k,a,b} :]0;1[\to \mathbb{R}_+$ par $\varphi_{k,a,b}(t) = \big|\ln(|\ln(t)|)\big|^k e^{b\ln(|\ln(t)|)}$ si $t \leqslant \dfrac{1}{e}$ et $\varphi_{k,a,b}(t) = \big|\ln(|\ln(t)|)\big|^k e^{a\ln(|\ln(t)|)}$ si $t \geqslant \dfrac{1}{e}$. La fonction $\varphi_{k,a,b}$ est continue par morceaux sur $]0;1[$ et elle y est intégrable car on a comme à la question **a.** $\varphi_{k,a,b}(t) \underset{0}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$ par croissances comparées et $\varphi_{k,a,b}(t) \underset{1^-}{\sim} \dfrac{\big|\ln(|\ln(t)|)\big|^k}{(1-t)^{-b}}$ d'où $\varphi_{k,a,b}(t) \underset{1^-}{\sim} \dfrac{|\ln(1-t)|^k}{(1-t)^{-b}} \underset{1^-}{=} o\left(\dfrac{1}{(1-t)^{\frac{1-b}{2}}}\right)$ par croissances comparées et $\dfrac{1-b}{2} < 1$.

D'après le théorème de dérivation sous le signe somme, f est de classe C^∞ sur D et, pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$ et tout réel $x \in D$, on a $f^{(k)}(x) = \displaystyle\int_0^1 \big(\ln(|\ln(t)|)\big)^k e^{x\ln(|\ln(t)|)} dt$.

c. Pour $x > -1$, dans l'expression de $f(x)$, on pose $t = e^{-u} = \varphi(u)$ avec φ de classe C^1, strictement décroissante et bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $]0;1[$ et, par changement de variable, $f(x) = \displaystyle\int_{+\infty}^0 e^{x\ln(u)}(-e^{-u})du$ donc $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} u^x e^{-u} du = \Gamma(x+1)$. Ainsi, comme on sait que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = (n+1-1)! = n!$ (puisque par intégration par parties, on montre que $\forall x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$), on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) = n!$.

99 **a.** Pour $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, la fonction $f_{n,p} : x \mapsto x^p \ln^n(x)$ est continue sur $]0;1]$ et $f_{n,0}(x) = (\ln(x))^p \underset{0}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f_{n,p}(x) = 0$ si $n \geqslant 1$ par croissances comparées donc, par comparaison aux intégrales de Riemann, $f_{n,p}$ est intégrable sur $]0;1]$ donc $I_{n,p}$ est bien définie.

b. Pour $n \geqslant 1$, on effectue une intégration par parties en posant $u : x \mapsto (\ln x)^n$ et $v : x \mapsto \dfrac{x^{p+1}}{p+1}$, u et v sont bien de classe C^1 sur $]0;1]$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} u(x)v(x) = 0$ et $u(1)v(1) = 0$. Ainsi, on obtient la formule de récurrence $I_{n,p} = \displaystyle\int_0^1 f_{n,p}(x)dx = -\frac{n}{p+1}\int_0^1 (\ln x)^{p-1}x^n dx = -\frac{n}{p+1} I_{n-1,p}$.

c. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^x} = x^{-x} = e^{-x\ln(x)}$ est continue sur $]0;1]$, on a $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$ car $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$ par croissances comparées donc f se prolonge par continuité en posant $f(0) = 1$. Ainsi, $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ existe car f se prolonge en une fonction continue sur le segment $[0;1]$.

d. Si $p = 0$, alors $I_{n,0} = \displaystyle\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$. Alors, pour $p \in \mathbb{N}$, en reportant successivement, on a $I_{n,p} = -\dfrac{nI_{n-1,p}}{p+1} = \dfrac{n}{p+1} \times \dfrac{(n-1)I_{n-2,p}}{p+1} = \cdots = \dfrac{(-1)^n n!}{(p+1)^n} I_{n,0} = \dfrac{(-1)^n n!}{(p+1)^{n+1}}$.

Comme $x^{-x} = e^{-x\ln(x)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n (\ln x)^n}{n!}$ en développant l'exponentielle en série entière, on peut écrire $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f_{n,n}(x)dx$.

(H_1) La série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{(-1)^n f_{n,n}}{n!}$ converge simplement vers la fonction f sur $]0;1]$.

(H_2) Toutes les fonctions $f_{n,n}$ sont continues et intégrables sur $]0;1]$ (on vient de le voir) et la fonction f est continue sur $]0;1]$.

(H_3) Pour $n\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 \left|\frac{f_{n,n}}{n!}\right| = \frac{|I_{n,n}|}{n!} = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$ et la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1 \left|\frac{f_{n,n}}{n!}\right|$ converge par comparaison aux séries de RIEMANN car $u_n = \dfrac{1}{(n+1)^{n+1}} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ dès que $n\geqslant 1$.

D'après le théorème d'intégration terme à terme, f est intégrable sur $]0;1]$ (on le savait déjà) et il vient $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x^{-x}dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n I_{n,n}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^n}$ après changement d'indice.

100 **a.** Pour $x\in\mathbb{R}$, la fonction $h_x : t\mapsto e^{-t}\dfrac{\sin(xt)}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, prolongeable par continuité en 0 en posant $h(0)=x$ car $\sin(xt) \underset{0}{=} xt+o(t)$ donc $h_x(t) \underset{0}{=} \dfrac{(1+o(1))(xt+o(t))}{t} \underset{0}{=} x+o(1)$. De plus, $h_x(t) \underset{+\infty}{=} o(e^{-t})$ donc h_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ par comparaison. Ainsi la fonction φ est définie sur $\mathbb{R}$.

b. Soit $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ définie par $f(x,t)=e^{-t}\dfrac{\sin(xt)}{t}$ de sorte que $\varphi(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,t)dt$.

(H_1) pour $t>0$, $x\mapsto f(x,t)$ est de classe C^0 sur $\mathbb{R}$.

(H_2) pour $x\in\mathbb{R}$, $h_x : t\mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

(H_3) Soit $a>0$, $\forall (x,t)\in[-a;a]\times\mathbb{R}_+^*$, $|f(x,t)| \leqslant \dfrac{e^{-t}|x|t}{t} = |x|e^{-t} \leqslant ae^{-t} = \varphi_a(t)$ car $\sin$ est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ et φ_a est continue et clairement intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ainsi, φ est de classe C^0 sur $\mathbb{R}$.

Utilisons maintenant le théorème de dérivation sous le signe somme :

(H_1) pour $t>0$, $x\mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

(H_2) pour $x\in\mathbb{R}$, $h_x : t\mapsto f(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (on vient de le voir) et la fonction $t\mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)=\cos(xt)e^{-t}$ est continue $\mathbb{R}_+^*$.

(H_3) $\forall (x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant e^{-t}=\psi(t)$ et ψ est continue et clairement intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ainsi φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

c. Avec LEIBNIZ, $\forall x\in\mathbb{R}$, $\varphi'(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos(xt)e^{-t}dt=\int_0^{+\infty}\mathrm{Re}\left(e^{ixt-t}\right)dt=\mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty}e^{ixt-t}dt\right)$ donc on a $\varphi'(x)=\mathrm{Re}\left(\left[\dfrac{e^{(ix-1)t}}{ix-1}\right]_0^{+\infty}\right)=\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{1-ix}\right)=\mathrm{Re}\left(\dfrac{1+ix}{(1-ix)(1+ix)}\right)=\dfrac{1}{1+x^2}$. Comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, en intégrant, $\forall x\in\mathbb{R}$, $\varphi'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ implique l'existence de $C\in\mathbb{R}$ tel que $\forall x\in\mathbb{R}$, $\varphi(x)=C+\mathrm{Arctan}(x)$. Or φ est clairement impaire et $\varphi(0)=0$ donc $C=0$. Ainsi, $\forall x\in\mathbb{R}$, $g(x)=\mathrm{Arctan}(x)$.

101 Soit $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ définie par $f(t)=\dfrac{\cos(t)}{1+e^t}$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $f(t)\underset{+\infty}{=}O\left(e^{-t}\right)$ donc f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par comparaison car $t\mapsto e^{-t}$ l'est ce qui montre que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos(t)}{1+e^t}dt$ converge.

Si on prend $t>0$, $0<e^{-t}<1$ donc $\dfrac{1}{1+e^t}=e^{-t}\dfrac{1}{1+e^{-t}}=e^{-t}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(e^{-t})^n$ (série géométrique) ce qui donne $f(t)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cos(t)e^{-(n+1)t}$. Posons $f_n(t)=(-1)^n\cos(t)e^{-(n+1)t}$ pour $n\in\mathbb{N}$, alors il vient $\displaystyle\int_0^{+\infty}f_n(t)dt=\mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty}(-1)^n e^{(i-n-1)t}dt\right)=\mathrm{Re}\left[\frac{(-1)^n e^{(i-n-1)t}}{i-n-1}\right]_0^{+\infty}=\frac{(-1)^n(n+1)}{1+(n+1)^2}$. On n'a pas la convergence absolue de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n(n+1)}{1+(n+1)^2}$, on ne peut pas utiliser le théorème d'intégration terme à terme.

Méthode 1 : Si $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}k}{1+k^2}$, alors $\left| \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{1+e^t} dt - S_n \right| = \left| \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{1+e^t} dt - \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{+\infty} f_k(t) dt \right|$. Par linéarité de l'intégrale, $\left| \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{1+e^t} dt - S_n \right| = \left| \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{1+e^t} dt - \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f_k(t) dt \right| = \left| \int_0^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} f_k(t) dt \right|$ (somme finie). Par inégalité triangulaire, $\left| \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{1+e^t} dt - S_n \right| \leqslant \int_0^{+\infty} |\cos(t)| \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k e^{-kt} \right| dt$ puis, comme $(e^{-kt})_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0 (on voit l'intégrale sur $\mathbb{R}_+^*$), par le critère spécial des séries alternées, on a $\left| \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{1+e^t} dt - S_n \right| \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-(n+1)t} dt = \frac{1}{n+1} \to 0$. Ainsi, la suite numérique $(S_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{1+e^t} dt$, qui s'écrit aussi $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{1+e^t} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}n}{1+n^2}$.

Méthode 2 : soit $S_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} f_k(t)$:

- (H_1) Ce qui précède montre que la suite de fonctions $(S_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers f.
- (H_2) Les fonctions f_k, donc aussi les fonctions S_n par linéarité, sont intégrables sur $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R}_+^*$ car $f_k(t) \underset{+\infty}{=} O(e^{-t})$ comme avant et f est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (on l'a déjà vu).
- (H_3) Enfin, $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|S_n(t)| = \left| \sum_{k=0}^{n} f_k(t) \right| = |\cos(t)e^{-t}| \left| \sum_{k=0}^{n} (-e^{-t})^k \right| \leqslant e^{-t} \times \frac{1-(-e^{-t})^{n+1}}{1+e^{-t}}$ donc $|S_n(t)| \leqslant \frac{2e^{-t}}{1+e^{-t}} \leqslant \varphi(t) = 2e^{-t}$ et φ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

On conclut avec le théorème de convergence dominée que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} S_n(t) dt = \int_0^{+\infty} f(t) dt$. Comme, par linéarité de l'intégrale, $\int_0^{+\infty} S_n(t) dt = \sum_{k=0}^{n} \int_0^{+\infty} f_k(t) dt = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k(k+1)}{1+(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}k}{1+k^2}$, on a bien la convergence de $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}n}{1+n^2}$ et à nouveau la relation $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{1+e^t} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}n}{1+n^2}$.

ORAUX 2024 THÈME 7
ESPACES PRÉHILBERTIENS RÉELS ET ESPACES EUCLIDIENS

102

103

104 **a.** Soit $(x, y) \in E^2$ et X, Y les vecteurs colonnes associés des coordonnées de x et y dans la base $\mathcal{B}_0$. Comme $\mathcal{B}_0$ est une base orthonormale, on a $\big(p(x)|y\big) = (AX)^T Y = X^T A^T Y = X^T (A^T Y) = \big(x|q(y)\big)$.

b. Par définition, $\mathrm{Tr}\ (q \circ p)$ est la trace de la matrice de $q \circ p$ dans n'importe quelle base, choisissons la base $\mathcal{B}$. Comme $\mathcal{B}$ est une base orthonormée, $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q \circ p) = \big((v_i|q \circ p(v_j))\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ ce qui montre que $\mathrm{Tr}\ (q \circ p) = \mathrm{Tr}\ (B) = \sum\limits_{k=1}^{n} (v_k|q \circ p(v_k)) = \sum\limits_{k=1}^{n} ||p(v_k)||^2$ avec la question **a.** avec $x = v_k$ et $y = p(v_k)$.

c. Si p est un projecteur orthogonal, $\mathrm{Im}\,(p)$ et $\mathrm{Ker}(p)$ sont supplémentaires orthogonaux dans E donc il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (v_1, \cdots, v_r, v_{r+1}, \cdots, v_n)$ de E telle que $(v_1, \cdots, v_r)$ (resp. $(v_{r+1}, \cdots, v_n)$) soit une base orthonormée de $\mathrm{Im}\,(p)$ (resp. $\mathrm{Ker}(p)$). Si on applique **b.** avec $\mathcal{B}$, on a $\mathrm{Tr}\ (q \circ p) = \sum\limits_{k=1}^{n} ||p(v_k)||^2 = r$ car $\forall k \in [\![1; r]\!],\ p(v_k) = v_k$ car $\mathrm{Im}\,(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$ et $\forall k \in [\![r+1; n]\!],\ p(v_k) = 0_E$. Or, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{Tr}\ (p) = \mathrm{rang}\,(p) = r$ et on a bien $\mathrm{Tr}\ (q \circ p) = \mathrm{Tr}\ (p)$.

d. Dans le cas général, on prend une base orthonormée $(v_1, \cdots, v_r)$ de $\mathrm{Im}\,(p)$ qu'on complète en une base orthonormale $(v_1, \cdots, v_n)$ de E (c'est-à-dire que $(v_{r++1}, \cdots, v_n)$ est une base orthonormale de $(\mathrm{Im}\,(f))^{\perp}$). D'après **b.**, $\mathrm{Tr}\ (q \circ p) = \sum\limits_{k=1}^{n} ||p(v_k)||^2 = r + \sum\limits_{k=r+1}^{n} ||p(v_k)||^2$ car, comme avant, $\forall k \in [\![1; r]\!],\ p(v_k) = v_k$. Comme $\sum\limits_{k=r+1}^{n} ||p(v_k)||^2 \geqslant 0$ et qu'on a encore $\mathrm{Tr}\ (p) = r$, on a bien $\mathrm{Tr}\ (q \circ p) = r + \sum\limits_{k=r+1}^{n} ||p(v_k)||^2 \geqslant r = \mathrm{Tr}\ (p)$.

e. Avec une base orthonormée $\mathcal{B}$ choisie comme dans **d.**, comme $\mathrm{Tr}\ (q \circ p) = r + \sum\limits_{k=r+1}^{n} ||p(v_k)||^2$, on a l'équivalence $\mathrm{Tr}\ (q \circ p) = \mathrm{Tr}\ (p) \iff \sum\limits_{k=r+1}^{n} ||p(v_k)||^2 = 0 \iff (\forall k \in [\![r+1; n]\!],\ p(v_k) = 0_E)$. Cette condition revient à $(\mathrm{Im}\,(f))^{\perp}\mathrm{Vect}(v_{r+1}, \cdots, v_n) \subset \mathrm{Ker}(p)$ ou encore, par égalité des dimensions car $(\mathrm{Im}\,(f))^{\perp}$ et $\mathrm{Ker}(p)$ sont des supplémentaires de $\mathrm{Im}\,(p)$, à $(\mathrm{Im}\,(f))^{\perp} = \mathrm{Ker}(p)$.

Ainsi, on a bien l'équivalence $\mathrm{Tr}\ (q \circ p) = \mathrm{Tr}\ (p) \iff p$ est orthogonal.

105

106 **a.** Pour $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$, la somme $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1)$ est finie puisqu'en notant $d = \mathrm{Max}(\deg(P), \deg(Q))$, $\forall k > d,\ P^{(k)}(1) = Q^{(k)}(1) = 0$. Ceci assure l'existence de $< P, Q >$. Soit $(P, Q, R) \in (\mathbb{R}[X])^3$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$:

<u>Symétrie</u> : $< P, Q >= \sum\limits_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} Q^{(k)}(1)P^{(k)}(1) =< Q, P >$.

<u>Bilinéarité</u> : $< \lambda P + \mu Q, R >= \sum\limits_{k=0}^{+\infty} (\lambda P + \mu Q)^{(k)}(1)R^{(k)}(1) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} (\lambda P^{(k)}(1) + \mu Q^{(k)}(1))R^{(k)}(1)$ par linéarité de la

dérivation, d'où $< \lambda P + \mu Q, R >= \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(1)R^{(k)}(1) + \mu \sum_{k=0}^{+\infty} Q^{(k)}(1)R^{(k)}(1) = \lambda < P, R > +\mu < Q, R >$ donc $< .,. >$ est linéaire en la première variable donc, par symétrie, aussi en la seconde.

Aspect défini positif : $< P, P >= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(P^{(k)}(1)\right)^2 \geqslant 0$ et, si $< P, P >= 0$, comme la somme d'une somme de quantités positives n'est nulle que s'ils sont tous nuls, on a $\forall k \in \mathbb{N},\ P^{(k)}(1) = 0$ donc, avec la formule de TAYLOR, $P = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(1)}{k!}(X-1)^k = 0$.

Par conséquent, $< .,. >$ définit bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

b. Si on pose $P_p = (X-1)^p$ pour $p \in \mathbb{N}$, on a $P_p^{(k)} = 0$ si $k > p$ et $P_p^{(k)} = \frac{p!}{(p-k)!}(X-1)^{p-k}$ si $k \in [\![0;p]\!]$.

Ainsi, si $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ et $p < q$, on a $< P_p, P_q >= \sum_{k=0}^{+\infty} P_p^{(k)}(1)P_q^{(k)}(1) = P_p^{(p)}(1)P_q^{(p)}(1) + P_p^{(q)}(1)P_q^{(q)}(1) = 0$ car $P_q^{(p)}(1) = P_p^{(q)}(1) = 0$. Ceci montre que la famille $(P_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}[X]$. En particulier, $\mathcal{B} = (P_0, \cdots, P_n)$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$ donc elle est libre car elle ne contient par le polynôme nul. De plus, comme son cardinal vaut $n+1 = \mathrm{dim}(\mathbb{R}_n[X])$, on en déduit que $\mathcal{B} = \left(1, X-1, \cdots, (X-1)^n\right)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

c. Comme $\mathbb{R}_n[X]$ est un sous-espace de dimension finie dans l'espace préhilbertien $\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $< .,. >$, ce sous-espace admet un supplémentaire d'après le cours.

($\subset$) Soit $P = \sum_{p=n+1}^{+\infty} a_p(X-1)^p$, comme $\forall k \in [\![0;n]\!],\ \forall p \geqslant n+1,\ < (X-1)^k, (X-1)^p >= 0$, on a donc $< P, (X-1)^k >= 0$ par linéarité du produit scalaire selon la première variable donc $P \in (\mathbb{R}_n[X])^\perp$. Ainsi, on a l'inclusion $\mathrm{Vect}\big((X-1)^k \mid k > n\big) \subset (\mathbb{R}_n[X])^\perp$.

($\supset$) Réciproquement, soit $P \in (\mathbb{R}_n[X])^\perp$ qu'on écrit $P = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p(X-1)^p$ avec $a_p = \frac{P^{(p)}(1)}{p!}$ d'après la formule de TAYLOR. Puisque $\forall k \in [\![0;n]\!],\ < (X-1)^k, P >= 0 = a_k||(X-1)^k||^2$, ceci impose $a_k = 0$ donc $P = \sum_{p=n+1}^{+\infty} a_p(X-1)^p$. Ainsi, on a l'inclusion $(\mathbb{R}_n[X])^\perp = \mathrm{Vect}\big((X-1)^k \mid k > n\big)$.

Par double inclusion, on a $\mathrm{Vect}\big((X-1)^k \mid k > n\big) = (\mathbb{R}_n[X])^\perp$.

Ainsi, si $P \in \mathbb{R}[X]$, on a $P = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(1)}{k!}(X-1)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(1)}{k!}(X-1)^k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(1)}{k!}(X-1)^k = Q+R$ d'après la formule de TAYLOR si on définit $Q = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(1)}{k!}(X-1)^k \in \mathbb{R}_n[X]$ et $R = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(1)}{k!}(X-1)^k \in (\mathbb{R}_n[X])^\perp$.

107 **a.** L'équation $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ admet une solution si et seulement si $b \in \mathrm{Im}\,(u)$ car $AX = B$ équivaut à $u(x) = b$. La matrice A est clairement de rang 2 car ses deux premières colonnes sont non colinéaires et la troisième est l'opposé de la deuxième. Ainsi, $\mathrm{Im}\,(u) = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ avec $v_1 = (-1,0,1)$ et $v_2 = (1,-1,0)$ car d'après le cours $\mathrm{Im}\,(u) = \mathrm{Vect}(u(e_1), u(e_2), u(e_3))$ où (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et b n'est pas combinaison linéaire de $u(e_1)$ et $u(e_2)$. L'équation $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ n'admet pas de solution.

b. Quand x parcourt $\mathbb{R}^3$, $u(x)$ parcourt $\mathrm{Im}\,(u)$ par définition donc $\underset{x\in\mathbb{R}^3}{\mathrm{Inf}}\ ||u(x) - b||$ est la distance de b à $\mathrm{Im}\,(u)$ et, d'après le cours, cette quantité est un minimum atteint quand $u(x)$ est le projeté orthogonal de b sur $\mathrm{Im}\,(u)$, noté $p(b)$. Ainsi, f admet un minimum sur $\mathbb{R}^3$ qui vaut $||p(b) - b||^2$.

c. D'après ce qui précède, ce minimum est atteint dès que $u(x) = p(b)$. Comme $p(b) \in \mathrm{Im}\,(u)$ par construction, il existe un vecteur $x_0 \in \mathbb{R}^3$ tel que $u(x_0) = p(b)$. Alors, pour $x \in \mathbb{R}^3$, on a l'équivalence $u(x) = p(b) \iff u(x) = u(x_0) \iff u(x - x_0) = 0 \iff x - x_0 \in \mathrm{Ker}(u)$. Comme $\mathrm{Ker}(u)$ est clairement la droite $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Vect}((0,1,1))$, il y a donc une infinité de vecteurs x dans $\mathbb{R}^3$ tels que $\underset{\mathbb{R}^3}{\mathrm{Min}}(f) = f(x)$.

d. <u>(i) $\Longrightarrow$ (ii)</u> Supposons que $u(x) - b \in (\mathrm{Im}\,(u))^\perp$, alors $\forall y \in \mathbb{R}^3,\ u(y) \in \mathrm{Im}\,(u)$ et $(u(x) - b|u(y)) = 0$, ce qui donne matriciellement $(AX-B)^T(AY) = ((AX-B)^T A)Y = 0$. Comme ceci est vrai pour tout $Y \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on a donc $(AX - B)^T A = 0$ donc $A^T(AX - B) = 0$ en transposant et $A^T AX = A^T B$.

<u>(ii) $\Longrightarrow$ (i)</u> Supposons $A^T AX = A^T B$, c'est-à-dire $(AX - B)^T A = 0$, alors pour $y \in \mathbb{R}^3$, $(AX - B)^T AY = 0$ ce qui se traduit par $(u(x) - b|u(y)) = 0$. Ceci étant vrai pour tout $y \in \mathbb{R}^3$, $u(x) - b \in (\mathrm{Im}\,(u))^\perp$.

Par double implication, pour $x \in \mathbb{R}^3$, on a donc $u(x) - b \in (\mathrm{Im}\,(u))^\perp \iff A^T AX = A^T B$.

e. On a vu en question **c.** que f admet son minimum absolu en $x \in \mathbb{R}^3$ si et seulement si $u(x) = p(b)$ où p est la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}\,(u)$. Par construction, $p(b) \in \mathrm{Im}\,(u)$ donc il existe α_1, α_2 deux réels tels que $p(b) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = (\alpha_2 - \alpha_1, -\alpha_2, \alpha_1)$ et $p(b) - b \in \mathrm{Im}\,(u)^\perp$ donc $(p(b) - b|v_1) = (p(b) - b|v_2) = 0$ ce qui montre que $\alpha_1 - \alpha_2 + 1 + \alpha_1 - 1 = \alpha_2 - \alpha_1 - 1 + 1 + \alpha_2 = 0$ d'où $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Par conséquent, $p(b) = 0$. f admet donc son minimum absolu en x si et seulement si $u(x) = 0$ donc si et seulement si $x \in \mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Vect}((0,1,1))$. Ce minimum vaut donc $\underset{\mathbb{R}^3}{\mathrm{Min}}(f) = f(0) = ||b||^2 = 3$.

108 On vérifie rapidement que l'application $(A, B) \mapsto \int_0^1 A(t)B(t)dt$ définit bien un produit scalaire sur E. Déjà AB est continue sur le segment $[0;1]$ donc l'intégrale est bien définie. La symétrie, la positivité et la bilinéarité sont claires. Soit $P \in E$ tel que $(P|P) = 0$, alors $\int_0^1 P(t)^2 dt = 0$ et la fonction $t \mapsto P(t)^2$ est positive et continue sur $[0;1]$ donc $\forall t \in [0;1],\ P(t)^2 = 0$ donc $P(t) = 0$ et P admet une infinité de racines donc $P = 0$. $(\,.\,|\,.\,)$ est donc bien un produit scalaire sur E.

a. Soit $P \in E$, comme $t \mapsto (x+t)^n P(t)$ est continue sur le segment $[0;1]$, $u(P)(x)$ est bien défini et, avec le binôme de Newton, $\forall x \in \mathbb{R},\ u(P)(x) = \int_0^1 \Big(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k t^{n-k}\Big)P(t)dt$ donc, par linéarité de l'intégrale, avec les mêmes arguments, $\forall x \in \mathbb{R},\ u(P)(x) = \sum_{k=0}^{n} \Big(\binom{n}{k} \int_0^1 t^{n-k}P(t)dt\Big)x^k$, d'où $u(P) \in E$. De plus, si $(P, Q) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $u(\lambda P+Q) = \int_0^1 (x+t)^n(\lambda P(t)+Q(t))dt = \lambda \int_0^1 (x+t)^n P(t)dt + \int_0^1 (x+t)^n Q(t)dt = \lambda u(P)+u(Q)$ par linéarité de l'intégrale donc u est linéaire : u est donc un endomorphisme de E.

b. Pour $(P, Q) \in E^2$, avec l'expression de **b.**, $(u(P)|Q) = \int_0^1 \Big(\sum_{k=0}^{n} \Big(\binom{n}{k} \int_0^1 u^{n-k}P(u)du\Big)t^k\Big)Q(t)dt$ donc, par linéarité de l'intégrale, on a $(u(P)|Q) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(X^{n-k}|P) \int_0^1 t^k Q(t)dt = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(X^{n-k}|P)(X^k|Q)$. En effectuant le changement d'indice $j = n - k$, on a $(u(P)|Q) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}(X^j|P)(X^{n-j}|Q) = (u(Q)|P)$ avec le calcul précédent car $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Ainsi, $(u(P)|Q) = (P|u(Q))$ par symétrie donc u est autoadjoint.

c. Comme u est un endomorphisme en dimension finie, u est bijectif si et seulement si u est injectif. Soit $P \in \mathrm{Ker}(u)$, on a donc $\forall x \in \mathbb{R},\ \int_0^1 (x+t)^n P(t)dt = 0$. Soit $x_0, \cdots, x_n$ des réels distincts, considérons la famille $\mathcal{B} = ((X+x_0)^n, \cdots, (X+x_n)^n)$. La famille $\mathcal{B}$ est de cardinal $n+1$, soit $M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice de $\mathcal{F}$ dans la base canonique inversée $\mathcal{B}_0 = (X^n, X^{n-1}, \cdots, X, 1)$, comme $(X+x_j)^n = \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x_j^i X^{n-i}$, on a $M = \left(\binom{n}{i} x_j^i\right)_{0 \leqslant i,j \leqslant n}$ qui est quasiment une matrice de VANDERMONDE. Plus précisément, en utilisant la multilinéarité du déterminant sur les $n+1$ lignes, on a $\det(M) = \left(\prod\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\right) \times \prod\limits_{0 \leqslant j < j' \leqslant n} (x_{j'} - x_j) \neq 0$ car on a choisi les $x_0, \cdots, x_n$ distincts. Ainsi, comme M est inversible, $\mathcal{B}$ est une base de E et il existe donc des scalaires $a_0, \cdots, a_n$ tel que $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k (X+x_k)^n$. Alors, $P^2 = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k (X+x_k)^n P$ donc, par linéarité de l'intégrale, $\int_0^1 \big(P(t)\big)^2 dt = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \int_0^1 (x_k+t)^n P(t) dt = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k u(P)(x_k) = 0$. Mais comme P^2 est continue et positive sur $[0;1]$, d'après le cours, $\forall t \in [0;1],\ P(t)^2 = 0$ donc $P(t) = 0$. Le polynôme P admet une infinité de racines donc $P = 0$. Comme $\text{Ker}(P) = \{0\}$, on a u injectif donc u bijectif.

109

110 D'après le théorème spectral, il existe une matrice orthogonale $P \in O(n)$ et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $S = PDP^T$. Ainsi, $S^2 = PD^2P^T$ donc, comme S^2 et D^2 sont semblables (et même orthosemblables), on a $\text{Tr}\,(S^2) = \text{Tr}\,(D^2)$. En notant $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres de S comptées avec leur ordre de multiplicité, ces valeurs propres se trouvent sur la diagonale de D donc $\text{Tr}\,(D^2) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k^2$.
Comme S est symétrique, $S^2 = S^TS$ et on a classiquement $\text{Tr}\,(S^2) = \text{Tr}\,(S^TS) = ||S||^2 = \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} s_{i,j}^2$ en notant $S = (s_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. On isole les termes diagonaux pour avoir $||S||^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} s_{k,k}^2 + 2 \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} s_{i,j}^2$ (car S est symétrique). Par hypothèse, les valeurs propres se trouvent sur la diagonale de S donc $\sum\limits_{k=1}^{n} s_{k,k}^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k^2$ et il ne reste dans $\text{Tr}\,(S^2) = \text{Tr}\,(D^2)$, après simplification, que $\sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} s_{i,j}^2$. Or une somme de termes positifs nest nulle que si tous ses termes sont nuls donc $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ i < j \Longrightarrow s_{i,j} = 0$ et S est bien diagonale.

111

112 **a.** ($\Longrightarrow$) si $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$, d'après le théorème spectral, comme A est symétrique réelle, il existe $P \in O(n)$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ avec $\lambda_k \in \text{Sp}(A)$ donc $\lambda_k \geqslant 0$ telles que $A = PDP^T$. En posant $\Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_n})$, on a $\Delta^2 = D$ donc, en posant $R = P\Delta P^T$, on a bien $R \in S_n(\mathbb{R})$ car $R^T = (P\Delta P^T)^T = P^T \Delta^T (P^T)^T = P\Delta P^T = R$ car Δ est symétrique. De plus, $R^2 = (P\Delta P^T)^= P\Delta^2 P^T$ car $P^TP = I_n$ et, comme $\Delta^2 = D$, on a $R^2 = PDP^T = A$.
($\Longleftarrow$) S'il existe $R \in S_n(\mathbb{R})$ tel que $A = R^2$, soit λ une valeur propre de A, donc $\lambda \in \mathbb{R}$ par le théorème spectral. Alors il existe $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = \lambda X$. Ainsi, $X^TAX = \lambda X^TX = \lambda ||X||^2$ mais aussi $X^TAX = X^TR^2X = X^TR^TRX = ||RX||^2$ avec le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donné par $(X|Y) = X^TY$. Par conséquent, $\lambda = \dfrac{|||RX||^2}{||X||^2} \geqslant 0$ donc $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$.
Par double implication, $(\exists R \in S_n(\mathbb{R}),\ R^2 = A) \Longleftrightarrow \text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+)$.

b. Supposons que $\text{Sp}(A) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_r\} \subset \mathbb{R}_+$ avec $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ distincts. On sait que $\mathbb{R}^n = \bigoplus\limits_{k=1}^{r} E_{\lambda_k}(A)$.

<u>Analyse</u> : soit $R \in S_n(\mathbb{R})$ telle que $A = R^2$, comme $AR = R^3 = RA$, A et R commutent donc les sous-espaces

propres de A sont stables par R.
Synthèse : .

c. D'après **a.**, comme A et B sont symétriques réelles à valeurs propres positives, il existe $(R,S) \in (S_n(\mathbb{R}))^2$ tel que $A = R^2$ et $B = S^2$. Ainsi, $AB = RRSS$ d'où $\text{Tr}\,(AB) = \text{Tr}\,(RRSS) = \text{Tr}\,(RSSR) = \text{Tr}\,(R^TS^TSR) = ||SR||^2 \geqslant 0$ avec le produit scalaire canonique sur les matrices donné par $(A|B) = \text{Tr}\,(A^TB)$.

113 **a.** Soit p la projection orthogonale sur le sous-espace $F \subset E$. Soit $(x,y) \in E^2$, on décompose ces deux vecteurs en $x = x_1 + x_2$ et $y = y_1 + y_2$ avec $(x_1, y_1) \in F^2$ et $(x_2, y_2) \in (F^\perp)^2$. Alors p est symétrique car on a $(p(x)|y) = (x_1|y_1 + y_2) = (x_1|y_1) + (x_1|y_2) = (x_1|y_1) = (x_1|y_1) + (x_2|y_1) = (x_1 + x_2|y_1) = (x|p(y))$.

b. p et q étant des projecteurs orthogonaux, ils sont symétriques d'après **a.** donc par, par composition, $p \circ q \circ p$ est symétrique. En effet, si $(x,y) \in E^2$, $(p \circ q \circ p(x)|y) = (q \circ p(x)|p(y)) = (p(x)|q \circ p(y)) = (x|p \circ q \circ p(y))$ car, successivement, p est symétrique, q est symétrique, p est symétrique.

c. Comme Im (q) et $\text{Ker}(p)$ sont des sous-espaces E, on sait que $(\text{Im}\,(p) + \text{Ker}(q))^\perp = (\text{Im}\,(p))^\perp \cap (\text{Ker}(q))^\perp$. Or p (même chose pour q) est un projecteur orthogonal donc $\text{Im}\,(p) = \text{Ker}(p - \text{id}_E) = E_1(p) \perp E_0(p) = \text{Ker}(p)$. On conclut par égalité des dimensions que $\big(\text{Im}\,(p)\big)^\perp = \text{Ker}(p)$. De même $(\text{Ker}(q))^\perp = \text{Im}\,(q)$.
Ainsi : $(\text{Im}\,(p) + \text{Ker}(q))^\perp = \text{Im}\,(q) \cap \text{Ker}(p)$.

d. D'après la question précédente, $E = \text{Im}\,(p) + \text{Ker}(q) + (\text{Im}\,(q) \cap \text{Ker}(p))$, ces sous-espaces ne sont pas forcément supplémentaires car on ne sait pas si $\text{Im}\,(p) \cap \text{Ker}(p) = \{0_E\}$. L'endomorphisme $u = p \circ q \circ p$ est symétrique donc diagonalisable d'après le théorème spectral. On va étudier $p \circ q$ sur chacun des trois sous-espaces précédents.

- Comme $\text{Im}\,(p)$ est stable par $u = p \circ (q \circ p)$, l'endomorphisme induit par u dans $\text{Im}\,(p)$ est aussi symétrique donc diagonalisable et il existe donc une base orthonormale $(e_1, \cdots, e_r)$ de $\text{Im}\,(p)$ formée de vecteurs propres de u (associés aux valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$). Or $\forall k \in [\![1;r]\!]$, $p(e_k) = e_k$ donc $p \circ q \circ p(e_k) = \lambda_k e_k$ devient $p \circ q(e_k) = \lambda_k e_k$ et e_k est aussi un vecteur propre de $p \circ q$.
- On complète la famille libre $(e_1, \cdots, e_r)$ de $\text{Im}\,(p) + \text{Ker}(q)$ en une base $(e_1, \cdots, e_r, e_{r+1}, \cdots, e_m)$ de $\text{Im}\,(p) + \text{Ker}(q)$ avec des vecteurs $e_{r+1}, \cdots, e_m$ de $\text{Ker}(q)$ (théorème de la base extraite). Or $\forall k \in [\![r+1;m]\!]$, $q(e_k) = 0_E$ donc $p \circ q(e_k) = 0_E$ et e_k est aussi un vecteur propre de $p \circ q$.
- Enfin, on complète la famille libre $(e_1, \cdots, e_m)$ de E en une base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_m, e_{m+1}, \cdots, e_n)$ de E en la complétant avec une base de $(\text{Im}\,(p) + \text{Ker}(q))^\perp = \text{Ker}(p) \cap \text{Im}\,(q)$. Or $\forall k \in [\![m+1;n]\!]$, on a $p \circ q(e_k) = p(q(e_k)) = p(e_k) = 0_E$ donc e_k est à nouveau un vecteur propre de $p \circ q$.

Au final on obtient une base $\mathcal{B}$ de vecteurs propres de $p \circ q$ donc $p \circ q$ est diagonalisable.
En général, si v est un projecteur orthogonal sur F de E, on a $\forall x \in E,\ 0 \leqslant (u(x)|x) \leqslant ||x||^2$. En effet, avec $x \in E$ qu'on écrit $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in F^\perp$, on a $(u(x)|x) = (y|y+z) = ||y||^2 + (y|z) = ||y||^2 = ||x||^2 - ||z||^2$ avec PYTHAGORE. Ainsi $0 \leqslant ||y||^2 = (u(x)|x) = ||x||^2 - ||z||^2 \leqslant ||x||^2$ donc $0 \leqslant (u(x)|x) \leqslant ||x||^2$.
Traitons maintenant deux cas :

- Soit $k \in [\![r+1;n]\!]$, alors $p \circ q(e_k) = 0_E$ donc e_k est associé à la valeur propre 0.
- Soit $k \in [\![1;r]\!]$, $p \circ q(e_k) = \lambda_k e_k$ donc $(p \circ q(e_k)|e_k) = \lambda_k ||e_k||^2$. Mais, avec l'inégalité précédente, comme

p est symétrique et que $p(e_k) = e_k$, on a $0 \leqslant (p \circ q(e_k)|e_k) = (q(e_k)|p(e_k)) = (q(e_k)|e_k) \leqslant ||e_k||^2$. Comme $||e_k||^2 > 0$ car $e_k \neq 0_E$, on en déduit que $0 \leqslant \lambda_k \leqslant 1$.

Par conséquent, toutes les valeurs propres de $p \circ q$ sont dans l'intervalle $[0;1]$.

114 **a.** φ_0 est clairement de classe C^∞ par composition puisque l'exponentielle l'est.

Initialisation : $\varphi_0(x) = (-1)^0 H_0(x)\varphi_0(x)$ avec $H_0 = 1$. $\varphi_0'(x) = -2xe^{-x^2} = (-1)^1 H_1(x)\varphi_0(x)$ avec $H_1 = 2X$.

Hérédité : pour $n \in \mathbb{N}^*$, supposons l'existence de $H_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi_0^{(n)}(x) = (-1)^n H_n(x)\varphi_0(x)$. Alors, en dérivant, $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi^{(n+1)}(x) = (-1)^n H_n'(x)\varphi_0(x) + (-1)^{n+1} 2xH_n(x)\varphi_0(x) = (-1)^{n+1} H_{n+1}(x)\varphi_0(x)$ si on pose le polynôme $H_{n+1} = 2XH_n - H_n' \in \mathbb{R}[X]$.

On conclut par principe de récurrence qu'il existe bien une suite de polynômes réels $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \varphi_0^{(n)}(x) = (-1)^n H_n(x)\varphi_0(x)$. Les polynômes H_n sont les polynômes de HERMITE dans leur forme dite "physique", ils apparaissent par exemple dans le traitement du signal.

b. Initialisation : $\mathrm{deg}(H_0) = 0$ et $\mathrm{dom}(H_0) = 1$, $\mathrm{deg}(H_1) = 1$ et $\mathrm{dom}(H_1) = 2$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{deg}(H_n) = n$ et $\mathrm{dom}(H_n) = 2^n$. Comme $H_{n+1} = 2XH_n - H_n'$, que $\mathrm{deg}(2XH_n) = n+1$ et $\mathrm{deg}(H_n') = n-1$, on a $\mathrm{deg}(H_{n+1}) = \mathrm{Max}(\mathrm{deg}(2XH_n), \mathrm{deg}(H_n')) = n+1$ et le coefficient dominant de H_{n+1} ne provient que de $2XH_n$ donc $\mathrm{dom}(H_{n+1}) = 2\mathrm{dom}(H_n) = 2^{n+1}$.

On conclut par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{deg}(H_n) = n$ et $\mathrm{dom}(H_n) = 2^n$.

c. L'application $(\,.\,|\,.\,) : (\mathbb{R}[X])^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\forall (P,Q) \in (\mathbb{R}[X])^2,\ (P|Q) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x^2}dx$ est bien définie car la fonction $f : x \mapsto P(x)Q(x)e^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ pour $(P,Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$ et que, par croissances comparées, on a $f(x) \underset{\pm\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{x^2}\Big)$. En effet, c'est clair si $PQ = 0$. De plus, si $PQ \neq 0$, en notant $r = \mathrm{deg}(PQ)$, on a $P(x)Q(x) \underset{\pm\infty}{=} O(x^r)$ et on sait que $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} x^{r+2}e^{-x^2} = 0$. Cette application $(\,.\,|\,.\,)$ est clairement bilinéaire (par linéarité de l'intégrale), symétrique (par symétrie du produit dans $\mathbb{R}$) et positive (par positivité de l'intégrale) car $x \mapsto P^2(x)e^{-x^2}$ est positive sur $\mathbb{R}$ pour $P \in \mathbb{R}[X]$. De plus, si $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $(P|P) = 0$, la fonction $g : x \mapsto P^2(x)e^{-x^2}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$, ainsi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = 0$ implique $g = 0$ sur $\mathbb{R}$ ce qui prouve que tous les réels x sont racines de P car $e^{-x^2} > 0$. Alors, $P = 0$.

Ainsi, $(\,.\,|\,.\,)$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive, donc un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

d. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{R}[X]$, $(P|H_n) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)H_n(x)e^{-x^2}dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)\varphi_0^{(n)}(x)dx$. On pose $u = P$ et $v = \varphi_0^{(n-1)}$ qui sont C^1 sur $\mathbb{R}$ et vérifient $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} u(x)v(x) = 0$ par croissances comparées. Par intégration par parties, $(P|H_n) = 0 - (-1)^n \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P'(x)\varphi_0^{(n-1)}(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} P'(x)H_{n-1}(x)e^{-x^2}dx = (P'|H_{n-1})$.

e. Soit $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ avec $i < j$, on a donc $(H_i|H_j) = (H_i'|H_{j-1})$ grâce à **d.** car $j \geqslant 1$. On recommence et, par une simple récurrence finie, on obtient $\forall k \in [\![0;i+1]\!],\ (H_i|H_j) = (H_i^{(k)}|H_{j-k})$ donc, en particulier pour $k = i+1$, on a $(H_i|H_j) = (H_i^{(i+1)}|H_{j-i-1})$. Or $\mathrm{deg}(H_i) = i$ d'après **b.** donc $H_i^{(i+1)} = 0$ et on a $(H_i|H_j) = 0$, ce qui assure bien que la famille $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale.

f. Comme avant, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $||H_n||^2 = (H_n|H_n) = (H_n'|H_{n-1})$. On continue pour avoir, par récurrence finie, $||H_n||^2 = (H_n^{(n)}|H_0) = 2^n n!(1|1) = 2^n n!\Big(2\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx\Big)$ par parité de la fonction φ_0, on a $||H_n||^2 = 2^n n!\sqrt{\pi}$ (classique intégrale de GAUSS) d'après **a.** et **b.**. Comme $||H_0||^2 = (1|1) = \sqrt{\pi} = 2^0.0!\sqrt{\pi}$, on a la relation $\forall n \in \mathbb{N},\ ||H_n||^2 = 2^n n!\sqrt{\pi}$.

g. .

115 **a.** D'abord un cas très simple, si $\alpha = 0$, $M_{0,m} = I_m$ donc $\mathrm{Sp}(M_{0,m}) = \{1\}$.

Dans le cas général, si $\alpha \neq 0$, on a $M_{\alpha,m} - (1-\alpha)I_m = \alpha J_m$ où $J_m = (1)_{1 \leqslant i,j \leqslant m}$. Comme J_m est de rang 1, par la formule du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(M_{\alpha,m} - (1-\alpha)I_m)) = \dim(E_{1-\alpha}(M_{\alpha,m})) = m-1$ donc $1-\alpha$ est valeur propre de $M_{\alpha,m}$ d'ordre au moins égal à $m-1$. Comme $M_{\alpha,m}$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ d'après le théorème spectral car symétrique réelle, sa dernière valeur propre réelle λ vérifie $\mathrm{Tr}\,(M_{\alpha,m}) = (m-1)(1-\alpha) + \lambda = m$ donc $\lambda = (m-1)\alpha + 1 \neq 1 - \alpha$ car $\alpha \neq 0$ d'où $\mathrm{Sp}(M_{\alpha,m}) = \{1-\alpha, (m-1)\alpha + 1\}$.

b. D'après l'énoncé, la matrice de Gram $G = \big((u_i|u_j)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n+1}$ vérifie $G = M_{\alpha,n+1}$. En notant $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{F} = (u_1, \cdots, u_{n+1})$ et $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \big((u_i|e_j)\big)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in \mathcal{M}_{n,n+1}(\mathbb{R})$, comme $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ (sous-entendu muni de son produit scalaire canonique), on a $M^T M = G$ car $\sum\limits_{j=1}^{n} (u_i|e_j)(u_{i'}|e_j) = (u_i|u_{i'})$. Comme $\mathrm{rang}\,(M) \leqslant n$ car M n'a que n lignes, et que $\mathrm{rang}\,(M^T M) \leqslant \mathrm{rang}\,(M)$, on en déduit que $\mathrm{rang}\,(G) \leqslant n$ donc que G n'est pas inversible car $G \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$. Comme 0 est valeur propre de $G = M_{\alpha,n+1}$ car G n'est pas inversible, on doit avoir, d'après **a.**, $1 - \alpha = 0$ ou $((n+1)-1)\alpha + 1 = 0$. Or $\alpha \neq 1$ par hypothèse donc $\alpha = -\dfrac{1}{n} = \alpha_n$.

c.

116

117 **a.** ($\Longrightarrow$) Si A est positive, soit λ une valeur propre réelle de A, alors il existe $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = \lambda X$. Ainsi, $X^T A X = \lambda X^T X = \lambda ||X||^2$ donc $\lambda = \dfrac{X^T A X}{||X||^2} \geqslant 0$ car A est positive. D'après le théorème spectral, il existe $P \in O(n)$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ diagonale telles que $A = PDP^T$ où $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A comptées avec leur ordre de multiplicité. En posant $\Delta = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_n})$, on a $\Delta^2 = D$ donc $A = P\Delta^2 P^T = (P\Delta)(\Delta P^T) = B^T B$ si $B = \Delta P^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

($\Longleftarrow$) S'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^T B$, alors $X^T A X = X^T B^T B X = (BX)^T (BX) = ||BX||^2 \geqslant 0$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc A est symétrique positive.

Par double implication, on a montré que A positive $\Longleftrightarrow \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ A = B^T B$.

b. ($\Longrightarrow$) Si A est définie positive, soit λ une valeur propre réelle de A, alors il existe $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = \lambda X$. Ainsi, $X^T A X = \lambda X^T X = \lambda ||X||^2$ donc $\lambda = \dfrac{X^T A X}{||X||^2} > 0$ car A est définie positive. D'après le théorème spectral, il existe $P \in O(n)$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ diagonale telles que $A = PDP^T$ où $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sont les valeurs propres strictement positives de A comptées avec leur ordre de multiplicité. En posant $\Delta = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_n})$, on a $\Delta^2 = D$ donc $A = P\Delta^2 P^T = (P\Delta)(\Delta P^T) = B^T B$ si $B = \Delta P^T \in GL_n(\mathbb{R})$ car P et Δ sont des matrices inversibles.

($\Longleftarrow$) S'il existe $B \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^T B$, alors $X^T A X = X^T B^T B X = (BX)^T (BX) = ||BX||^2 > 0$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ car $BX \neq 0$ puisque $X \neq 0$ et B inversible donc A est symétrique définie positive.

Par double implication, on a montré que A définie positive $\Longleftrightarrow \exists B \in GL_n(\mathbb{R}),\ A = B^T B$.

c. Si A est définie positive, avec une matrice $B \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^T B$ d'après la question **b.**, on a $\forall X \in \mathbb{R}^n,\ N(X) = \sqrt{X^T B^T B X} = \sqrt{||BX||^2} = ||BX||$.

Séparation : Soit $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $N(X) = 0$, alors $||BX|| = 0$ donc $BX = 0$ car $||\,.\,||$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$ et on en déduit que $X = 0$ car B est inversible.

Homogénéité : Soit $X \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $N(\lambda X) = ||B \times (\lambda X)|| = ||\lambda BX|| = |\lambda|\,||BX|| = |\lambda|\,N(X)$ car $||\,.\,||$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Inégalité triangulaire : Soit $(X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, alors $N(X + Y) = ||B \times (X + Y)|| = ||BX + BY|| \leqslant ||BX|| + ||BY||$ donc $N(X + Y) \leqslant N(X) + N(Y)$ car $||\,.\,||$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Ainsi, N est une norme sur l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$.

Plus précisément, cette norme N est la norme euclidienne associée au produit scalaire $\varphi : (\mathbb{R}^n)^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(X, Y) = X^T AY = X^T B^T BY = (BX)^T(BY) = (BX|BY)$ (vérification classique).

118 **a.** Analyse : supposons qu'il existe $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que $M \sim S$ alors, par définition, il existe $Q \in O(n)$ telle que $M = QS$. Ainsi, $M^T = S^T Q^T = SQ^T$ donc $M^T M = SQ^T QS = SI_n S = S^2$ car $Q^T Q = I_n$. De plus, $Q = MS^{-1}$ car S est inversible puisque M et Q le sont.

Synthèse : la matrice $M^T M$ est symétrique car $(M^T M)^T = M^T(M^T)^T = M^T M$ donc, d'après le théorème spectral, il existe $P \in O(n)$ et D diagonale telles que $M^T M = PDP^T$. D contient sur sa diagonale les valeurs propres de $M^T M$ comptées avec leur ordre de multiplicité. Or, si $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de $M^T M$, il existe $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $M^T MX = \lambda X$ donc $X^T M^T MX = \lambda X^T X$ d'où $||MX||^2 = \lambda ||X||^2$ ce qui montre que $\lambda = \dfrac{||MX||^2}{||X||^2} > 0$ car $MX \neq 0$ puisque M est inversible et $X \neq 0$. Ainsi, $Sp(M^T M) \subset \mathbb{R}_+^*$ et, si on note $D = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, on peut définir $\Delta = diag(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_n})$ qui vérifie $\Delta^2 = D$. Posons $S = P\Delta P^T$, alors $S^T = (P^T)^T \Delta^T P^T = P\Delta P^T = S$ donc S est symétrique et ses valeurs propres sont $\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_n}$ qui sont strictement positives donc $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et on a bien $S^2 = P\Delta^2 P^T = PDP^T = M^T M$. Si on pose $Q = MS^{-1}$, on a $Q^T Q = (S^{-1})^T M^T MS^{-1} = (S^T)^{-1}(M^T M)S^{-1} = S^{-1}S^2 S^{-1} = I_n$ donc $Q \in O(n)$ et on a bien construit $S \in \S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $Q \in O(n)$ telles que $M = QS$. Voilà pour l'existence !

b. Soit S et S' des matrices symétriques définies positives telles que $M \sim S$ et $M \sim S'$, alors il existe $(Q, Q') \in (O(n))^2$ tel que $M = QS = Q'S'$. Alors $M^T M = S^T Q^T QS = S^2$ et $M^T M = S'^T Q'^T Q'S' = S'^2$.

Méthode 1 : S et S' commutent avec $M^T M$ car $S(M^T M) = S \times S^2 = S^3 = S^2 \times S = (M^T M)S$ donc les sous-espaces propres de $M^T M$ sont stables par S et S'. Comme S et S' sont diagonalisables d'après le théorème spectral car symétriques réelles, leurs restrictions aux $E_{\lambda_k}(M^T M)$ le sont aussi. Mais toutes les valeurs propres δ de ces endomorphismes induits vérifient $\delta^2 = \lambda_k$ donc valent $\sqrt{\lambda_k}$ car $\delta > 0$ puisque $(S, S') \in (S_n^{++}(\mathbb{R}))^2$. Ceci montre que la restriction de S et de S' à $E_{\lambda_k}(M^T M)$ est l'homothétie de rapport $\sqrt{\lambda_k}$. Ainsi, les "endomorphismes" S, S' coïncident sur les sous-espaces $E_{\lambda_k}(M^T M)$. Comme $\mathbb{R}^n$ est la somme des sous-espaces propres $E_{\lambda_k}(M^T M)$ car $M^T M$ est diagonalisable, on a $S = S'$.

Méthode 2 : on note ici $\mu_1, \cdots, \mu_r$ les valeurs propres distinctes et strictement positives de $M^T M$. Pour $k \in [\![1; r]\!]$, comme $M^T M - \mu_k I_n = S^2 - \mu_k I_n = (S - \sqrt{\mu_k}\, I_n)(S + \sqrt{\mu_k}\, I_n)$ et que $S + \sqrt{\mu_k}\, I_n \in GL_n(\mathbb{R})$ car les valeurs propres de $S + \sqrt{\mu_k}\, I_n$ sont celles de S auxquelles on ajoute $\sqrt{\mu_k}$ donc elles sont strictement positives, on a $E_{\mu_k}(M^T M) = Ker(M^T M - \mu_k I_n) = Ker(S - \sqrt{\mu_k}\, I_n) = E_{\sqrt{\mu_k}}(S)$. Bien sûr, de même, on a $\forall k \in [\![1; r]\!],\ E_{\mu_k}(M^T M) = E_{\sqrt{\mu_k}}(S')$. La matrice $M^T M$ est diagonalisable d'après le théorème spectral et on a même $\mathbb{R}^n = \overset{\perp}{\bigoplus_{1\leqslant k\leqslant r}} E_{\mu_k}(M^TM)$. Ainsi, pour un vecteur $X \in \mathbb{R}^n$ qu'on décompose $X = \sum_{k=1}^{r} X_k$ avec $X_k \in E_{\mu_k}(M^TM)$, on a $SX = \sum_{k=1}^{r} SX_k = \sum_{k=1}^{r} \sqrt{\mu_k}X_k = \sum_{k=1}^{r} S'X_k = S'X$ d'où $S = S'$. Voilà pour l'unicité !

Ainsi, si $M \in GL_n(\mathbb{R})$, $\exists!(Q,S) \in O(n) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$, $M = QS$: c'est la décomposition polaire de M.

119 **a.** On a $f(v) - f(w) = (1-y, 2+x) - (1-y', 2+x') = (y'-y, x-x')$ pour $v = (x,y)$ et $w = (x',y')$ donc $||f(v) - f(w)|| = \sqrt{(y'-y)^2 + (x-x')^2} = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} = ||v-w||$.

Analyse : s'il existe $(u,g) \in \mathbb{R}^2 \times O(R^2)$ tel que $\forall v \in \mathbb{R}^2,\ f(v) = u + g(v)$, en prenant $v = (0,0)$, on a $f(0,0) = (1,3) = u + g(0,0) = u$ car g est linéaire donc $u = (1,3)$. De plus, pour tout $v = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, on obtient $g(v) = g(x,y) = f(x,y) - (1,3) = (-y,x)$.

Synthèse : prenons $u = (1,2)$ et $g : (x,y) \mapsto (-y,x)$, alors $g \in O(\mathbb{R}^2)$ car la matrice de g dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ vaut $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in O(2)$. Comme $\det(A) = 1$, on a même $A \in SO(\mathbb{R}^2)$ et g est la matrice de la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ car $A = R_{\pi/2}$.

Ainsi, il existe un unique couple $(u,g) \in \mathbb{R}^2 \times O(\mathbb{R}^2)$ tel que $\forall v \in \mathbb{R}^2,\ f(v) = u + g(v)$, il s'agit du vecteur $u = (1,2)$ et de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $g : (x,y) \mapsto (-y,x)$.

Pour aller plus loin dans la description de f, cherchons un vecteur $v = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(v) = v$. Or $(1-y, 3+x) = (x,y) \iff (x = -1, y = 2)$ donc le point $v_0 = (-1,2)$ est l'unique point fixe de f. Et on a $\forall v \in \mathbb{R}^2,\ f(v_0+v) = u + g(v_0+v) = u + g(v_0) + g(v) = f(v_0) + g(v) = v_0 + g(v)$ donc f est la rotation affine d'angle $\frac{\pi}{2}$ autour du point $v_0 = (-1,2)$.

b. Avec ces conditions, en prenant $x = 0_E$, on a $f(0_E) = u + g(0_E) = u$ car g est linéaire donc $u = f(0_E)$ et $\forall x \in E,\ g(x) = f(x) - u = f(x) - f(0_E)$.

c. (i) : soit $x \in E$, comme $u = f(0_E)$ et $g(x) = f(x) - f(0_E)$ d'après **a.**, on $f(x) = f(0_E) + f(x) - f(0_E) = u + g(x)$.

(ii) : pour un couple $(x,y) \in E^2$, d'après l'une des trois identités de polarisation, on a la relation suivante : $(g(x)|g(y)) = \frac{1}{2}\Big(||g(x)||^2 + ||g(y)||^2 - ||g(x)-g(y)||^2\Big) = \frac{1}{2}\Big(||f(x)-f(0_E)||^2 + ||f(y)-f(0_E)||^2 - ||f(x)-f(y)||^2\Big)$.
Ainsi, $(g(x)|g(y)) = \frac{1}{2}\Big(||x-0_E||^2 + ||y-0_E||^2 - ||x-y||^2\Big) = \frac{1}{2}\Big(||x||^2 + ||y||^2 - ||x-y||^2\Big) = (x|y)$ par hypothèse sur f et avec la même identité de polarisation.

(iii) Comme g conserve le produit scalaire, en prenant $x = y$ dans (ii), on obtient la relation $||g(x)||^2 = ||x||^2$ donc g conserve la norme ce qui, par définition, signifie que $g \in O(E)$.

120 **a.** C'est une question de cours ; en général même, $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(A,B) = \text{Tr}\,(A^TB)$ un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En effet, la linéarité de la trace montre la linéarité en la seconde variable de φ. De plus, $\varphi(B,A) = \text{Tr}\,(B^TA) = \text{Tr}\,((B^TA)^T) = \text{Tr}\,(A^TB) = \varphi(A,B)$ donc φ est symétrique et donc aussi linéaire en la première variable. Ainsi, φ est déjà bilinéaire symétrique. Par le calcul, en notant $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, on a $\varphi(A,A) = \text{Tr}\,(A^TA) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2 \geqslant 0$. Si $\varphi(A,A) = 0$, comme une somme de termes positifs n'est nulle que si tous ses termes sont nuls, on a $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ a_{i,j} = 0$ donc $A = 0$. φ est donc bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. Par définition, $M \in \Sigma \iff (\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ M = aI_2 + bJ)$ avec $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi, $\Sigma = \mathrm{Vect}(I_2, J)$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de comme la famille (I_2, J) est libre, c'est une base de Σ.

c. $\Sigma^\perp$ étant un supplémentaire du plan Σ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de dimension 4, on a aussi $\dim(\Sigma^\perp) = 4 - 2 = 2$. $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Sigma^\perp \iff (M \perp I_2$ et $M \perp J)$ donc, après calculs, $M \in \Sigma^\perp \iff (a + d = b - c = 0)$. Les matrices de $\Sigma^\perp$ sont donc celles de la forme $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$, d'où $\Sigma^\perp = \mathrm{Vect}(K, L)$ avec $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Or $K^T L = KL = J$ donc $\varphi(K, L) = \mathrm{Tr}\,(J) = 0$. Il suffit donc de normer ces matrices pour avoir $\mathcal{B}_2 = \left(\frac{K}{\sqrt{2}}, \frac{L}{\sqrt{2}}\right)$ comme base orthonormale de $\Sigma^\perp$. De même, $\mathcal{B}_2 = \left(\frac{I_2}{\sqrt{2}}, \frac{J}{\sqrt{2}}\right)$ en est une de Σ.

d. D'après un théorème du cours, cette distance d_2 vérifie $d_2 = d(M, \Sigma^\perp) = ||M - p_2(M)||$ où p_2 est la projection orthogonale sur $\Sigma^\perp$. Or on sait que $p_2(M) = \varphi\Big(M, \frac{K}{\sqrt{2}}\Big)\frac{K}{\sqrt{2}} + \varphi\Big(M, \frac{L}{\sqrt{2}}\Big)\frac{L}{\sqrt{2}}$ car $\mathcal{B}_2$ est une base orthonormale de $\Sigma^\perp$. Ainsi, $p_2(M) = 0.\frac{K}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\frac{L}{\sqrt{2}} = L$ d'où $d = ||M - L|| = ||I_2|| = \sqrt{2}$. On peut faire de même avec $\mathcal{B}_1$ ou, en notant p_1 la projection orthogonale sur Σ et en notant d_1 la distance de M à Σ, se rendre compte que $d_1 = ||M - p_1(M)|| = ||p_2(M)||$ car $p_1 + p_2 = \mathrm{id}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$. Puisque $d_2 = ||M - p_2(M)|| = ||p_1(M)||$ et par PYTHAGORE, $||M||^2 = ||p_1(M)||^2 + ||p_2(M)||^2 = d_1^2 + d_2^2 = 2$. Ainsi, on a aussi $d_1 = \sqrt{2}$.

121 **a.** D'après l'énoncé, $I_0 = \sqrt{\pi}$. De plus, $I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2}dt = \left[-\frac{e^{-t^2}}{2}\right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$, l'application $f_n : t \mapsto t^n e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, paire ou impaire selon la parité de n, et $f_n(t) \underset{+\infty}{=} o\Big(\frac{1}{t^2}\Big)$ par croissances comparées, ce qui fait que f_n est intégrable sur $\mathbb{R}$ d'après RIEMANN : I_n existe.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \int_{-\infty}^{+\infty} t^{n+2}e^{-t^2}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} t^{n+1}(te^{-t^2})dt$. Si on pose $u : t \mapsto t^{n+1}$ et $v : t \mapsto -\frac{e^{-t^2}}{2}$, alors u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et, par croissances comparées, $\lim\limits_{t \to \pm\infty} u(t)v(t) = 0$. Ainsi, par intégration par parties, $I_{n+2} = 0 + \frac{n+1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2}dt = \frac{n+1}{2}I_n$.

Si n impair, comme $t \mapsto t^n e^{-t^2}$ est impaire, on a $I_n = 0$ (ou alors avec $I_1 = 0$ et la relation précédente).
Si $n = 2p$ est pair, alors $I_{2p} = \frac{2p-1}{2}I_{2p-2} = \cdots = \frac{(2p-1)(2p-3)\cdots 1}{2^p}I_0 = \frac{(2p)!}{4^p p!}\sqrt{\pi} = \frac{n!}{2^n (n/2)!}\sqrt{\pi}$.

b. À nouveau, pour $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, $g : t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et, par croissances comparées, $g(t) \underset{-\infty}{=} o\Big(\frac{1}{t^2}\Big)$ et $g(t) \underset{+\infty}{=} o\Big(\frac{1}{t^2}\Big)$ donc g est intégrable sur $\mathbb{R}$. L'application φ est donc bien définie.

Par linéarité de l'intégrale, φ est bilinéaire et symétrique car $PQ = QP$. $\varphi(P, P) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} P^2(t)e^{-t}dt \geqslant 0$ et, comme $t \mapsto P^2(t)e^{-t}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} P^2(t)e^{-t}dt = 0 \iff \forall t \in \mathbb{R},\ P^2(t)e^{-t} = 0$ ainsi P est nulle sur $\mathbb{R}$. Mais si P s'annule sur $\mathbb{R}$, P admet une infinité de racines donc $P = 0$. Ainsi, $(P|P) = 0 \iff P = 0$. $(.|.)$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

c. D'après le cours, $d(X^3, \mathbb{R}_2[X]) = ||X^3 - p(X^3)||$ si p est la projection orthogonale sur $\mathbb{R}_2[X] = \mathrm{Vect}(1, X, X^2)$, sous-espace de dimension finie d'un espace préhilbertien réel. Ainsi, il existe un triplet $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $p(X^3) = a + bX + cX^2$. On a donc $(X^3 - p(X^3)|1) = (X^3 - p(X^3)|X) = (X^3 - p(X^3)|X^2) = 0$ ce qui donne le système 3 équations 3 inconnues suivant : $aI_0 + cI_2 = aI_2 + cI_4 = bI_2 - I_4 = 0$. On en déduit que $a = c = 0$ et $b = 3/2$, donc que $d(X^3, \mathbb{R}_2[X]) = ||X^3 - (3/2)X|| = \sqrt{\frac{I_6 - 3I_4 + (9/4)I_2}{\pi}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sim 0,87$ (après calculs).

(122) **a.** Les matrices appartenant à $D_n(\mathbb{R})$ s'appellent les matrices à diagonale propre.

La matrice A étant triangulaire supérieure, on a $\chi_A = (X-1)^n$ donc $\mathrm{Sp}(A) = \{1, \cdots, 1\}$ (1 répété n fois) donc $A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$. Plus généralement, toute matrice triangulaire est dans $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$. Comme B est symétrique réelle, elle est diagonalisable par le théorème spectral et, comme rang $(B) = 1$, on a $\dim(\mathrm{Ker}(B)) = n-1$ par la formule du rang donc 0 est valeur propre de multiplicité $n-1$. La dernière valeur propre λ vérifie donc $\mathrm{Tr}\ (B) = 0 + \cdots + 0 + \lambda = \lambda$ donc $\lambda = n$ et $B \notin \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ car la diagonale de B ne contient pas $0, \cdots, 0, n$.

b. $\mathcal{D}_1(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$. Dès que $n \geqslant 2$, $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car il n'est pas stable par somme. En effet, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sont dans $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ alors que $A_2 - B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ n'appartient pas à $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ car $\chi_{A_2 - B_2} = X^2 + 1$ donc ses valeurs propres sont $\pm i$ alors que les deux termes diagonaux de $A_2 - B_2$ sont 0 et 0. On peut généraliser pour un entier $n \geqslant 3$ en prenant $A_n = \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B_n = \begin{pmatrix} B_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec les mêmes justifications.

c. Si M est symétrique, pour le produit scalaire canonique sur les matrices défini par $(A|B) = \mathrm{Tr}\ (A^TB)$, on a $||M||^2 = \mathrm{Tr}\ (M^TM) = \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} m_{i,j}^2$. Or, d'après le théorème spectral, on a $M = PDP^T$ avec P orthogonale et D diagonale contenant les valeurs propres de M (comptées avec leurs ordres de multiplicité). Ainsi, il vient $||M||^2 = \mathrm{Tr}\ (M^TM) = \mathrm{Tr}\ (PD^2P^T) = \mathrm{Tr}\ (D^2)$ car deux matrices semblables ont même trace. Or $\mathrm{Tr}\ (D^2) = \sum\limits_{k=1}^{n} m_{k,k}^2$ puisque $M \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ ce qui donne la relation $\sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} m_{i,j}^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} m_{k,k}^2$ (1).
En simplifiant les termes dans (1), on obtient $\sum\limits_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} m_{i,j}^2 = 0$ et comme une somme de termes positifs n'est nulle que si tous ses termes sont nuls, $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ i \neq j \Longrightarrow m_{i,j} = 0$ et enfin M diagonale.
Ainsi, $\mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \cap S_n = D_n$ (les matrices diagonales) car réciproquement, les matrices diagonales (qui sont donc triangulaires) sont symétriques et à diagonale propre.

d. Si $M \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \cap A_n$, alors par hypothèse $\chi_M = \prod\limits_{k=1}^{n} (X - 0) = X^n$ car les termes diagonaux d'une matrice antisymétrique sont nuls. Par Cayley-Hamilton, $M^n = 0$ donc M est nilpotente. Comme M^2 est symétrique donc diagonalisable et qu'elle est aussi nilpotente car $(M^2)^n = M^{2n} = 0$, elle est forcément nulle car elle est semblable à une matrice diagonale avec des 0 sur la diagonale. Ainsi $M^2 = 0 = -M^TM$ donc $M^TM = 0$ ce qui donne $||M||^2 = \mathrm{Tr}\ (M^TM) = 0$ donc $M = 0$. Par conséquent $\mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \cap A_n = \{0\}$.

(123) **a.** Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(P, Q, R) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$, si $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$, $Q = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k X^k$ et $R = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k X^k$:

<u>Symétrie</u> : on a $(P|Q) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_k = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_k = (Q|P)$ donc $(\,.\,|\,.\,)$ est symétrique.

<u>Bilinéarité</u> : on a $(\lambda P + R|Q) = \sum\limits_{k=0}^{n} (\lambda a_k + c_k) b_k = \lambda \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_k + \sum\limits_{k=0}^{n} c_k b_k = \lambda(P|Q) + (R|Q)$ donc, avec la symétrie établie ci-dessus, $(\,.\,|\,.\,)$ est bilinéaire.

<u>Définie positivité</u> : on a $(P|P) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k^2 \geqslant 0$. Dé plus, si $(P|P) = 0$, comme une somme de termes positifs n'est nulle que si tous ses termes sont nuls, $a_0 = \cdots, a_n = 0$ donc $P = 0$. Ainsi, $(\,.\,|\,.\,)$ est définie positive.
Ainsi, $(\,.\,|\,.\,)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

b. Soit $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(P) = P(1)$, alors φ est une forme linéaire non nulle sur $\mathbb{R}_n[X]$ car

$\varphi(1) = 1$ donc $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan $\mathbb{R}_n[X]$. Alors, d'après le cours, $d(1, H)$ est bien définie comme la distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien et on sait que $d(1, H) = ||1 - p_H(1)||$ où p_H est la projection orthogonale sur H. Plus précisément, comme $P(1) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ on a l'équivalence $P \in H \iff \sum\limits_{k=0}^{n} a_k = 0 \iff (P|1) = 0$ donc $H = \mathrm{Vect}(1)^{\perp}$. Comme $H^{\perp} = \mathrm{Vect}(1)$ est un droite, on sait d'après le cours qu'alors $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $p_{H^\perp}(P) = \dfrac{(P|1)}{||1||^2}1$ donc $d(1, H) = ||1 - p_H(1)|| = ||p_{H^\perp}(1)|| = \dfrac{|(P|1)|}{||1||} = \dfrac{\left|\sum\limits_{k=0}^{n} a_k\right|}{\sqrt{n}}$.

124 **a.** La matrice J_n est symétrique réelle donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'après le théorème spectral.

b. On a clairement rang $(J_n) = 1$ donc, avec la formule du rang, on a $\dim(\mathrm{Ker}(J_n)) = n - 1 > 0$ et 0 est valeur propre de multiplicité au moins $n - 1$ d'après le cours ce qui montre que $\chi_{J_n} = X^{n-1}(X - \lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme on sait qu'on a aussi $\chi_{J_n} = X^n - \mathrm{Tr}\,(J_n)X^{n-1} + \cdots$, on a $\lambda = \mathrm{Tr}\,(J_n) = n$ en identifiant. Ainsi, $E_0(J_n)$ est de dimension $n - 1$ et $E_n(J_n)$ de dimension 1.

En notant $(e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, il est clair que les vecteurs $v_k = e_k - e_n$ sont des vecteurs du noyau de J_n pour $k \in [\![1; n-1]\!]$ car $C_k = C_n$ dans J_n et que la famille $(v_1, \cdots, v_{n-1})$ est libre donc $E_0(J_n) = \mathrm{Ker}(J_n) = \mathrm{Vect}(v_1, \cdots, v_{n-1})$. De plus, le vecteur $w = e_1 + \cdots, e_n$ vérifie $J_n v_n = n v_n$ donc $E_n(J_n) = \mathrm{Vect}(v_n)$. Ainsi, $\mathcal{B} = (v_1, \cdots, v_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ car $\mathbb{R}^n = E_0(J_n) \oplus E_n(J_n)$ et, en notant P la matrice passage de la base canonique à $\mathcal{B}$, on a $J_n = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(0, \cdots, 0, n)$. En version développée, la matrice P vaut $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ -1 & \cdots & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

ORAUX 2024 THÈME 8
PROBABILITÉ ET VARIABLES ALÉATOIRES

125 **a.** Si on note X_n l'état du jeu à l'étape n, comme $\{(X_n = 0), (X_n = 1)\}$ est un système complet d'évènements par hypothèse, on a $\mathbb{P}(X_{n+1} = 0) = \mathbb{P}(X_n = 0)\,\mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 0) + \mathbb{P}(X_n = 1)\,\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 0)$ et $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = \mathbb{P}(X_n = 0)\,\mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 1) + \mathbb{P}(X_n = 1)\,\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1)$ par la formule des probabilités totales. D'après l'énoncé, $\mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 0) = 1 - p$, $\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 0) = q$, $\mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 1) = p$ et $\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1) = 1 - q$. Ainsi, en notant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \end{pmatrix}$, les relations précédentes se traduisent matriciellement par $\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n$ avec $A = \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix}$.

D'après Cayley-Hamilton, $\chi_A = X^2 - \mathrm{Tr}\,(A)X + \det(A) = X^2 - (2-p-q)X + 1 - p - q = (X-1)(X-(1-p-q))$ est annulateur de A. Soit $n \in \mathbb{N}$, effectuons la division euclidienne de X^n par χ_A, qui s'écrit $X^n = Q_n\chi_A + R_n$ avec $R_n = a_nX + b_n$ car $\deg(R_n) < \deg(\chi_A) = 2$. En évaluant ceci en 1 et $1-p-q$, on obtient le système $a_n + b_n - 1 = a_n(1-p-q) + b_n - (1-p-q)^n = 0$ qui se résout facilement en $a_n = \dfrac{1-(1-p-q)^n}{p+q}$ et $b_n = \dfrac{(1-p-q)^n - (1-p-q)}{p+q}$. Ainsi, en remplaçant X par A dans $X^n = Q_n\chi_A + a_nX + b_n$, on trouve $A^n = \dfrac{1-(1-p-q)^n}{p+q}A + \dfrac{(1-p-q)^n-(1-p-q)}{p+q}I_2 = \dfrac{1}{p+q}\begin{pmatrix} q + p(1-p-q)^n & q - q(1-p-q)^n \\ p - p(1-p-q)^n & p + q(1-p-q)^n \end{pmatrix}$.

Par une récurrence facile, on prouve que $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^nX_0$. Comme $p_n = \mathbb{P}(X_n = 1)$ par définition, on a donc $\begin{pmatrix} 1-p_n \\ p_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1-p_0 \\ p_0 \end{pmatrix}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = \dfrac{(p - p(1-p-q)^n)(1-p_0) + (p + q(1-p-q)^n)p_0}{p+q}$.

b. Comme $p \in]0;1[$ et $q \in]0;1[$, on a $1-p-q \in]-1;1[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-p-q)^n = 0$ donc, en passant à la limite dans la relation de la question précédente, $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \dfrac{p(1-p_0) + pp_0}{p+q} = \dfrac{p}{p+q}$.

126 **a.** Soit $(d, d') \in [\![1;n]\!]^2$ tel que d et d' sont des diviseurs de n premiers entre eux.

- ($\subset$) Soit $m \in A_d \cap A_{d'}$, alors il existe par définition k et k' tels que $1 \leqslant k \leqslant \dfrac{n}{d}$ et $1 \leqslant k' \leqslant \dfrac{n}{d'}$ et $m = kd = k'd'$. Ainsi, $d|k'd'$ mais d et d' sont premiers entre eux donc, d'après le lemme de Gauss, $d|k'$ et il existe $a \in \mathbb{N}$ tel que $k' = ad$. Comme $1 \leqslant ad \leqslant \dfrac{n}{d'}$, on a $1 \leqslant a \leqslant \dfrac{n}{dd'}$ donc, par définition, $m = add' \in A_{dd'}$. On vient d'établir que $A_d \cap A_{d'} \subset A_{dd'}$.
- ($\supset$) Soit $m \in A_{dd'}$, il existe donc k tel que $1 \leqslant k \leqslant \dfrac{n}{dd'}$ et $m = kdd'$. Comme $1 \leqslant kd' \leqslant \dfrac{n}{d}$ et $m = (kd')d$ et $1 \leqslant kd \leqslant \dfrac{n}{d'}$ et $m = (kd)d'$, on a $m \in A_d \cap A_{d'}$ par définition. On a montré que $A_{dd'} \subset A_d \cap A_{d'}$.

Par double inclusion, $A_d \cap A_{d'} = A_{dd'}$. Par définition de $\mathbb{P}$, comme $\mathbb{P}(A_q) = \dfrac{1}{q}$ par définition si $q|n$, on a $\mathbb{P}(A_d \cap A_{d'}) = \mathbb{P}(A_{dd'}) = \dfrac{1}{dd'} = \dfrac{1}{d} \times \dfrac{1}{d'} = \mathbb{P}(A_d)\,\mathbb{P}(A_{d'})$ ce qui justifie que A_d et $A_{d'}$ sont indépendants.

b. Pour $k \in [\![1;n]\!]$, $k \in B_n \iff k \wedge (p_1^{s_1} \cdots p_r^{s_r}) = 1 \iff (\forall j \in [\![1;r]\!],\ k \wedge p_j = 1) \iff (\forall j \in [\![1;r]\!],\ k \notin A_{p_j})$. En effet, k est premier avec n si et seulement si k et n n'ont aucun nombre premier dans leur décomposition respective en produit de nombres premiers. Ainsi, $B_n = \bigcap_{j=1}^{r} \overline{A_{p_j}}$.

c. Par récurrence à partir de **a.**, on montre que puisque $p_1, \cdots, p_r$ sont premiers entre eux deux à deux, les $A_{p_1}, \cdots, A_{p_r}$ sont indépendants. On sait qu'alors $\overline{A_{p_1}}, \cdots, \overline{A_{p_r}}$ le sont aussi de sorte que $\mathbb{P}(B_n) = \prod_{j=1}^{r} \mathbb{P}(\overline{A_{p_j}})$ donc $\dfrac{\varphi(n)}{n} = \prod_{j=1}^{r} \left(1 - \mathbb{P}(A_{p_j})\right) = \prod_{j=1}^{r} \left(1 - \dfrac{1}{p_j}\right)$ donc $\varphi(n) = n \prod_{j=1}^{r} \left(1 - \dfrac{1}{p_j}\right)$.

d. Soit deux entiers n et m de $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ premiers entre eux, si on décompose $n = p_1^{s_1} \cdots p_r^{s_r}$ et $m = q_1^{r_1} \cdots q_r^{r_t}$, puisque'aucun nombre premier divisant n ne divise m, et vice-versa, $p_1^{s_1} \cdots p_r^{s_r} q_1^{r_1} \cdots q_r^{r_t}$ est la décomposition en produit de nombres premiers de nm. D'après la question précédente, on a $\varphi(n) = n \prod_{j=1}^{r} \left(1 - \dfrac{1}{p_j}\right)$, $\varphi(m) = m \prod_{k=1}^{t} \left(1 - \dfrac{1}{q_k}\right)$ et $\varphi(nm) = nm \left(\prod_{j=1}^{r} \left(1 - \dfrac{1}{p_j}\right)\right) \times \left(\prod_{k=1}^{t} \left(1 - \dfrac{1}{q_k}\right)\right)$ donc $\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$.

e. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$, alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ que $z = e^{i\theta}$. On pose $t = \dfrac{\theta}{2\pi} \in \mathbb{R}$ de sorte que $z = e^{2i\pi t}$. Comme $t \in \mathbb{R}$ et que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe une suite $(t_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{k\to+\infty} t_k = t$. En écrivant $t_k = \dfrac{a_k}{b_k}$ avec $a_k \in \mathbb{Z}$ et $b_k \in \mathbb{N}^*$, on a $z_k = e^{\frac{2i\pi a_k}{b_k}}$ donc z_k est une racine b_k-ième de l'unité et $z_k \in \mathbb{U}$. Comme $u \mapsto e^{iu} = \cos(u) + i\sin(u)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car $\cos$ et $\sin$ le sont, et que $\lim_{k\to+\infty} t_k = t$, on a $\lim_{k\to+\infty} e^{it_k} = e^{it}$ donc $\lim_{k\to+\infty} z_k = z$. Il existe bien une suite $(z_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{U}^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{k\to+\infty} z_k = z$.

f. Soit $z \in P_n$, alors $m_z = n$ donc $z^n = 1$ et $z \in \mathbb{U}_n$ car $m_z = \mathrm{Inf}\left\{n \in \mathbb{N}^* \mid z^n = 1\right\} = \mathrm{Min}\left\{n \in \mathbb{N}^* \mid z^n = 1\right\}$ puisque $\left\{n \in \mathbb{N}^* \mid z^n = 1\right\}$ est une partie non vide (par hypothèse car $z \in \mathbb{U}$) de $\mathbb{N}$. Ainsi, $P_n \subset \mathbb{U}_n$ donc, comme $\mathbb{U}_n$ est fini de cardinal n d'après le cours, P_n est fini et $\mathrm{card}\,(P_n) \leqslant n$.

On sait que $\mathbb{U}_n = \{\omega_n^k \mid k \in [\![0; n-1]\!]\}$ avec $\omega_n = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Montrons que $P_n = \{\omega_n^k \mid k \in B_n\}$.

($\subset$) Soit $z \in P_n$, comme $P_n \subset \mathbb{U}_n$, il existe un unique entier $k \in [\![0; n-1]\!]$ tel que $z = \omega_n^k$. Si on avait $\mathrm{pgcd}\,(n,k) = d > 1$, alors $z^{n/d} = \left(e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^{n/d} = e^{\frac{2ik\pi}{d}} = 1$ car d divise k ce qui contredirait le fait que n est le pus petit entier m tel que $z^m = 1$ car $\dfrac{n}{d} < n$. Par l'absurde, on a donc prouvé que $\mathrm{pgcd}\,(n,k) = 1$ donc que $k \in B_n$. Ainsi, $P_n \subset \{\omega_n^k \mid k \in B_n\}$.

($\supset$) Soit $z \in \{\omega_n^k \mid k \in B_n\}$ qu'on écrit donc $z = \omega_n^k$ avec $k \in B_n$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $z^m = 1$, on a donc $\omega_n^{mk} = e^{\frac{2ikm\pi}{n}} = 1$ ce qui montre que $\dfrac{2km\pi}{n} \equiv 0\ [2\pi]$ donc que km est un multiple de n. Or, puisque n et k sont premiers entre eux et que n divise mk, par le lemme de Gauss, on a $n|m$ donc $m \geqslant n$. Comme $z^n = 1$, n est bien le plus petit entier m tel que $z^m = 1$ et on a $z \in P_n$. Ainsi, $\{\omega_n^k \mid k \in B_n\} \subset P_n$.

Par double inclusion, on a $P_n = \{\omega_n^k \mid k \in B_n\}$ donc l'application $\theta : B_n \mapsto P_n$ définie par $\theta(k) = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ est une bijection ce qui justifie bien que $|B_n| = \varphi(n) = |P_n|$.

g. ($\supset$) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors $P_n \subset \mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}$ par définition donc $P_n \subset \mathbb{U}$. On en déduit l'inclusion $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} P_n \subset \mathbb{U}$.

($\subset$) Soit $z \in \mathbb{U} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathbb{U}_n$, par définition, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $z \in \mathbb{U}_n$. Ainsi, $z^n = 1$ et, par construction, $m_z = \mathrm{Inf}\left\{k \in \mathbb{N}^* \mid z^k = 1\right\} \leqslant n$. Comme $z \in P_{m_z}$, $z \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} P_n$ d'où l'inclusion $\mathbb{U} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} P_n$.

Par double inclusion, on a bien $\mathbb{U} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} P_n$.

Soit $(n,m)\in(\mathbb{N}^*)^2$ et $n\neq m$, s'il existait un complexe $z\in P_n\cap P_m$, on aurait à la fois $m_z=n$ et $m_z=m$ par définition, ce qui est absurde car $n\neq m$. Ainsi, on a bien $P_n\cap P_m=\emptyset$ si $n\neq m$ ce qui justifie que $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une partition de $\mathbb{U}$. On appelle les éléments de P_n des racines primitives n-ièmes de l'unité. Par exemple, $P_1=\{1\}$, $P_2=\{-1\}$, $P_3=\{j,j^2\}$, $P_4=\{i,-i\}$.

127 **a.** L'application nulle est une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2 de Ω dans $\mathbb{R}$ et une combinaison linéaire de deux variables aléatoires admettant des moments d'ordre 2 est aussi une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2 d'après le cours, donc E est un espace vectoriel de dimension inférieure ou égale à n car engendré par n “vecteurs”. La variable aléatoire nulle appartient à G. Si $(X,Y)\in G^2$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, $\lambda X+\mu Y$ est une variable aléatoire réelle sur Ω et, comme $0\leqslant\mathbb{E}(XY)^2\leqslant\mathbb{E}(X^2)\,\mathbb{E}(Y^2)=0$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\mathbb{E}((\lambda X+\mu Y)^2)=\lambda^2\,\mathbb{E}(X^2)+2\lambda\mu\,\mathbb{E}(XY)+\mu^2\,\mathbb{E}(Y^2)=0$. Ainsi, G est bien un sous-espace vectoriel de E et, en tant que tel en dimension finie, admet un supplémentaire F.

Si $(X,Y)\in E^2$, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, XY admet une espérance finie donc f est bien définie sur E. f est bilinéaire par linéarité de l'espérance, symétrique par commutativité du produit dans $\mathbb{R}$ et positive car X^2 étant une variable aléatoire positive, on a $\mathbb{E}(X^2)=f(X,X)\geqslant 0$. Par contre, f n'est pas définie positive donc pas un produit scalaire sur E car pour toute variable aléatoire X non nulle de G , X^2 est presque sûrement nulle donc X est presque sûrement nulle et $f(X,X)=0$ alors que $X\neq 0$.

b. Par contre, $g=f|_{F^2}:F^2\to\mathbb{R}$ définie par $\forall (X,Y)\in F^2,\ g(X,Y)=f(X,Y)=\mathbb{E}(XY)$ a les mêmes propriétés de bilinéarité, symétrie, et positivité en tant qu'application induite mais elle est aussi définie positive car si $X\in F$ et $g(X,X)=\mathbb{E}(X^2)=0$, on a $X\in F\cap G=\{0_E\}$ donc $X=0$ est la variable aléatoire nulle. Par conséquent, $g=f|_{F^2}$ est un produit scalaire sur F.

c. Pour $(X,Y)\in F^2$, on a $\mathbb{E}(XY)^2\leqslant\mathbb{E}(X^2)\,\mathbb{E}(Y^2)$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

d. <u>Méthode 1</u> : les variables aléatoires Z et $\mathbb{1}_{(Z>0)}$ admettent un moment d'ordre 2 donc, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $\mathbb{E}(\mathbb{1}_{(Z>0)}Z)^2\leqslant\mathbb{E}(\mathbb{1}^2_{(Z>0)})\,\mathbb{E}(Z^2)$. Or $\mathbb{1}^2_{(Z>0)}=\mathbb{1}_{(Z>0)}$ ce qui montre que $\mathbb{E}(\mathbb{1}^2_{(Z>0)})=\mathbb{P}(Z>0)$ et $\mathbb{1}_{(Z>0)}Z=Z$ car Z est positive. On a donc $\mathbb{E}(Z)^2\leqslant\mathbb{P}(Z>0)\,\mathbb{E}(Z^2)$ donc, comme $\mathbb{E}(Z^2)>0$ par hypothèse, on a bien $\mathbb{P}(Z>0)\geqslant\dfrac{\mathbb{E}(Z)^2}{\mathbb{E}(Z^2)}$.

<u>Méthode 2</u> : par définition $\mathbb{E}(Z)=\sum\limits_{z\in Z(\Omega)}z\,\mathbb{P}(Z=z)\geqslant 0$ puis par inégalité de Cauchy-Schwarz sur les séries, en écrivant $\mathbb{E}(Z)=\sum\limits_{\substack{z\in Z(\Omega)\\ z>0}}\big(z\sqrt{\mathbb{P}(Z=z)}\big)\big(\sqrt{\mathbb{P}(Z=z)}\big)$, comme ces séries convergent, on obtient $\mathbb{E}(Z)\leqslant\Big(\sum\limits_{\substack{z\in Z(\Omega)\\ z>0}}z^2\,\mathbb{P}(Z=z)\Big)\times\Big(\sum\limits_{\substack{z\in Z(\Omega)\\ z>0}}\mathbb{P}(Z=z)\Big)=\mathbb{E}(Z^2)\,\mathbb{P}(Z>0)$ donc $\mathbb{P}(Z>0)\geqslant\dfrac{\mathbb{E}(Z)^2}{\mathbb{E}(Z^2)}$ car $\mathbb{E}(Z^2)>0$.

e. Notons A_i le nombre d'arêtes issues du sommet i, on a $A_i=\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}X_{i,j}$ par définition donc, comme les variables aléatoires $X_{i,j}$ suivent la même loi de Bernoulli et qu'elles sont indépendantes, d'après le cours, A_i suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n-1,p_n)$.

f. Aucune arête ne part du sommet i si et seulement si $A_i=0$. Ainsi, $Z_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\mathbb{1}_{(A_i=0)}$ et, par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(Z_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{(A_i=0)}) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i = 0) = n(1-p_n)^{n-1}$.

g. Comme $p_n = c\dfrac{\ln(n)}{n}$, on a $\mathbb{E}(Z_n) = n(1-p)^{n-1} = n\exp\left((n-1)\ln\left(1 - c\dfrac{\ln(n)}{n}\right)\right)$ et $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$ donc $(n-1)\ln\left(1-c\dfrac{\ln(n)}{n}\right) \underset{+\infty}{=} n\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\left(-c\dfrac{\ln(n)}{n} + O\left(\dfrac{\ln(n)^2}{n^2}\right)\right) \underset{+\infty}{=} -c\ln(n) + o(1)$ (après regroupement). Ainsi, $\exp\left((n-1)\ln\left(1-c\dfrac{\ln(n)}{n}\right)\right) \underset{+\infty}{=} e^{-c\ln(n)+o(1)} \underset{+\infty}{=} n^{-c}e^{o(1)} \underset{+\infty}{\sim} n^{-c}$ et on conclut que $\mathbb{E}(Z_n) \underset{+\infty}{\sim} n^{1-c}$. Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(Z_n) = 0$ si $c > 1$, $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(Z_n) = +\infty$ si $c < 1$ et $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(Z_n) = 1$ si $c = 1$.

h. Comme Z_n est à valeurs dans $\mathbb{N}$, on a $\mathbb{E}(Z_n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Z_n \geqslant k) \geqslant \mathbb{P}(Z_n \geqslant 1) = \mathbb{P}(Z_n > 0)$. Ainsi, il vient $\mathbb{P}(Z_n \geqslant 1) \leqslant \mathbb{E}(Z_n)$. Or, comme $\forall n \geqslant n_0,\ \mathbb{E}(Z_n) \leqslant n\exp\left((n-1)\ln\left(1 - c\dfrac{\ln(n)}{n}\right)\right)$ car $c\dfrac{\ln(n)}{n} \leqslant p_n < 1$ pour tout $n \geqslant n_0$. On a donc, d'après **g.** et par encadrement, $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Z_n > 0) = 0$ dans ces conditions. On n'a presque sûrement aucun sommet isolé quand n tend vers $+\infty$.

i. On développe $Z_n^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{(A_i=0)}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{(A_i=0)}^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \mathbb{1}_{(A_i=0)}\mathbb{1}_{(A_j=0)}$ ce qui donne, comme $\mathbb{1}_{(A_i=0)}^2 = \mathbb{1}_{(A_i=0)}$, la relation $Z_n^2 = Z_n + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \mathbb{1}_{(A_i=0)\cap(A_j=0)}$ d'où, par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(Z_n^2) = \mathbb{E}(Z_n) + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \mathbb{P}(A_i = 0, A_j = 0)$. Il y a une arête possible entre les sommets i et j, et $n-2$ autres arêtes possibles arrivant en i et $n-2$ autres arrivant en j. Par indépendance mutuelle, on obtient $\mathbb{P}(A_i = 0, A_j = 0) = (1-p_n)^{2n-3}$. Ainsi, en reportant, $\mathbb{E}(Z_n^2) = n(1-p_n)^{n-1} + n(n-1)(1-p_n)^{2n-3}$ donc, en factorisant par rapport aux puissances de $1-p_n$, $\mathbb{E}(Z_n^2) = n(1-p_n)^{n-1}(1+(n-1)(1-p_n)^{n-2})$. D'après la question **d.**, on a donc $1 \geqslant \mathbb{P}(Z_n > 0) \geqslant \dfrac{\mathbb{E}(Z_n)^2}{\mathbb{E}(Z_n^2)} = \dfrac{n}{n-1} \times (1-p_n) \times \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{(n-1)(1-p_n)^{n-2}}}$.

Or $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n-1} = 1$, $\lim_{n\to+\infty}(1-p_n) = 1$ car $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geqslant n_0,\ p_n \leqslant c\dfrac{\ln(n)}{n}$ et, comme en question **g.**, on a $\forall n \geqslant n_0,\ (n-1)(1-p_n)^{n-2} \geqslant (n-1)\exp\left((n-2)\ln(1-c\dfrac{\ln(n)}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\mathbb{E}(Z_n)^2}{\mathbb{E}(Z_n^2)} = 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Z_n > 0) = 1$ par encadrement. Il y a presque sûrement au moins un point isolé dans ce cas quand n tend vers $+\infty$ (en fait il y en a beaucoup puisque $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(Z_n) = +\infty$).

128 **a.** Puisque $X_n(\Omega) = \left\{0, \dfrac{1}{n}, \cdots, \dfrac{n-1}{n}\right\}$, on a $\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}\left(X_n = \dfrac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_n\left(e^{k/n} - 1\right) = \alpha_n \sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{k/n} - 1\right) = 1$. Or, comme $e^{1/n} \neq 1$, on a $\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{k/n} - 1\right) = -n + \sum_{k=0}^{n-1}(e^{1/n})^k = -n + \dfrac{e^{n/n} - 1}{e^{1/n} - 1} = \dfrac{e - 1 - n\left(e^{1/n} - 1\right)}{e^{1/n} - 1} > 0$. Ainsi, $\alpha_n = \dfrac{e^{1/n} - 1}{e - 1 - n\left(e^{1/n} - 1\right)}$. Or $e^{1/n} - 1 \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ et $e - 1 - n\left(e^{1/n} - 1\right) \underset{+\infty}{=} e - 1 - n\left(\dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) \underset{+\infty}{=} e - 2 + o(1)$ donc $\lim_{n\to+\infty}\left(e - 1 - n\left(e^{1/n} - 1\right)\right) = e - 2 > 0$ ce qui montre que $\alpha_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{(e-2)n}$.

129 **a.** X_n représente le nombre de succès (la face du dé lancé vaut 1) lors d'une répétition de lancers indépendants suivant la même loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$ (deux faces sur quatre). D'après le cours, X_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \dfrac{1}{2}\right)$. De même, comme il n'existe qu'une face sur quatre marquée 0 ou 2, Y_n et $Z_n = n - X_n - Y_n$ (qui représente le nombre de faces 2) suivent la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \dfrac{1}{4}\right)$. Ainsi, $\mathbb{E}(X_n) = \dfrac{n}{2}$ et $\mathbb{E}(Y_n) = \dfrac{n}{4}$.

b. Comme dit à la question précédente, $Z_n = n - X_n - Y_n$ suit la loi $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{4}\right)$ donc $(X_n + Y_n)(\Omega) = [\![0; n]\!]$ et, pour $k \in [\![0; n]\!]$, $\mathbb{P}(X_n + Y_n = k) = \mathbb{P}(Z_n = n - k) = \binom{n}{n-k}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-k}\left(\frac{3}{4}\right)^k$ ce qui montre que $X_n + Y_n$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{3}{4}\right)$. On pouvait aussi dire que $X_n + Y_n$ représente le nombre de fois où l'on tombe sur les faces 0 ou 1 (3 faces sur 4) lors de n lancers indépendants avec la même conclusion, $X_n + Y_n \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{3}{4}\right)$.

c. Si F_k est le numéro de la face du lancer k, pour $(i,j) \in [\![0; n]\!]^2$, $\big((X_n, Y_n) = (i,j)\big) = \emptyset$ si $i + j > n$ et $\big((X_n, Y_n) = (i,j)\big) = \bigsqcup_{\substack{1 \leqslant m_1 < \cdots < m_i \leqslant n \\ 1 \leqslant p_1 < \cdots < p_j \leqslant n \\ \{m_1, \cdots, m_i\}_{(=M)} \cap \{p_1, \cdots, p_j\}_{(=P)} = \emptyset}} \bigcap_{k=1}^{i} (F_{m_k} = 1) \cap \bigcap_{k=1}^{j} (F_{p_k} = 0) \cap \bigcap_{k \notin M \cup P} (F_k = 2)$ (réunion d'évènements incompatibles) donc, par indépendance des F_m et σ-additivité, on obtient la relation suivante : $\mathbb{P}((X_n, Y_n) = (i,j)) = N\left(\frac{1}{2}\right)^i\left(\frac{1}{4}\right)^j\left(\frac{1}{4}\right)^{n-i-j}$ où N est le nombre de $(i+j)$-uplets $(m_1, \cdots, m_i, p_1, \cdots, p_j)$ vérifiant les conditions imposées. Or il y a $\binom{n}{i}$ façons de choisir les $(m_1, \cdots, m_i)$ et, une fois choisi ce i-uplet, il y a, de manière indépendante, $\binom{n-i}{j}$ façons de choisir le j-uplet $(p_1, \cdots, p_j)$ parmi les $n - i$ lancers restants et un seul choix pour les indices correspondant à la face 2. Au total, cela donne l'expression $N = \binom{n}{i} \times \binom{n-i}{j} = \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}$ choix de tels $(i+j)$-uplets $(m_1, \cdots, m_i, p_1, \cdots, p_j)$.

Ainsi, $\mathbb{P}\big((X_n, Y_n) = (i,j)\big) = 0$ si $i + j > n$ et $\mathbb{P}\big((X_n, Y_n) = (i,j)\big) = \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}\left(\frac{1}{2}\right)^i\left(\frac{1}{4}\right)^{n-i}$ si $i + j \leqslant n$.

c. Comme X_n et Y_n sont bornées, la covariance demandée existe et $\mathrm{Cov}(X_n, Y_n) = \mathbb{E}(X_nY_n) - \mathbb{E}(X_n)\,\mathbb{E}(Y_n)$ donc $\mathrm{Cov}(X_n, Y_n) = \mathbb{E}(X_nY_n) - \frac{n^2}{8}$ d'après la question **a.**.

<u>Méthode 1 :</u> pour une variable aléatoire réelle U admettant un moment d'ordre 2, on a $\mathbb{E}(U^2) = \mathbb{V}(U) + \mathbb{E}(U)^2$ donc, comme on a aussi $X_nY_n = \frac{(X_n + Y_n)^2 - X_n^2 - Y_n^2}{2}$, par linéarité de l'espérance, cela donne la relation $\mathbb{E}(X_nY_n) = \frac{1}{2}\Big(\mathbb{V}(X_n + Y_n) + \mathbb{E}(X_n + Y_n)^2 - \mathbb{V}(X_n) - \mathbb{V}(Y_n) - \mathbb{E}(X_n)^2 - \mathbb{E}(Y_n)^2\Big)$. Or on connaît les lois de X_n, Y_n et $X_n + Y_n$ donc $\mathbb{E}(X_n + Y_n) = \frac{3n}{4}$, $\mathbb{E}(X_n) = \frac{n}{2}$, $\mathbb{E}(Y_n) = \frac{n}{4}$, $\mathbb{V}(X_n) = \frac{n}{4}$, $\mathbb{V}(Y_n) = \frac{3n}{16}$ et $\mathbb{V}(X_n + Y_n) = \frac{3n}{16}$ ce qui donne $\mathbb{E}(X_nY_n) = \frac{1}{2}\left(\frac{3n}{16} + \frac{9n^2}{16} - \frac{n}{4} - \frac{3n}{16} - \frac{n^2}{4} - \frac{n^2}{16}\right) = \frac{n(n-1)}{8}$. Ainsi, on trouve $\mathrm{Cov}(X_n, Y_n) = \mathbb{E}(X_nY_n) - \frac{n^2}{8} = -\frac{n}{8}$.

<u>Méthode 2 :</u> par le théorème de transfert appliqué à (X_n, Y_n) dont on connaît la loi avec **c.** et avec $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ définie par $f(i,j) = ij$, on a $\mathbb{E}(X_nY_n) = \sum_{i+j \leqslant n} ij\,\mathbb{P}\big((X_n, Y_n) = (i,j)\big) = \sum_{i+j \leqslant n} ij\frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}\left(\frac{1}{2}\right)^i\left(\frac{1}{4}\right)^{n-i}$.

Traitons deux cas :

<u>$n = 1$</u> Alors $X_1Y_1 = 0$ car il n'y a qu'un seul lancer donc $\mathbb{E}(X_1Y_1) = 0$.

<u>$n \geqslant 2$</u> $\mathbb{E}(X_nY_n) = \frac{n(n-1)}{8} \sum_{\substack{i+j \leqslant n \\ i > 0, j > 0}} \frac{(n-2)!}{(i-1)!(j-1)!((n-2)-(i-1)-(j-1))!}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}\left(\frac{1}{4}\right)^{(n-2)-(i-1)}$ et, avec $i' = i - 1, j' = j - 1$, $\mathbb{E}(X_nY_n) = \frac{n(n-1)}{8} \sum_{i'+j' \leqslant n-2} \frac{(n-2)!}{i'!j'!((n-2)-i'-j')!}\left(\frac{1}{2}\right)^{i'}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2-i'}$.

Avec **c.** appliquée avec $n - 2$ à la place de n, comme $\Omega = \bigsqcup_{i'+j' \leqslant n-2} \big((X_{n-2}, Y_{n-2}) = (i', j')\big)$, on a

$\sum\limits_{i'+j'\leqslant n-2} \mathbb{P}\big((X_{n-2}, Y_{n-2}) = (i', j')\big) = \sum\limits_{i'+j'\leqslant n-2} \dfrac{(n-2)!}{i'!j'!(n-2-i'-j')!}\Big(\dfrac{1}{2}\Big)^{i'}\Big(\dfrac{1}{4}\Big)^{n-2-i'} = 1$. Cette relation est même vraie pour $n = 2$ car $\sum\limits_{i'+j'\leqslant 0} \dfrac{n!}{i'!j'!(0-i'-j')!}\Big(\dfrac{1}{2}\Big)^{i'}\Big(\dfrac{1}{4}\Big)^{0-i'} = \Big(\dfrac{1}{2}\Big)^{0}\Big(\dfrac{1}{4}\Big)^{0} = 1$.

Ainsi, $\mathbb{E}(X_nY_n) = \dfrac{n(n-1)}{8}$.

Dans tous les cas, on a donc $\mathbb{E}(X_nY_n) = \dfrac{n(n-1)}{8}$ donc $\mathsf{Cov}(X_n, Y_n) = \dfrac{n(n-1)}{8} - \dfrac{n^2}{8} = -\dfrac{n}{8}$.

130 Bien sûr, on suppose les tirages indépendants et équiprobables. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose l'évènement $R_n =$ "on tire une boule rouge au tirage n".

a. Soit $n \geqslant 0$ et $k \in [\![0; N-1]\!]$, on a deux possibilités pour avoir k boules rouges au bout de $n+1$ tirages :

- soit on a $k+1$ boules rouges au bout de n tirages et on a tiré une boule rouge au tirage $n+1$ qui a été remplacée par une boule verte.
- soit on a déjà k boules rouges au bout de p tirages et on a tiré une boule verte au tirage $p+1$.

Ceci se traduit par $(X_{n+1} = k) = \big((X_n = k) \cap \overline{R_{n+1}}\big) \sqcup \big((X_n = k+1) \cap R_{n+1}\big)$. Par incompatibilité de ces deux évènements, $\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \mathbb{P}_{(X_n=k)}(\overline{R_{n+1}})\,\mathbb{P}(X_n = k) + \mathbb{P}_{(X_n=k+1)}(R_{n+1})\,\mathbb{P}(X_n = k+1)$ (1).

Ou alors, comme $X_n(\Omega) \subset [\![N-n; N]\!]$, avec le système complet d'évènements $\big((X_n = i)\big)_{N-n\leqslant i\leqslant N}$ et la formule des probabilités totales, $\mathbb{P}(X_n + 1 = k) = \sum\limits_{i=N-n}^{N} \mathbb{P}(X_n = i)\,\mathbb{P}_{(X_n=i)}(X_{n+1} = k)$ sachant que $i \neq k$ et $i \neq k+1$, $\mathbb{P}_{(X_n=i)}(X_{n+1} = k) = 0$, ce qui donne à nouveau la formule (1).

Or, si $X_n = k$, il y a dans l'urne k boules rouges et $N-k$ boules vertes donc $\mathbb{P}_{(X_n=k)}(\overline{R_{n+1}}) = \dfrac{N-k}{N}$. Et si $X_n = k+1$, il y a dans l'urne $k+1$ boules rouges et $N-k-1$ boules vertes donc $\mathbb{P}_{(X_n=k)}(R_{n+1}) = \dfrac{k+1}{N}$.

Ainsi, avec la relation (1), on a $\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \dfrac{N-k}{N}\,\mathbb{P}(X_n = k) + \dfrac{k+1}{N}\,\mathbb{P}(X_n = k+1)$.

Il reste à parler des cas particuliers :

- si $n = 0$ et $k = N$, on a $(X_1 = N) = \emptyset = (X_0 = N+1) = \emptyset$ et $(X_0 = N) = \Omega$ donc, comme $\dfrac{N-N}{N} = 0$, on a encore la relation $\mathbb{P}(X_{0+1} = N) = \dfrac{N-N}{N}\,\mathbb{P}(X_0 = N) + \dfrac{N+1}{N}\,\mathbb{P}(X_0 = N+1) = 0$.
- si ($n \geqslant 1$ et $k \geqslant N$) ou ($n = 0$ et $k > N$), on a $(X_{n+1} = N) = \emptyset = (X_n = N) = (X_n = N+1)$ donc on a toujours la relation $\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \dfrac{N-k}{N}\,\mathbb{P}(X_n = k) + \dfrac{k+1}{N}\,\mathbb{P}(X_n = k+1) = 0$.

Ainsi, dans tous les cas, $\forall n \geqslant 0$, $\forall k \geqslant 0$, $\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \dfrac{N-k}{N}\,\mathbb{P}(X_n = k) + \dfrac{k+1}{N}\,\mathbb{P}(X_n = k+1)$.

b. Pour $n \geqslant 0$, on a $\mathbb{E}(X_{n+1}) = \sum\limits_{k=0}^{N} k\,\mathbb{P}(X_{n+1} = k)$ car $X_n(\Omega) = [\![0; N]\!]$ donc, avec la question précédente, il vient $\mathbb{E}(X_{n+1}) = \sum\limits_{k=0}^{N} k\Big(\dfrac{N-k}{N}\,\mathbb{P}(X_n = k) + \dfrac{k+1}{N}\,\mathbb{P}(X_n = k+1)\Big)$ qu'on décompose, puisque $k = (k+1)-1$, en $\mathbb{E}(X_{n+1}) = \sum\limits_{k=0}^{N} k\,\mathbb{P}(X_n = k) - \dfrac{1}{N}\sum\limits_{k=0}^{N} k^2\,\mathbb{P}(X_n = k) + \dfrac{1}{N}\sum\limits_{k=0}^{N}(k+1)^2\,\mathbb{P}(X_n = k+1) - \dfrac{1}{N}\sum\limits_{k=0}^{N}(k+1)\,\mathbb{P}(X_n = k+1)$.
Après simplification et changement d'indice, comme $\mathbb{P}(X_n = N+1) = 0$, il ne reste dans cette formule que $\mathbb{E}(X_{n+1}) = \sum\limits_{k=0}^{N} k\,\mathbb{P}(X_n = k) - \dfrac{1}{N}\sum\limits_{k=0}^{N-1}(k+1)\,\mathbb{P}(X_n = k+1) = \Big(1 - \dfrac{1}{N}\Big)\,\mathbb{E}(X_n)$.

c. $\big(\mathbb{E}(X_n)\big)_{n\geqslant 0}$ est géométrique et, comme $\mathbb{E}(X_0) = N$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X_n) = N\Big(1 - \dfrac{1}{N}\Big)^n$ avec $1 - \dfrac{1}{N} \in]-1; 1[$. Or

$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=0}^{N} k\,\mathbb{P}(X_n = k) = \sum_{k=1}^{N} k\,\mathbb{P}(X_n = k) \geqslant \sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X_n \geqslant 1)$ donc $0 \leqslant \mathbb{P}(X_n \geqslant 1) \leqslant \mathbb{E}(X_n)$.
Comme X_n est à valeurs positives, on a aussi directement $\mathbb{P}(X_n \geqslant 1) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(X_n)}{1} = \mathbb{E}(X_n)$ par inégalité de MARKOV. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n) = 0$, par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n \geqslant 1) = 0$.
Comme $\dfrac{\mathbb{E}(X_N)}{N} = \left(1-\dfrac{1}{N}\right)^N = \exp\left(N\ln\left(1-\dfrac{1}{N}\right)\right)$ et $\ln\left(1-\dfrac{1}{N}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{N}$ donc $\lim\limits_{N\to+\infty} N\ln\left(1-\dfrac{1}{N}\right) = -1$, par continuité de exp, on a $\lim\limits_{N\to+\infty} \dfrac{\mathbb{E}(X_N)}{N} = \dfrac{1}{e} \sim 0,37$.
d. On a $Y = 0$ si et seulement s'il reste des boules rouges (il y en a au moins une dans l'urne) à toutes les étapes. Ainsi, $(Y=0) = \bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} (X_n \geqslant 1)$ donc on a bien $(Y=0) \subset \bigcap\limits_{k=1}^{n} (X_k \geqslant 1)$ pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$.
Comme la suite d'évènements $\big((X_k \geqslant 1)\big)_{k\geqslant 1}$ est décroissante car si $X_{k+1} \geqslant 1$, a fortiori, on a $X_k \geqslant 1$, on a $(Y=0) \subset \bigcap\limits_{k=1}^{n} (X_k \geqslant 1) = (X_n \geqslant 1)$. Par croissance de $\mathbb{P}$, il vient $0 \leqslant \mathbb{P}(Y=0) \leqslant \mathbb{P}(X_n \geqslant 1)$ donc, par encadrement, $\mathbb{P}(Y=0) = 0$ en passant à la limite dans cette double inégalité d'après **c.**.

131 **a.** Posons $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & x \end{pmatrix}$, alors $\chi_M = \begin{vmatrix} X-x & -y \\ -z & X-x \end{vmatrix} = (X-x)^2 - yz$. Traitons trois cas :

- Si $yz > 0$, $\chi_M = (X - x - \sqrt{yz})(X - x + \sqrt{yz})$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ donc la matrice M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ d'après le cours.
- Si $yz = 0$, $\chi_M = (X-x)^2$ est scindé sur $\mathbb{R}$ et $M - xI_2 = \begin{pmatrix} 0 & y \\ z & 0 \end{pmatrix}$ donc M est diagonalisable si et seulement si $\dim(E_x(M)) = 2$ car x est valeur propre de M d'ordre de multiplicité 2. D'après la formule du rang, $\dim(E_x(M)) = 2 - \text{rang}\,(M - xI_2)$ donc la matrice M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si $M - xI_2 = 0$ ce qui est équivalent à $y = z = 0$.
- Si $yz < 0$, $\chi_M = (X - x - i\sqrt{-yz})(X - x + i\sqrt{-yz})$ donc χ_M n'est même pas scindé sur $\mathbb{R}$ donc la matrice M n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Ainsi, M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement $yz > 0$ ou $(y = z = 0)$.
b. <u>Projecteur</u> : $M^2 = \begin{pmatrix} x^2+yz & 2xy \\ 2xz & x^2+yz \end{pmatrix}$ donc $M^2 = M \iff (x - x^2 - yz = (2x-1)y = (2x-1)z = 0)$.
Or $(2x-1)y = 0 \iff \left(x = \dfrac{1}{2} \text{ ou } y = 0\right)$ et $(2x-1)z = 0 \iff \left(x = \dfrac{1}{2} \text{ ou } z = 0\right)$, $(x - x^2 = 0 \iff (x = 0$ ou $x = 1)$ et $\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} - yz = 0\right) \iff \left(yz = \dfrac{1}{4}\right)$. Ainsi, on a l'équivalence suivante, juste pour l'aspect projecteur de M : $M^2 = M \iff \left((x = y = z = 0) \text{ ou } (x = 1, y = z = 0) \text{ ou } \left(x = \dfrac{1}{2}, yz = \dfrac{1}{4}\right)\right)$. Il y a donc une infinité de matrices M de F dont l'endomorphisme canoniquement associé est un projecteur.
<u>Projecteur orthogonal</u> : comme la base canonique est une base orthonormale dans $\mathbb{R}^2$ euclidien canonique, M représente un endomorphisme auto-adjoint si et seulement si M est symétrique et $M^T = M \iff y = z$. Or $y^2 = \dfrac{1}{4} \iff y = \pm\dfrac{1}{2}$ et on sait d'après le cours que M représente un projecteur orthogonal si et seulement si l'endomorphisme canoniquement associé est un projecteur auto-adjoint. D'après les deux équivalences précédentes, l'endomorphisme canoniquement associé à M est un projecteur orthogonal si et seulement si $\left((x = y = z = 0) \text{ ou } (x = 1, y = z = 0) \text{ ou } \left(x = y = z = \dfrac{1}{2}\right)\right)$ ou $\left(x = \dfrac{1}{2}, y = z = -\dfrac{1}{2}\right)\Big)$. Il n'y a donc

que quatre telles matrices, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (endomorphisme nul de rang 0), $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (endomorphisme identité de rang 2, $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (projection orthogonale sur la droite $\mathrm{Vect}((1,1))$ de rang 1) et $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ (projection orthogonale sur la droite $\mathrm{Vect}((1,-1))$ de rang 1).

c. Comme $\det(M) = X^2 - YZ$, $(M \in GL_2(\mathbb{R}) \iff (\det(M) \neq 0) \iff (X^2 \neq YZ)$. Or, en étudiant tous les cas, $(X^2 = YZ) = \Big(\bigsqcup_{k=1}^{6}(X = k, Y = k, Z = k)\Big) \sqcup \Big((X = 2, Y = 1, Z = 4) \sqcup (X = 2, Y = 4, Z = 1)\Big)$. On a $\mathbb{P}(X^2 = YZ) = \sum_{k=1}^{6} \mathbb{P}(X = k, Y = k, Z = k) + \mathbb{P}(X = 2, Y = 1, Z = 4) + \mathbb{P}(X = 2, Y = 4, Z = 1)$ par incompatibilité de ces évènements. De plus, comme X, Y, Z sont indépendantes et suivent la loi uniforme sur $[\![1;6]\!]$, on a $\mathbb{P}(X^2 = YZ) = \frac{6}{6^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{6^3} = \frac{8}{216} = \frac{1}{27}$ de sorte que $\mathbb{P}(M \text{ inversible}) = 1 - \mathbb{P}(X^2 = YZ) = \frac{26}{27} \sim 0,96$.

132 **a.** Comme $X(\Omega) = \mathbb{N}$ par hypothèse et que $(X > k) = \bigsqcup_{n=k+1}^{+\infty} (X = n)$, par incompatibilité de cette infinité dénombrable d'évènements et σ-additivité, on a $\mathbb{P}(X > k) = \sum_{n=k+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$. Or on sait d'après le cours que $e^{\lambda} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!}$ donc que $1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$ et on a donc $\mathbb{P}(X > k) = 1 - \sum_{n=0}^{k} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$ (1).

Or la formule de Taylor reste intégral appliquée à la fonction $f = \exp$ entre 0 et λ à l'ordre k donne, puisque $\exp$ est de classe C^{k+1} sur $\mathbb{R}$, $e^{\lambda} = f(\lambda) = \sum_{n=0}^{k} \frac{(\lambda - 0)^n f^{(n)}(0)}{n!} + \int_0^{\lambda} \frac{(\lambda - t)^k f^{(k+1)}(t)}{k!} dt$. Ainsi, comme $\forall n \in [\![0;k]\!]$, $f^{(n)}(0) = 1$, et $\forall t \in [0;\lambda]$, $f^{(k+1)}(t) = e^t \leqslant e^{\lambda}$, par croissance de l'intégrale, on obtient $e^{\lambda} \leqslant \sum_{n=0}^{k} \frac{\lambda^n}{n!} + e^{\lambda}\int_0^{\lambda} \frac{(\lambda - t)^k}{k!} dt = \sum_{n=0}^{k} \frac{\lambda^n}{n!} + e^{\lambda}\Big[\frac{-(\lambda - t)^{k+1}}{(k+1)!}\Big]_0^{\lambda} = \sum_{n=0}^{k} \frac{\lambda^n}{n!} + \frac{e^{\lambda}\lambda^{k+1}}{(k+1)!}$. On multiplie par $e^{-\lambda} > 0$ et $1 - \sum_{n=0}^{k} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} \leqslant \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}$ et, avec (1), cela donne bien $\mathbb{P}(X > k) = 1 - \sum_{n=0}^{k} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} \leqslant \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}$.

b. $N(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $(N > n) = \bigsqcup_{k=0}^{+\infty}\Big((X_0 = k) \cap \bigcap_{i=1}^{n}(X_i \leqslant k)\Big)$ en distinguant selon les valeurs possibles de X_0 puisque $X_0(\Omega) = X(\Omega) = \mathbb{N}$. Par incompatibilité de ces évènements et indépendance de $X_0, \cdots, X_n$, on a donc $\mathbb{P}(N > n) = \sum_{k=0}^{+\infty}\Big(\mathbb{P}(X_0 = k)\prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \leqslant k)\Big)$. Comme $X_0, \cdots, X_n$ suivent la même loi de Poisson, on a $\mathbb{P}(N > n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}\Big(\mathbb{P}(X \leqslant k)\Big)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}\Big(1 - \mathbb{P}(X > k)\Big)^n$.

Comme N est à valeurs dans $\mathbb{N}$, N est d'espérance finie si et seulement si la série $\sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(N > n)$ converge, ce qui revient, grâce à l'expression précédente, à la sommabilité de la famille $\Big(\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}\Big(1 - \mathbb{P}(X > k)\Big)^n\Big)_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$.

Si on avait la sommabilité de cette famille, alors d'après le théorème de Fubini, on aurait la relation $\mathbb{E}(N) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N > n) = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}\Big(1 - \mathbb{P}(X > k)\Big)^n\Big) = \sum_{k=0}^{+\infty}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}\Big(1 - \mathbb{P}(X > k)\Big)^n\Big)$. Comme $\mathbb{P}(X > k) > 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on aurait donc $\mathbb{E}(N) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \times \frac{1}{1 - (1 - \mathbb{P}(X > k))} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!\,\mathbb{P}(X > k)}$.

Mais d'après la question précédente, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!\,\mathbb{P}(X > k)} \geqslant \frac{e^{-\lambda}\lambda^k(k+1)!}{k!\lambda^{k+1}} = (k+1)\frac{e^{-\lambda}}{\lambda}$ ce qui est absurde par comparaison car la série $\sum_{k\geqslant 0}(k+1)\frac{e^{-\lambda}}{\lambda}$ diverge grossièrement. Par conséquent, la variable aléatoire N n'admet pas une espérance finie.

c. Comme $\overline{(N=+\infty)} = \bigsqcup_{n=1}^{+\infty}(N=n)$ et que ces évènements sont incompatibles, par σ-additivité, on a $1-\mathbb{P}(N=+\infty) = \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(N=n)$. Or $(N=n) = \bigsqcup_{k=0}^{+\infty}\Big((X_0=k)\cap\bigcap_{i=1}^{n-1}(X_i\leqslant k)\cap(X_n>k)\Big)$ et, toujours par incompatibilité de ces évènements, indépendance de $X_0,\cdots,X_n$, et comme $X_0,\cdots,X_n$ suivent la même loi que X, $\mathbb{P}(N=n) = \sum_{k=0}^{+\infty}\Big(\mathbb{P}(X_0=k)\Big(\prod_{i=1}^{n-1}\mathbb{P}(X_i\leqslant k)\Big)\mathbb{P}(X_n>k)\Big) = \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k)\,\mathbb{P}(X\leqslant k)^{n-1}\,\mathbb{P}(X>k)$.
Ainsi, $\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(N=n) = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k)\,\mathbb{P}(X\leqslant k)^{n-1}\,\mathbb{P}(X>k) = \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k)\,\mathbb{P}(X>k)\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X\leqslant k)^{n-1}$ avec FUBINI et, comme $\mathbb{P}(X>k)<1$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(N=n) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\mathbb{P}(X=k)\,\mathbb{P}(X>k)}{1-\mathbb{P}(X\leqslant k)} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\mathbb{P}(X=k)\,\mathbb{P}(X>k)}{\mathbb{P}(X>k)}$ d'où $\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(N=n) = \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k) = 1$ car $X(\Omega)=\mathbb{N}$. $\mathbb{P}(N=+\infty)=0$ donc N est presque sûrement finie.

133 **a.** Par définition de $\lceil X\rceil$, on a $X\leqslant Y$ mais on n'a pas $X\leqslant Y-1$ car Y est le plus petit entier k vérifiant $X\leqslant k$ donc $X>Y-1$ et on a la double inégalité, comme pour la partie entière, $X\leqslant Y<X+1$. Comme Y est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, que $Y\leqslant X+1$ alors que $X+1$ admet une espérance finie par hypothèse, par comparaison, Y admet aussi une espérance finie. Comme Y est à valeurs dans $\mathbb{N}$, d'après le cours, $\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(Y>k)$.
De plus, pour $k\in\mathbb{N}$, comme $X\leqslant Y$, on a l'inclusion $(X>k)\subset(Y>k)$. De plus, comme $Y-1\leqslant X$, et que k est un entier, on a $(Y>k)=(Y\geqslant k+1)\subset(X>k)$. Ainsi, par double inclusion, on a $(X>k)=(Y>k)$ ce qui donne $\mathbb{P}(X>k)=\mathbb{P}(Y>k)$. Cependant, $0\leqslant X\leqslant Y$ donc, par croissance de l'espérance, $0\leqslant\mathbb{E}(X)\leqslant\mathbb{E}(Y)$ et on obtient bien $0\leqslant\mathbb{E}(X)\leqslant\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(Y>k) = \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X>k)$.

b. Soit $k\in\mathbb{N}$ fixé et $n\in\mathbb{N}$, par hypothèse on a $0\leqslant X_{n+1}\leqslant X_n$ donc $(X_{n+1}>k)\subset(X_n>k)$. En posant $A_n=(X_n>k)$, la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante et, par théorème de continuité décroissante, si $A=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_n$, on a $\mathbb{P}(A)=\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(A_n)$. Comme $\forall\omega\in\Omega$, $\lim_{n\to+\infty}X_n(\omega)=0$, on a $A=\emptyset$ car pour un $\omega\in\Omega$ fixé, $\exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n\geqslant n_0,\ 0\leqslant X_n\leqslant\varepsilon=k$ donc $\omega\notin A$. Ainsi, on a bien $\forall k\in\mathbb{N}$, $\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(X_n>k)=0$.

c. Pour $k\in\mathbb{N}$, soit $u_k:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ telle que $u_k(x)=\mathbb{P}(X_{\lfloor x\rfloor}>k)$. On pose, pour $x\in\mathbb{R}_+$, $u(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}u_k(x)$.

(H_1) Pour $k\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}_+$, on a $0\leqslant X_{\lfloor x\rfloor}\leqslant X_0$ par hypothèse donc $(X_{\lfloor x\rfloor}>k)\subset(X_0>k)$ et u_k est bornée sur $\mathbb{R}_+$ avec $||u_k||_{\infty,\mathbb{R}_+}\leqslant\mathbb{P}(X_0>k)$. Comme $\sum_{k\geqslant0}\mathbb{P}(X_0>k)$ converge d'après **a.** car X_0 est positive et admet une espérance finie, on a la convergence de la série $\sum_{k\geqslant0}||u_k||_{\infty,\mathbb{R}_+}$ donc la convergence normale de la série de fonctions $\sum_{k\geqslant0}u_k$ vers u sur $\mathbb{R}_+$.

(H_2) Pour tout $k\in\mathbb{N}$, la fonction u_k admet une limite finie en $+\infty$ d'après la question **b.** et on a $\lim_{x\to+\infty}u_k(x)=\lim_{x\to+\infty}\mathbb{P}(X_{\lfloor x\rfloor}>k)=\ell_k=0$.

Par le théorème de double limite, on a donc $\lim_{x\to+\infty}u(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\ell_k=0$ donc, en particulier, $\lim_{n\to+\infty}u(n)=0$ ce qui donne $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X_n>k)=0$. Par encadrement, comme on a $\forall n\in\mathbb{N},\ 0\leqslant\mathbb{E}(X_n)\leqslant\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X_n>k)$ d'après la question **a.**, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}(X_n)=0$ (c'est le théorème de convergence dominée pour les variables aléatoires).

134 **a.** Il est implicitement admis dans l'énoncé qu'une suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ avec $p\in]0;1[$ est telle que toutes les X_n sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$. On pose $X_1=+\infty$ s'il n'existe aucun entier k tel que $S_k=1$ et, dans le cas contraire, $X_1=\mathrm{Min}(\{k\in\mathbb{N}^*\mid S_k=1\})$ qui existe bien car la partie $A=\{k\in\mathbb{N}^*\mid S_k=1\}$ est alors non vide, incluse dans $\mathbb{N}$ et minorée par 0 donc son minimum existe.

On a déjà, par construction, $X_1(\Omega)\subset\mathbb{N}^*\cup\{+\infty\}$ donc $X_1(\Omega)$ est bien un ensemble au plus dénombrable. Pour $k\in\mathbb{N}^*$, $(X_1=k)=\Big(\bigcap\limits_{i=1}^{k-1}(S_i=0)\Big)\cap(S_k=1)$ donc, comme les évènements $(S_i=0)$ et $(S_i=1)$ sont des évènements par hypothèse car les S_i sont des variables aléatoires, par intersection finie d'évènements, on a $(X_1=k)\in\mathcal{A}$. De plus, $(X_1=+\infty)=\bigcap\limits_{k=1}^{+\infty}\overline{(X_1=k)}$ donc, par intersection dénombrable de complémentaires d'évènements, $(X_1=+\infty)\in\mathcal{A}$. Par conséquent, X_1 est une variable aléatoire sur $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$.

b. On sait d'après le cours que X_1 suit la loi géométrique de paramètre p en tant que temps d'attente du premier succès dans une répétition d'expériences de Bernoulli indépendantes de même loi. Ainsi, d'après le cours toujours, on a $\mathbb{E}(X_1)=\dfrac{1}{p}$ et $\mathbb{V}(X_1)=\dfrac{1-p}{p^2}$.

c. Si $k\geqslant n$, $(X_n=k)=\Bigg(\bigsqcup\limits_{1\leqslant i_1<\cdots<i_{n-1}\leqslant k-1}\Bigg(\Big(\bigcap\limits_{j=1}^{n-1}(S_{i_j}=1)\Big)\cap\bigcap\limits_{\substack{m\in[\![1;k-1]\!]\\ m\notin\{i_1,\cdots,i_{n-1}\}}}(S_m=0)\Bigg)\Bigg)\cap(S_k=1)$ car $X_n(\Omega)\subset[\![n;+\infty]\!]$ par construction. En effet, on doit avoir $n-1$ succès entre les étapes 1 et $k-1$ et un dernier succès à l'étape k. Avec les mêmes arguments que précédemment, comme il y a $\dbinom{k-1}{n-1}$ de choisir ces $(k-1)$-uplets $(i_1,\cdots,i_{n-1})$, on a $\mathbb{P}(X_n=k)=\dbinom{k-1}{n-1}p^n(1-p)^{k-n}$ (c'est la loi de Polya).

d. Comme $Y_1,\cdots,Y_n$ sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, sont indépendantes et suivent la même loi que X_1, on a $G_{S_n}=\prod\limits_{k=1}^{n}G_{Y_k}=(G_{X_1})^n$ donc $\forall t\in\Big]-\dfrac{1}{1-p};\dfrac{1}{1-p}\Big[$, $G_{S_n}(t)=\Big(\dfrac{pt}{1-(1-p)t}\Big)^n=p^nt^n\dfrac{1}{(1-(1-p)t)^n}$. Or on sait d'après le cours sur les séries entières que $\forall x\in]-1;1[$, $(1+x)^{-n}=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dbinom{-n}{k}x^k$ avec le calcul $\dbinom{-n}{k}=\dfrac{(-n)(-n-1)\cdots(-n-k+1)}{k!}=\dfrac{(-1)^k(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$ donc, pour $t\in\Big]-\dfrac{1}{1-p};\dfrac{1}{1-p}\Big[$, il vient $G_{S_n}(t)=p^nt^n\dfrac{1}{(1-(1-p)t)^n}=p^nt^n\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}(1-p)^kt^k=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}p^n(1-p)^kt^{k+n}$. Avec le changement d'indice $j=n+k$, on a $G_{S_n}(t)=\sum\limits_{j=n}^{+\infty}\dfrac{(j-1)!}{(n-j)!(n-1)!}p^n(1-p)^{j-n}t^j=\sum\limits_{j=n}^{+\infty}\dbinom{j-1}{n-1}p^n(1-p)^{j-n}t^j$. Comme $G_{S_n}(t)=\sum\limits_{j=n}^{+\infty}\mathbb{P}(S_n=j)t^j$ par définition et que le rayon de convergence est strictement positif, on peut identifier et on a $\forall k\geqslant n$, $\mathbb{P}(S_n=k)=\dbinom{k-1}{n-1}p^n(1-p)^{k-n}$.

Comme on retrouve la loi du n-ième succès comme en question **c.**, on se doute qu'il y a un lien. On écrit $X_n=X_1+\sum\limits_{k=1}^{n-1}(X_{k+1}-X_k)$ et on interprète $X_{k+1}-X_k$ comme le temps d'attente du $(k+1)$-ième succès une fois qu'on a eu le k-ième succès, qui suit donc la même loi géométrique de paramètre p que X_1. En admettant que les variables aléatoires $Y_1=X_1,Y_2=X_2-X_1,\cdots,Y_n=X_n-X_{n-1}$ sont indépendantes, on retrouve le fait que $S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k = X_n$ suit la loi de POLYA (ou loi binomiale négative ou loi de PASCAL).

135 Notons pour toute la suite T_k la variable aléatoire qui est le résultat du tirage d'indice k s'il a lieu. Par construction, $X_n(\Omega) \subset [\![1;n]\!]$ donc X_n est bornée et admet donc une espérance finie. On suppose bien sûr aussi que chaque boule de l'urne a autant de chance d'être tirée à chaque étape.

a. Bien sûr, si $n = 1$, on vide l'urne en un seul tirage de manière certaine donc $X_1 \equiv 1$ et $\mathbb{E}(X_1) = 1$.
Si $n = 2$, $(X_2 = 1) = (T_1 = 1)$ et $(X_2 = 2) = (T_1 = 2, T_2 = 1)$ donc $\mathbb{P}(X_2 = 1) = \mathbb{P}(T_1 = 1) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(X_2 = 2) = \mathbb{P}(T_1 = 2)\,\mathbb{P}(T_2 = 1 \mid T_1 = 2) = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$. Ainsi, par définition, $\mathbb{E}(X_2) = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times 2 = \frac{3}{2}$.

b. Pour $n \geqslant 2$ et $i = 1$, on a $(X_n = 1) = (T_1 = 1)$ donc $\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n}$.

Pour $n \geqslant 2$ et $i \in [\![2;n]\!]$, on a $(X_n = i) = \bigsqcup_{j=2}^{n} (T_1 = j, X_n = i)$. Cette réunion étant disjointe, on a donc $\mathbb{P}(X_n = i) = \sum_{j=2}^{n} \mathbb{P}(T_1 = i)\,\mathbb{P}(X_n = i \mid T_1 = j)$. Or, quand on a tiré la boule j au premier tirage, on enlève les boules numérotées $j, j+1, \cdots, n$ et on se retrouve au point de départ du problème définissant X_{j-1}, une urne contenant les boules numérotées de 1 à $j-1$, avec les mêmes règles, sauf qu'on a déjà effectué un tirage. Ainsi, $\mathbb{P}(X_n = i \mid T_1 = j) = \mathbb{P}(X_{j-1} = i-1)$. Par conséquent, si $n \geqslant 2$ et $i \in [\![2;n]\!]$, $\mathbb{P}(X_n = i) = \frac{1}{n} \sum_{j=2}^{n} \mathbb{P}(X_{j-1} = i-1) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(X_k = i-1)$ en posant $k = j-1$.

Alors, $\mathbb{E}(X_n) = \sum_{i=1}^{n} i\,\mathbb{P}(X_n = i) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \sum_{i=2}^{n} i \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(X_k = i-1) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=2}^{n} i\,\mathbb{P}(X_k = i-1)$ en inversant la somme double. Mais $\mathbb{P}(X_k = i-1) = 0$ dès que $i > k$ donc $\mathbb{E}(X_n) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=2}^{k+1} i\,\mathbb{P}(X_k = i-1)$. Ainsi, $\mathbb{E}(X_n) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=2}^{k+1} (i-1+1)\,\mathbb{P}(X_k = i-1) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \big(1 + \mathbb{E}(X_k)\big)$ car $\mathbb{E}(X_k) = \sum_{i=2}^{k+1} (i-1)\,\mathbb{P}(X_k = i-1)$ et $\mathbb{P}(\Omega) = 1 = \sum_{i=2}^{k+1} \mathbb{P}(X_k = i-1)$. On a donc bien la relation attendue, $\mathbb{E}(X_n) = 1 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}(X_k)$ si $n \geqslant 2$.

c. Méthode 1 : d'après **b.**, on a $\mathbb{E}(X_3) = 1 + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{3}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$. De même, on obtient $\mathbb{E}(X_4) = 1 + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{3}{2} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12}$. Il semble, surtout avec l'aide de la question supplémentaire, que $\mathbb{E}(X_n) = H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$. On a déjà réalisé l'initialisation. Soit $n \geqslant 2$ tel que $\forall k \in [\![1;n-1]\!]$, $E(X_k) = H_k$, d'après **b.**, on a $\mathbb{E}(X_n) = 1 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}(X_k) = 1 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j}$ donc $\mathbb{E}(X_n) = 1 + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j}^{n-1} \frac{1}{j} = 1 + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{n-j}{j} = 1 + \left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j}\right) - \frac{n-1}{n} = H_n$. Par principe de récurrence forte, on a bien $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(X_n) = H_n$ donc $\mathbb{E}(X_n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Méthode 2 : d'après **b.**, pour $n \geqslant 2$, $n\,\mathbb{E}(X_n) = n + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}(X_k)$ et $(n+1)\,\mathbb{E}(X_{n+1}) = (n+1) + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k)$ donc $(n+1)\,\mathbb{E}(X_{n+1}) = 1 + n\,\mathbb{E}(X_n) + \mathbb{E}(X_n) = (n+1)\,\mathbb{E}(X_n) + 1$ d'où $\mathbb{E}(X_{n+1}) - \mathbb{E}(X_n) = \frac{1}{n+1}$. Par télescopage, on a donc $\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_1) + \sum_{k=1}^{n-1} \big(\mathbb{E}(X_{k+1}) - \mathbb{E}(X_k)\big) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = H_n$.

Question supplémentaire : comme $f : t \mapsto \frac{1}{t}$ est continue et décroissante sur $[1;+\infty[$, on a la majoration

$\forall k \in [\![1;n]\!], \int_k^{k+1} f(t)dt = \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant f(k) = \frac{1}{k}$ et $\forall k \in [\![2;n]\!], \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t} \geqslant \frac{1}{k}$. En sommant la première inégalité pour $k \in [\![1;n]\!]$ et par Chasles, on obtient $\int_1^{n+1} \frac{dt}{t} \leqslant H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Si on fait de même pour la seconde pour $k \in [\![2;n]\!]$, on a $\int_1^{n} \frac{dt}{t} \geqslant H_n - 1 = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$. Ainsi, $\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln(n)$. Comme $\ln(n+1) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n) + 1$, par encadrement, on a donc $H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$.

136 **a.** Pour $i \in \mathbb{N}$, $(X = i) = \bigsqcup_{j=0}^{i} (X = i, Y = j)$ (réunion disjointe) donc, par σ-additivité, on a la relation $\mathbb{P}(X = i) = \sum_{j=0}^{i} \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \alpha^j (1-\alpha)^{i-j} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}(\alpha + 1 - \alpha)^i = \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}$ par le binôme de Newton donc X suit la loi de Poisson de paramètre λ.

b. De même, pour $j \in \mathbb{N}$, $(Y = j) = \bigsqcup_{i=j}^{+\infty} (X = i, Y = j)$ (réunion disjointe) donc, par σ-additivité, on a aussi $\mathbb{P}(Y = j) = \sum_{i=j}^{+\infty} \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{e^{-\lambda}\alpha^j\lambda^j}{j!} \sum_{i=j}^{+\infty} \frac{\lambda^{i-j}(1-\alpha)^{i-j}}{(i-j)!} = \frac{e^{-\lambda}\alpha^j\lambda^j}{j!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k(1-\alpha)^k}{k!}$ en posant $k = i - j$. Ainsi, $\mathbb{P}(Y = j) = \frac{e^{-\lambda}\alpha^j\lambda^j}{j!} e^{\lambda(1-\alpha)} = \frac{e^{-\alpha\lambda}(\alpha\lambda)^j}{j!}$ donc Y suit la loi de Poisson de paramètre $\alpha\lambda$.

c. Par hypothèse, $\mathbb{P}(X = 0, Y = 1) = 0$ alors que $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^1}{1!} > 0$ et $\mathbb{P}(Y = 0) = \frac{e^{-\alpha\lambda}(\alpha\lambda)^0}{0!} > 0$ donc $\mathbb{P}(X = 1, Y = 0) \neq \mathbb{P}(X = 1)\,\mathbb{P}(Y = 0)$. Ainsi, X et Y ne sont pas indépendantes.

d. On a $Z(\Omega) \subset \mathbb{Z}$ et, pour $k \in \mathbb{Z}$, comme $(Z = k) = \bigcup_{j=0}^{+\infty} (X = k + j, Y = j)$ (réunion disjointe), par σ-additivité, on a $\mathbb{P}(Z = k) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k + j, Y = j)$. Traitons deux cas :

Si $k < 0$, on a $\mathbb{P}(Z = k) = 0$ car $\forall j \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = k + j, Y = j) = 0$.

Si $k \geqslant 0$, il vient $\mathbb{P}(Z = k) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k+j}\alpha^j(1-\alpha)^k}{j!k!} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k(1-\alpha)^k}{k!} \times \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\lambda^j\alpha^j}{j!}$ et on reconnaît une série exponentielle qui donne $\mathbb{P}(Z = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k(1-\alpha)^k e^{\lambda\alpha}}{k!} = \frac{e^{-\lambda(1-\alpha)}(\lambda(1-\alpha))^k}{k!}$.

Ainsi, Z suit a loi de Poisson de paramètre $\lambda(1-\alpha)$.

e. Pour $(j, k) \in \mathbb{N}^2$, comme $\mathbb{P}(Z = k) > 0$, on a par définition $\mathbb{P}_{(Z=k)}(Y = j) = \frac{\mathbb{P}(Z = k, Y = j)}{\mathbb{P}(Z = k)}$ donc, puisque $X = Y + Z$, $\mathbb{P}_{(Z=k)}(Y = j) = \frac{\mathbb{P}(X = k + j, Y = j)}{\mathbb{P}(Z = k)} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k+j}\alpha^j(1-\alpha)^k k!}{j!k!e^{-\lambda(1-\alpha)}(\lambda(1-\alpha))^k} = \frac{e^{-\alpha\lambda}(\alpha\lambda)^j}{j!}$ avec **d.**.

f. Comme $\forall (j, k) \in \mathbb{N}^2$, $\mathbb{P}_{(Z=k)}(Y = j) = \mathbb{P}(Y = j) = \frac{e^{-\alpha\lambda}(\alpha\lambda)^j}{j!}$avec la question **b.** et qu'on a même $\forall j \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{Z}_-^*,\ \mathbb{P}(Z = k, Y = j) = 0 = \mathbb{P}(Z = k)\,\mathbb{P}(Y = j)$, Y et Z sont indépendantes.

137 **a.** X_A est le temps d'attente du succès (appel concernant le produit A) dans une répétition d'appels indépendants (on le suppose) qui suivent la même loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{5}$ ($\frac{1}{5}$ de probabilité que l'appel concerne le produit A et $1 - p$ qu'il concerne le produit B). D'après le cours, X_A suit la loi géométrique de paramètre p. D'après le cours, on a $\mathbb{E}(X_A) = \frac{1}{p} = 5$ et $\mathbb{V}(X_A) = \frac{1-p}{p^2} = 20$. De même, $X_B \sim \mathcal{G}(1-p)$ donc $\mathbb{E}(X_B) = \frac{1}{1-p} = \frac{5}{4}$ et $\mathbb{V}(X_B) = \frac{1-(1-p)}{(1-p)^2} = \frac{5}{16}$.

b. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note l'évènement $A_k =$ "le k-ième appel concerne le produit A". Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, en suivant l'indication de l'énoncé, on a $(L = n) = (L = n, \overline{A_{n+1}}) \sqcup (L = n, A_{n+1})$ (soit n appels concernant A puis un concernant B ou l'inverse). Par construction, $(L = n, \overline{A_{n+1}}) = (X_B = n+1)$ et $(L = n, A_{n+1}) = (X_A = n+1)$. Comme ces deux évènements sont incompatibles, on obtient la relation $\mathbb{P}(L = n) = \mathbb{P}(X_B = n+1) + \mathbb{P}(X_A = n+1) = p^n(1-p) + (1-p)^n p$ d'après la question **a.**. On en déduit bien $\mathbb{P}(L = n) = (1-p)\,\mathbb{P}(X_A = n) + p\,\mathbb{P}(X_B = n) = 0,8\,\mathbb{P}(X_A = n) + 0,2\,\mathbb{P}(X_B = n)$.

c. Comme $n\,\mathbb{P}(L = n) = (1-p)n\,\mathbb{P}(X_A = n) + pn\,\mathbb{P}(X_B = n)$ et que les deux séries $\sum_{n\geqslant 1} n\,\mathbb{P}(X_A = n)$ et $\sum_{n\geqslant 1} n\,\mathbb{P}(X_B = n)$ puisque X_A et X_B admettent des espérances finies d'après le cours, on en déduit par somme que $\sum_{n\geqslant 1} n\,\mathbb{P}(L = n)$ converge (et absolument car elle est à termes positifs) donc L admet une espérance finie qui vaut $\mathbb{E}(L) = (1-p)\,\mathbb{E}(X_A) + p\,\mathbb{E}(X_B) = \dfrac{1-p}{p} + \dfrac{p}{1-p} = \dfrac{0,8}{0,2} + \dfrac{0,2}{0,8} = \dfrac{21}{5} = 4,25$.

138 **a.** Il s'agit juste de vérifier que pour $\mathbb{P}(X = i) \geqslant 0$ pour tout entier $i \in \mathbb{N}^*$, ce qui est évident, et que $\sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = i) = 1$, ce qui l'est moins.

Méthode 1 : en mode famille sommable, par sommation par paquets, comme on a $\dfrac{i}{2^{i+1}} = \sum_{j=1}^{i} \dfrac{1}{2^{i+1}}$, il vient $\sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = i) = \sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{i} \dfrac{1}{2^{i+1}} = \sum_{1\leqslant j\leqslant i} \dfrac{1}{2^{i+1}} = \sum_{j=1}^{+\infty}\sum_{i=j}^{+\infty} \dfrac{1}{2^{i+1}} = \sum_{j=1}^{+\infty} \dfrac{1}{2^{j+1}} \times \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = \sum_{j=1}^{+\infty} \dfrac{1}{2^j} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1$.

Méthode 2 : soit $f :]-1;1[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$. On peut dériver terme à terme dans l'intervalle ouvert de convergence de cette série entière de rayon de convergence 1 pour avoir la relation $\forall x \in]-1;1[,\ f'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$ donc $x^2 f'(x) = \dfrac{x^2}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n+1}$. En prenant $x = \dfrac{1}{2}$ dans cette relation, on a $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) = \dfrac{1/4}{1/4} = 1$.
Quelle que soit la méthode, la définition de la loi de X est cohérente.

b. En reprenant la fonction f de la question précédente et en dérivant une fois de plus, on obtient la relation $\forall x \in]-1;1[,\ f''(x) = \dfrac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}$ donc $x^3 f''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^{n+1} - \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n+1}$ donc $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^{n+1} = x^3 f''(x) + x^2 f'(x) = \dfrac{2x^3}{(1-x)^3} + \dfrac{x^2}{(1-x)^2}$. En prenant $x = \dfrac{1}{2}$ à nouveau, on arrive à $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\,\mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n^2}{2^{n+1}} = \dfrac{2(1/8)}{1/8} + \dfrac{1/4}{1/4} = 3$.

c. Comme on prélève une boule dans une urne n'ayant des boules numérotées que de 1 à X, la boule tirée à un numéro $Y \in [\![1;X]\!]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1;n]\!]$, on a $\mathbb{P}(X = n, Y = k) = \mathbb{P}(X = n)\,\mathbb{P}_{(X=n)}(Y = k)$ car $\mathbb{P}(X = n) > 0$ et on a $\mathbb{P}_{(X=n)}(Y = k) = \dfrac{1}{n}$ car les n boules de l'urne ont autant de chances d'être prises. Par conséquent, $\mathbb{P}(X = n, Y = k) = \dfrac{\mathbb{P}(X = n)}{n} = \dfrac{1}{2^{n+1}}$. Bien sûr, $\mathbb{P}(X = n, Y = k) = 0$ si $n \in \mathbb{N}^*$ et $k > n$.

d. On a clairement $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et, pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on a $(Y = k) = \bigsqcup_{n=k}^{+\infty} (X = n, Y = k)$ (réunion d'évènements incompatibles) donc, par σ-additivité, on a $\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n, Y = k)$ ce qui donne

$\mathbb{P}(Y=k)=\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2^{k+1}}\times\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^k}$. Ainsi, Y suit la loi géométrique de paramètre $p=\frac{1}{2}$. On sait d'après le cours que $\mathbb{E}(Y)=\frac{1}{p}=2$ et que $\mathbb{V}(Y)=\frac{1-p}{p^2}=2$.

139 **a.** Par construction et comme les cas extrêmes sont "n fois piles" ou "n fois faces" d'un côté et "alternance pile/face" ou "alternance face/pile" de l'autre, on a $N(\Omega)=[\![1;n]\!]$.

b. • Si $P_k=$ "on fait pile au lancer numéro k", on a $(N=1)=\Big(\bigcap_{k=1}^{n}P_k\Big)\sqcup\Big(\bigcap_{k=1}^{n}\overline{P_k}\Big)$. Par incompatibilité de ces deux évènements et indépendance de $P_1,\cdots,P_n$, on a $\mathbb{P}(N=1)=\prod_{k=1}^{n}\mathbb{P}(P_k)+\prod_{k=1}^{n}\mathbb{P}(\overline{P_k})=p^n+(1-p)^n$.

• Avec ces mêmes notations, $(N=2)=\left(\bigcup_{k=1}^{n-1}\Big(\bigcap_{i=1}^{k}P_i\Big)\cap\Big(\bigcap_{i=k+1}^{n}\overline{P_i}\Big)\right)\sqcup\left(\bigcup_{j=1}^{n-1}\Big(\bigcap_{i=1}^{j}\overline{P_i}\Big)\cap\Big(\bigcap_{i=j+1}^{n}P_i\Big)\right)$ et, avec les mêmes arguments, $\mathbb{P}(N=2)=\Big(\sum_{k=1}^{n-1}p^k(1-p)^{n-k}\Big)+\Big(\sum_{j=1}^{n-1}(1-p)^jp^{n-j}\Big)=2\sum_{k=1}^{n-1}p^k(1-p)^{n-k}$ en posant $k=n-j$ dans la seconde somme. Ainsi, $\mathbb{P}(N=2)=2p(1-p)\sum_{m=0}^{n-2}p^m(1-p)^{n-2-m}$ avec $m=k-1$.

- Si $p=\frac{1}{2}$, on a donc $\mathbb{P}(N=2)=\frac{(n-1)}{2^{n-1}}$.
- Si $p\neq\frac{1}{2}$, classiquement, $\mathbb{P}(N=2)=2p(1-p)\frac{p^{n-1}-(1-p)^{n-1}}{p-(1-p)}$.

c. Pour $k\in[\![1;n-1]\!]$, comme $(I_k=1)=\big(P_k\cap\overline{P_{k+1}}\big)\sqcup\big(\overline{P_k}\cap P_{k+1}\big)$, on obtient $\mathbb{P}(I_k)=2p(1-p)$. Puisque I_k ne prend que les valeurs 0 et 1, I_k suit la loi de BERNOULLI de paramètre $2p(1-p)$ avec $\mathbb{E}(I_k)=2p(1-p)$ et $\mathbb{V}(I_k)=2p(1-p)(1-2p(1-p))$.

d. On a une série supplémentaire à chaque changement de pile à face ou de face à pile entre les tirages k et $k+1$ (et on a ce cas si et seulement si $I_k=1$) ce qui donne, en comptant le premier tirage qui amène forcément une première série, $N=1+\sum_{k=1}^{n-1}I_k$.

e. Par linéarité de l'espérance, on a $\mathbb{E}(N)=1+\sum_{k=1}^{n-1}\mathbb{E}(I_k)$. Ainsi, $\mathbb{E}(N)=1+2p(1-p)(n-1)$.

D'après le cours, on a $\mathbb{V}(N)=\mathbb{V}\Big(1+\sum_{k=1}^{n-1}I_k\Big)=\mathbb{V}\Big(\sum_{k=1}^{n-1}I_k\Big)=\sum_{k=1}^{n-1}\mathbb{V}(I_k)+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n-1}\mathrm{Cov}(I_i,I_j)$. Or $\mathrm{Cov}(I_i,I_j)=\mathbb{E}(I_iI_j)-\mathbb{E}(I_i)\mathbb{E}(I_j)$ et la variable aléatoire I_iI_j ne prend que les valeurs 0 et 1 donc suit une loi de BERNOULLI. Traitons deux cas selon la proximité des entiers i et j :

<u>Si $j=i+1$</u> , $(I_iI_j=1)=(I_i=1,I_{i+1}=1)=(P_i\cap\overline{P_{i+1}}\cap P_{i+2})\sqcup(\overline{P_i}\cap P_{i+1}\cap\overline{P_{i+2}})$ donc, avec les mêmes arguments qu'avant, $\mathbb{P}(I_iI_j=1)=p(1-p)p+(1-p)p(1-p)=p(1-p)$ donc $\mathbb{E}(I_iI_j)=p(1-p)$ et $\mathrm{Cov}(I_i,I_j)=p(1-p)-4p^2(1-p)^2=p(1-p)(1-4p(1-p))=p(1-p)(1-2p)^2$.

<u>Si $j>i+1$</u> , comme la variable I_i ne dépend que des lancers i et $i+1$ et I_j ne dépend que des lancers $j>i+1$ et $j+1$, par le lemme des coalitions, I_i et I_j sont indépendantes donc $\mathrm{Cov}(I_i,I_j)=0$.

Ainsi, $\mathbb{V}(N)=\sum_{k=1}^{n-1}\mathbb{V}(I_k)+2\sum_{i=1}^{n-2}\mathrm{Cov}(I_i,I_{i+1})=2p(1-p)(1-2p(1-p))(n-1)+2p(1-p)(1-2p)^2(n-2)$ qu'on peut factoriser en $\mathbb{V}(N)=2p(1-p)\big[(1-2p(1-p))(n-1)+(1-2p)^2(n-2)\big]$ ou écrire encore sous la forme $\mathbb{V}(N)=2p(1-p)(2n-3)-4p^2(1-p)^2(3n-5)$.

140 **a.** Comme $\Omega = \mathbb{N}$ et qu'on a $\mathbb{P}(\Omega) = 1 = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = i)$ par σ-additivité car $\mathbb{N}$ est dénombrable, il vient $\alpha \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{i}{2^i} = 1$. Or on sait que $\forall x \in]-1;1[$, $f(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$ qui donne $f'(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} ix^{i-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ en dérivant terme à terme à l'intérieur de l'intervalle ouvert de cette série entière de rayon de convergence 1, ce qui donne $\sum_{i=0}^{+\infty} ix^i = \frac{x}{(1-x)^2}$ en multipliant par x. Ainsi, $\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{i}{2^i} = \frac{1/2}{(1-(1/2))^2} = 2$ d'où $\alpha = \frac{1}{2}$.

b. Comme $\forall i \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = i) = \frac{i}{2^{i+1}}$, on a $i\,\mathbb{P}(X = i) \underset{+\infty}{\sim} o\left(\frac{1}{i^2}\right)$ par croissances comparées donc X admet une espérance finie par comparaison aux séries de Riemann et $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=0}^{+\infty} i\,\mathbb{P}(X = i) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{i^2}{2^{i+1}}$. On dérive une fois de plus terme à terme la relation $\forall x \in]-1;1[$, $xf'(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} ix^i = \frac{x}{(1-x)^2}$ et on obtient $\forall x \in]-1;1[$, $\frac{1+x}{(1-x)^3} = \sum_{i=1}^{+\infty} i^2x^{i-1}$ donc $\sum_{i=1}^{+\infty} i^2x^{i+1} = \frac{x^2(1+x)}{(1-x)^3}$. En prenant encore $x = \frac{1}{2}$, on a $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} i\,\mathbb{P}(X = i) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{i^2}{2^{i+1}} = \frac{(1/4)(3/2)}{1/8} = 3$.

c. Comme $i^2\,\mathbb{P}(X = i) \underset{+\infty}{\sim} o\left(\frac{1}{i^2}\right)$ par croissances comparées, X admet un moment d'ordre 2 et, par la formule de König-Huygens, $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2$. Or, par la formule de transfert, on a $\mathbb{E}(X(X-1)) = \sum_{i=0}^{+\infty} i(i-1)\,\mathbb{P}(X = i) = \sum_{i=2}^{+\infty} \frac{i^2(i-1)}{2^{i+1}}$. On peut dériver une fois de plus la relation $\forall x \in]-1;1[$, $\sum_{i=1}^{+\infty} i^2x^{i-1} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$ dans l'intervalle ouvert $]-1;1[$ de convergence pour avoir $\forall x \in]-1;1[$, $\sum_{i=2}^{+\infty} i^2(i-1)x^{i-2} = \frac{2(2+x)}{(1-x)^4}$ donc $\forall x \in]-1;1[$, $\sum_{i=2}^{+\infty} i^2(i-1)x^{i+1} = \frac{2(2+x)x^3}{(1-x)^4}$. On prend toujours $x = \frac{1}{2}$ pour avoir $\mathbb{E}(X(X-1)) = \frac{2(5/2)(1/8)}{1/16} = 10$. Ainsi, $\mathbb{V}(X) = 10 + 3 - 9 = 4$.

ORAUX 2024 THÈME 9 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ET CALCUL DIFFÉRENTIEL

141 **a.** Soit $(a, b, \alpha, \beta) \in \mathbb{C}^4$ et $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ (on aurait aussi pu considérer les fonctions à valeurs complexes) définie par $f(x) = ax^\alpha + bx^\beta$. Alors, $\forall x > 0,\ f(x) - f'(1/x) = ax^\alpha + bx^\beta - (a\alpha x^{1-\alpha} + b\beta x^{1-\beta})$. Si on suppose que la fonction f est une solution réelle de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et qu'on impose $\alpha = 1 - \beta$, on obtient $\forall x > 0,\ f(x) - f'(1/x) = (a - b\beta)x^\alpha + (b - a\alpha)x^\beta = 0$. Pour que le système $\begin{cases} +a - b\beta &= 0 \\ -a\alpha + b &= 0 \end{cases}$ n'ait pas comme seule solution $a = b = 0$, on doit avoir $1 - \alpha\beta = 0$ (déterminant nul du système). Cela donne $1 - \alpha(1-\alpha) = 1 - \alpha + \alpha^2 = 0$ ce qui donne classiquement (à l'ordre près) $\alpha = -j^2 = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\beta = -j = \overline{\alpha} = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. On a donc $\forall x > 0,\ f(x) = ae^{\alpha \ln(x)} + be^{\beta \ln(x)}$, ce qui se décompose en :

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\,(f(x)) &= \sqrt{x}\,\Big((\mathrm{Re}\,(a) + \mathrm{Re}\,(b))\cos\big(\tfrac{\sqrt{3}\ln(x)}{2}\big) + (\mathrm{Im}\,(b) - \mathrm{Im}\,(a))\sin\big(\tfrac{\sqrt{3}\ln(x)}{2}\big)\Big), \\ \mathrm{Im}\,(f(x)) &= \sqrt{x}\,\Big((\mathrm{Re}\,(a) - \mathrm{Re}\,(b))\sin\big(\tfrac{\sqrt{3}\ln(x)}{2}\big) + (\mathrm{Im}\,(a) + \mathrm{Im}\,(b))\cos\big(\tfrac{\sqrt{3}\ln(x)}{2}\big)\Big). \end{aligned}$$

Mais comme on a pris f à valeurs réelles, ceci implique la condition $\mathrm{Re}\,(a) - \mathrm{Re}\,(b) = \mathrm{Im}\,(a) + \mathrm{Im}\,(b) = 0$ car les fonctions $x \mapsto \sin\big(\frac{\sqrt{3}\ln(x)}{2}\big)$ et $x \mapsto \cos\big(\frac{\sqrt{3}\ln(x)}{2}\big)$ forment une famille libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, c'est-à-dire $b = \overline{a}$ comme on pouvait s'y attendre. On résout alors le système $\begin{cases} +a - \overline{a}\,\overline{\alpha} &= 0 \\ -a\alpha + \overline{a} &= 0 \end{cases}$ qui a par exemple comme solution non nulle $a = e^{-i\pi/6}$, $b = e^{i\pi/6}$ si on impose en plus $|a| = 1$ qui s'écrit aussi $\overline{a} = \dfrac{1}{a}$. La fonction $f_0 : x \mapsto e^{-i\pi/6}x^{1/2+i\sqrt{3}/2} + e^{i\pi/6}x^{1/2-i\sqrt{3}/2}$ est donc solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs réelles. Elle s'écrit aussi, $f_0 : x \mapsto 2\sqrt{x}\ \cos\Big(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ln(x) - \dfrac{\pi}{6}\Big)$.

b. La fonction nulle est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$. Si $(f, g) \in S^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda f + g$ est dérivable de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ et on a $\forall x > 0,\ (\lambda f + g)'(1/x) = \lambda f'(1/x) + g'(1/x) = \lambda f(x) + g(x) = (\lambda f + g)(x)$ par hypothèse donc $\lambda f + g \in S$. On vient d'établir que S est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions dérivables de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ donc que S est lui-même un espace vectoriel.

c. Si $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est solution de (E), comme $\forall x > 0,\ f'(x) = f(1/x)\ \ (1)$ et que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, en dérivant (1), on obtient $\forall x > 0,\ f''(x) = -\dfrac{f'(1/x)}{x^2} = -\dfrac{f(x)}{x^2}$. Ainsi, f est aussi solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle linéaire homogène du second ordre $(E')\ :\ x^2y'' + y = 0$. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une autre solution de (E), alors f et f_0 sont solutions de (E') sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, par linéarité de (E'), la fonction $g = f - \dfrac{f(1)}{\sqrt{3}}f_0$ est aussi solution de (E'). De plus, $g(1) = f(1) - \dfrac{f(1)f_0(1)}{\sqrt{3}} = 0$ car $f_0(1) = 2\cos\big(\dfrac{\pi}{6}\big) = \sqrt{3}$. Mais comme f et f_0 sont solutions de (E), on a aussi $g'(1/x) = f'(1/x) - \dfrac{f(1)}{\sqrt{3}}f_0'(1/x) = f(x) - \dfrac{f(1)}{\sqrt{3}}f_0(x) = g(x)$ donc $g'(1) = g(1) = 0$. Par l'unicité au problème de CAUCHY, il existe une unique solution y de (E) sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ telle que

$y(1) = y'(1) = 0$, et il s'agit de la fonction nulle. Ainsi, $g = 0$ donc $f = \dfrac{f(1)}{\sqrt{3}} f_0$. On vient de montrer que $S \subset \mathrm{Vect}(f_0)$ et on a vu en **a.**, par linéarité de (E), que $\mathrm{Vect}(f_0) \subset S$. Par double inclusion, $S = \mathrm{Vect}(f_0)$.

142 **a.** Pour $f \in E$ et $(x, y) \in [0;1]^2$, $t \mapsto \dfrac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)$ est continue sur le segment $[0;y]$ donc $F(x,y)$ existe. Soit $y \in [0;1]$ fixé et $h_y : [0;1] \times [0;y] \to \mathbb{R}$ définie par $h(x,t) = \dfrac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)$ de sorte que $F_n(x,y) = \displaystyle\int_0^y h(x,t)dt$.

- (H_1) Pour $t \in [0;y]$, la fonction $x \mapsto h_y(x,t)$ est polynomiale donc de classe C^1 sur $[0;1]$.
- (H_2) Pour $x \in [0;1]$, la fonction $t \mapsto h_y(x,t)$ est continue donc intégrable sur le segment $[0;y]$ et $t \mapsto \dfrac{\partial h_y}{\partial x}(x,t) = 0$ si $n = 1$ ou $t \mapsto \dfrac{\partial h_y}{\partial x}(x,t) = \dfrac{(x-t)^{n-2}}{(n-2)!} f(t)$ si $n \geqslant 2$ est continue sur $[0;y]$.
- (H_3) Pour $(x,t) \in [0;1] \times [0;y]$, $\left|\dfrac{\partial h_y}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant ||f||_{\infty,[0;1]}$ grâce à l'expression précédente et $t \mapsto ||f||_{\infty,[0;1]}$ est intégrable sur $[0;y]$ (même si $n = 1$).

Ainsi, par dérivation sous le signe somme, la fonction $x \mapsto F(x,y)$ est de classe C^1 sur $[0;1]$ et $\dfrac{\partial F_n}{\partial x}(x,y) = 0$ si $n = 1$ ou $\dfrac{\partial F_n}{\partial x}(x,y) = \displaystyle\int_0^y \dfrac{(x-t)^{n-2}}{(n-2)!} f(t)dt = F_{n-1}(x,y)$ si $n \geqslant 2$.

De plus, pour $x \in [0;1]$ fixé, la fonction $g_x : t \mapsto \dfrac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)$ étant continue sur l'intervalle $[0;1]$, d'après le théorème fondamental de l'intégration, $y \mapsto F_n(x,y)$ est la primitive de g_x qui s'annule en 0 donc elle est de classe C^1 sur $[0;1]$ et $\dfrac{\partial F_n}{\partial y}(x,y) = \dfrac{(x-y)^{n-1}}{(n-1)!} f(y)$.

143

144 $(\Longrightarrow)$ Supposons f convexe, ce qui signifie que $\forall (u,v) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $\forall t \in [0;1]$, $f((1-t)u + tv) \leqslant (1-t)f(u) + tf(v)$. Soit $(u,v) \in (\mathbb{R}^n)^2$ avec $u = (u_1, \cdots, u_n)$ et $v = (v_1, \cdots, v_n)$ et considérons la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(t) = f(u + t(v-u))$ de sorte que $\forall t \in [0;1]$, $g(t) \leqslant (1-t)g(0) + tg(1)$. La fonction g est de classe C^1 par composition car f et $t \mapsto u + t(v-u)$ le sont. De plus, par la règle de la chaîne, on a $\forall t \in \mathbb{R}$, $g'(t) = (v_1 - u_1)\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(u + t(v-u)) + \cdots + (v_n - u_n)\dfrac{\partial f}{\partial x_n}(u + t(v-u))$. En particulier, pour $t = 0$, on a $g'(0) = (v_1 - u_1)\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(u) + \cdots + (v_n - u_n)\dfrac{\partial f}{\partial x_n}(u) = (\nabla(f)(u)|v-u) = (\nabla(f)(u))^T(v-u)$.

Pour $t \in]0;1]$, comme $g(t) \leqslant (1-t)g(0) + tg(1) \Longleftrightarrow \dfrac{g(t) - g(0)}{t - 0} \leqslant g(1) - g(0)$, en passant à la limite quand t tend vers 0^+, on obtient l'inégalité large $g'(0) \leqslant g(1) - g(0)$, ou encore $(\nabla(f)(u))^T(v-u) \leqslant f(v) - f(u)$.

$(\Longleftarrow)$ Supposons que $\forall (u,v) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $f(v) \geqslant f(u) + (\nabla(f)(u))^T(v-u)$ et prenons $(u,v) \in (\mathbb{R}^n)^2$ et $t \in [0;1]$.

145

146 **a.** D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, comme les fonctions $x \mapsto 2x$ et $x \mapsto 1$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et que (E) est normalisée, il existe une unique solution f de ce problème de Cauchy (E) et cette fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ en entier. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = -f(-x)$, alors g est dérivable par opérations car f l'est et on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = f'(-x)$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = f'(-x) = 2(-x)f(-x) + 1 = 2g(x) + 1$ avec $g(0) = f(-0) = 0$ car f est solution de (E). Comme f et g sont solutions de (E), par l'unicité précédente, on a $f = g$ donc f est impaire.

b. Analyse : supposons f développable en série entière sur $\mathbb{R}$, comme f est impaire, il existe $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}$ et, en dérivant terme à terme (l 'intervalle ouvert de convergence est ici $\mathbb{R}$), $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)a_n x^{2n}$. Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)a_n x^{2n} = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^{2n}$. On peut identifier par unicité des coefficients d'un développement en série entière (ici $R = +\infty$) et avoir $a_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \dfrac{2}{2n+1}a_{n-1}$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \Big(\prod_{k=1}^{n} \dfrac{2}{2k+1}\Big)a_0 = \prod_{k=1}^{n} \dfrac{4k}{(2k+1)(2k)} = \dfrac{4^n.n!}{(2n+1)!}$ par télescopage multiplicatif et on a $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{4^n.n!}{(2n+1)!}x^{2n+1}$.

<u>Synthèse</u> : Soit $a_n = \dfrac{4^n.n!}{(2n+1)!}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Pour $x \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{a_{n+1}x^{2n+3}}{a_n x^{2n+1}} = \dfrac{4(n+1)}{(2n+3)(2n+2)}x^2 \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x^2}{n}$ donc $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}x^{2n+3}}{a_n x^{2n+1}} = 0 < 1$ et le critère de D'ALEMBERT montre que la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^{2n+1}$ converge absolument. Ainsi, le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^{2n+1}$ vaut $+\infty$. Soit la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{4^n.n!}{(2n+1)!}x^{2n+1}$. On a $h'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)a_n x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{4^n.n!}{(2n)!}x^{2n}$ et $2xh(x) = 2\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^{2n} = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{4^{n-1}.(n-1)!}{(2n-1)!}x^{2n}$ donc $h = f$ d'après l'unicité de la question **a.** car $h'(x) - 2xh(x) = \dfrac{4^0.0!}{(2.0)!} + \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\dfrac{4^n.n!}{(2n)!} - \dfrac{2.4^{n-1}.(n-1)!}{(2n-1)!}\Big)x^{2n} = 1$ et $h(0) = 0$.

Par analyse-synthèse, f est bien développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et on a $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{4^n.n!}{(2n+1)!}x^{2n+1}$.

c. Les solutions réelles sur $\mathbb{R}$ de l'équation homogène $(E)\ :\ y' = 2xy$ sont les fonctions $y : x \mapsto \lambda e^{x^2}$. En écrivant $y : x \mapsto \lambda(x)e^{x^2}$ avec $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable, y est solution de $(E)\ :\ y' = 2xy + 1$ si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x)e^{x^2} + 2x\lambda(x)e^{x^2} = 2x\lambda(x)e^{x^2} + 1$ ce qui donne, après simplification habituelle des $\lambda(x)$, $\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x) = e^{-x^2}$ donc $\lambda(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt + \alpha$ avec $\alpha = \lambda(0) \in \mathbb{R}$. Ainsi, les solutions de $(E)\ :\ y' = 2xy + 1$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $y : x \mapsto \alpha e^{x^2} + e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$. Comme $f(0) = 0$, on a $\alpha = 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$. On sait que $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2n}}{n!}$ et que, puisque $x \mapsto \int_0^x e^{-t^2}dt$ est la primitive de $t \mapsto e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n t^{2n}}{n!}$ qui s'annule en 0, on a $\forall x \in \mathbb{R},\ \int_0^x e^{-t^2}dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1).n!}$. Comme les rayons de convergence de ces deux dernières séries entières sont égaux à $+\infty$, par produit de CAUCHY, on a $f(x) = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2n}}{n!}\Big) \times \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)}\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{(n-k)!k!(2k+1)}\Big)x^{2n+1}$. Par unicité du développement en série entière, on a donc $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{4^n.n!}{(2n+1)!} = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{(n-k)!k!(2k+1)}$.

Par exemple, pour $n = 2$, on a $\dfrac{16 \times 2}{120} = \dfrac{4}{15} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{10}$.

$\boxed{\textbf{147}}$ **a.** La fonction $h : u \mapsto \dfrac{1}{u^2+u+1}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$ par comparaison aux intégrales de RIEMANN car $u^2 + u + 1 = \Big(u + \dfrac{1}{2}\Big)^2 + \dfrac{3}{4} > 0$ et $h(u) \underset{\pm\infty}{\sim} \dfrac{1}{u^2}$. Ainsi, $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{du}{u^2+u+1}$ existe. De plus, classiquement, $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{du}{\Big(u+\dfrac{1}{2}\Big)^2 + \dfrac{3}{4}} = \dfrac{4}{3}\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{du}{1 + \Big(\dfrac{2u+1}{\sqrt{3}}\Big)^2} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{\dfrac{2du}{\sqrt{3}}}{1 + \Big(\dfrac{2u+1}{\sqrt{3}}\Big)^2}$ ce qui montre que $I = \Big[\dfrac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Arctan}\Big(\dfrac{2u+1}{\sqrt{3}}\Big)\Big]_{-\infty}^{+\infty} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\Big(\dfrac{\pi}{2} - \Big(-\dfrac{\pi}{2}\Big)\Big) = \dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

b. Comme $\forall x \in I,\ \dfrac{f'(x)}{f(x)^2 + f(x) + 1} = 1$, en intégrant cette égalité sur un segment $[a;b] \subset I$, on a

$\displaystyle\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)^2+f(x)+1}dx = \int_a^b dx = b-a$. Or f est dérivable sur I par hypothèse et même de classe C^1 sur I car $f' = f^2+f+1$ est continue sur I. Par le changement de variable $u = f(x)$, comme f est une bijection strictement croissante et de classe C^1 de $[a;b]$ dans $[f(a);f(b)]$ (inutile ici car on est sur un segment), on a $\displaystyle\int_{f(a)}^{f(b)} \frac{du}{u^2+u+1} = b-a$ ce qui montre avec la question précédente que $\displaystyle b-a \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{u^2+u+1} < \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$. Ceci montre bien que I est borné et on peut même affirmer que sa longueur est inférieure ou égale à $\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

c. Soit $x_0 \in I$ et $x \in I$, on a comme en **a.** et **b.** $\displaystyle\int_{x_0}^x \frac{f'(t)}{f(t)^2+f(t)+1}dt = \int_{x_0}^x dt = x-x_0$ mais aussi, en posant $u = f(t)$ comme avant, $\displaystyle\int_{x_0}^x \frac{f'(t)}{f(t)^2+f(t)+1}dt = \int_{f(x_0)}^{f(x)} \frac{du}{u^2+u+1} = \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{2u+1}{\sqrt{3}}\right)\right]_{f(x_0)}^{f(x)}$ et on obtient $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{2f(x)+1}{\sqrt{3}}\right) - \dfrac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{2f(x_0)+1}{\sqrt{3}}\right) = x-x_0$. Comme $\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{2f(x)+1}{\sqrt{3}}\right) \in \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$, on obtient $I \subset \left] -\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}+x_0-m_0; \dfrac{\pi}{\sqrt{3}}+x_0-m_0\right[= J$ avec $m_0 = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{2f(x_0)+1}{\sqrt{3}}\right)$ et, pour $x \in J$, comme $\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{2f(x)+1}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}(x-x_0+m_0)$, on a $\dfrac{2f(x)+1}{\sqrt{3}} = \tan\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}(x-x_0+m_0)\right)$ ce qui donne l'expression de la fonction f, $\forall x \in J,\ f(x) = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3}\tan\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}(x-x_0+m_0)\right)-1\right)$.

Par exemple, si $x_0 = f(x_0) = 0$, l'unique solution maximale de $(E)\ :\ y' = y^2+y+1$ qui s'annule en 0 est $f : J = \left]-\dfrac{4\pi}{3\sqrt{3}}; \dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}\right[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3}\tan\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+\dfrac{\pi}{6}\right)-1\right)$ qui se transforme par trigonométrie en

$$f(x) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$$

donc en $f(x) = \dfrac{\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)}{\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)}$.

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est solution de (E), posons $g : J+a \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x-a)$, alors $\forall x \in J+a,\ x-a \in I$ donc $f'(x-a) = f(x-a)^2+f(x-a)+1 = g'(x) = g(x)^2+g(x)+1$ donc g est solution de (E) sur $J+a$. Les graphes des solutions de (E) se déduisent donc toutes de celle explicitée ci-dessus par translation de $(a,0)$.

148 Avec un dessin en dimension 1, on se rend compte que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 admet un minimum local en x_0, alors $f''(x_0) \geqslant 0$. On s'attend donc à avoir $\Delta f(x_0,y_0) \geqslant 0$ en généralisant !

<u>Méthode 1</u> : on peut écrire la relation $\mathrm{Tr}\ (H_f(x_0,y_0)) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) = \Delta f(x_0,y_0)$ si on pose $H_f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$ la hessienne de f en (x_0,y_0). Si $H_f(x_0,y_0)$ est définie positive, alors ses deux valeurs propres λ_1, λ_2 sont strictement positives par définition. Comme $\mathrm{Tr}\ (H_f(x_0,y_0))$ est la somme de ces valeurs propres, on a $\Delta f(x_0,y_0) > 0$. Le problème est que f peut admettre un minimum local en (x_0,y_0) sans que $H_f(x_0,y_0)$ soit définie positive. Raisonnons par l'absurde et supposons que $\Delta f(x_0,y_0)$, alors $\mathrm{Tr}\ (H_f(x_0,y_0)) = \lambda_1+\lambda_2 < 0$ donc, par exemple, $\lambda_1 < 0$. Soit un vecteur propre unitaire v_1 de

$H_f(x_0, y_0)$ associé à λ_1. Comme on connaît le développement limité d'ordre 2 de f au voisinage de (x_0, y_0) qui est $f((x_0+y_0)+v) \underset{v\to(0,0)}{=} f(x_0,y_0) + (\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x_0,y_0)|v) + \dfrac{v^T H_f(x_0,y_0)v}{2} + o(||v||^2)$. Comme f admet en (x_0, y_0) et que $\mathbb{R}^2$ est un ouvert, $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x_0,y_0) = (0,0)$. En restreignant le développement à $v = tv_1$, on a $f((x_0+y_0)+tv_1) \underset{t\to 0}{=} f(x_0,y_0) + \dfrac{t^2 v_1^T H_f(x_0,y_0)v_1}{2} + o(t^2)$. Or $H_f(x_0,y_0)v_1 = \lambda_1 v_1$ et λ_1 est unitaire donc $f((x_0+y_0)+tv_1) \underset{t\to 0}{=} f(x_0,y_0) + \dfrac{\lambda_1 t^2}{2} + o(t^2)$ ce qui montre que $\dfrac{f((x_0,y_0)+tv_1) - f(x_0,y_0)}{t^2} \underset{0}{\sim} \dfrac{\lambda_1}{2}$ ce qui contredit la minimalité locale de f au voisinage de (x_0, y_0).

Méthode 2 : soit les deux fonctions $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par $f_1(x) = f(x, y_0)$ et $f_2(y) = f(x_0, y)$. Puisque f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, f_1 et f_2 sont aussi de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ par composition avec les fonctions $\varphi_1 : x \mapsto (x, y_0)$ et $\varphi_2 : y \mapsto (x_0, y)$ car $f_1 = f \circ \varphi_1$ et $f_2 = f \circ \varphi_2$. De plus, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f_1'(x) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y_0)$, $f_1''(x) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y_0)$ et $f_2'(y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y)$, $f_2''(y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y)$. Puisque $\mathbb{R}^2$ est un ouvert et que f admet en (x_0, y_0) un minimum local, d'après le cours, $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x_0,y_0) = (0,0)$ donc $f_1'(x_0) = f_2'(y_0) = 0$.

Comme f_1 et f_2 sont de classe C^2, elles admettent en tout point un développement limité d'ordre 2 par le théorème de Taylor-Young. Notamment, $f_1(x) \underset{x\to x_0}{=} f_1(x_0) + (x-x_0)f_1'(x_0) + \dfrac{(x-x_0)^2}{2} f_1''(x_0) + o\big((x-x_0)^2\big)$ et $f_2(x) \underset{y\to y_0}{=} f_2(y_0) + (y-y_0)f_2'(y_0) + \dfrac{(y-y_0)^2}{2} f_2''(y_0) + o\big((y-y_0)^2\big)$. Comme on a localement les minorations $f(x,y_0) - f(x_0,y_0) \geqslant 0$ et $f(x_0,y) - f(x_0,y_0) \geqslant 0$ quand x est proche de x_0 et y proche de y_0, cela donne localement $f_1(x) - f_1(x_0) \geqslant 0$ et $f_2(y) - f_2(y_0) \geqslant 0$. Comme $f_1(x) - f_1(x_0) \underset{x\to x_0}{=} \dfrac{(x-x_0)^2}{2} f_1''(x_0) + o\big((x-x_0)^2\big)$ et $f_2(x) - f_2(x_0) \underset{y\to y_0}{=} \dfrac{(y-y_0)^2}{2} f_2''(y_0) + o\big((y-y_0)^2\big)$, les signes précédents imposent que $f_1''(x_0) \geqslant 0$ et $f_2''(y_0) \geqslant 0$, sinon, par exemple $\dfrac{f_1(x) - f_1(x_0)}{(x-x_0)^2} \underset{x\to x_0}{\sim} \dfrac{f_1''(x_0)}{2} < 0$ si on avait $f_1''(x_0) < 0$ ce qui est absurde.

Par conséquent, $\Delta f(x_0,y_0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) = f_1''(x_0) + f_2''(y_0) \geqslant 0$.

149 **a.** La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$ par opérations car les fonctions polynomiales $(x_1, \cdots, x_n) \mapsto \sum\limits_{k=1}^n x_k$ et $(x_1, \cdots, x_n) \mapsto \sum\limits_{k=1}^n x_k^2$ et même $\exp$ sont de classe C^1. Pour $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on calcule le gradient $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x_1, \cdots, x_n) = \exp\Big(-\sum\limits_{k=1}^n x_k^2\Big)\Big(1 - 2x_1 \sum\limits_{k=1}^n x_k, \cdots, 1 - 2x_n \sum\limits_{k=1}^n x_k\Big)$.

Analyse : si $(x_1, \cdots, x_n)$ est un point critique de f, alors $\forall j \in [\![1;n]\!]$, $1 - 2x_j \sum\limits_{k=1}^n x_k = 0$ donc $x_j \neq 0$ et $\sum\limits_{k=1}^n x_k = \dfrac{1}{2x_j}$ donc $x_1 = \cdots = x_n = \lambda$ et en reportant dans les équations, $1 - 2\lambda(n\lambda) = 0$ donc $\lambda = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2n}}$.

Synthèse : réciproquement, si $(x_1, \cdots, x_n) = \pm\Big(\dfrac{1}{\sqrt{2n}}, \cdots, \dfrac{1}{\sqrt{2n}}\Big)$, comme $\sum\limits_{k=1}^n x_k = \pm n \times \dfrac{1}{\sqrt{2n}} = \pm\sqrt{\dfrac{n}{2}}$ et $\sum\limits_{k=1}^n x_k^2 = n \times \dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{2}$, on a $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x_1, \cdots, x_n) = \exp\Big(-\dfrac{1}{2}\Big)\Big(1 - \dfrac{2}{\sqrt{2n}}\sqrt{\dfrac{n}{2}}, \cdots, 1 - \dfrac{2}{\sqrt{2n}}\sqrt{\dfrac{n}{2}}\Big) = (0, \cdots, 0)$.

Ainsi, il y a deux points critiques de f sur $\mathbb{R}^n$ qui sont $a_n = \Big(\dfrac{1}{\sqrt{2n}}, \cdots, \dfrac{1}{\sqrt{2n}}\Big)$ et $-a_n$.

b. De même, la fonction f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$ et, pour tout $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et tout $j \in [\![1;n]\!]$, on calcule $\dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_j}^2}(x_1, \cdots, x_n) = \Big(-2x_j - 2\sum\limits_{k=1}^n x_k - 2x_j\Big(1 - 2x_j \sum\limits_{k=1}^n x_k\Big)\Big)\exp\Big(-\sum\limits_{k=1}^n x_k^2\Big)$ ce qui montre que

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_j}^2}(a_n) = \left(-2\dfrac{1}{\sqrt{2n}} - 2\sqrt{\dfrac{n}{2}} - 2\dfrac{1}{\sqrt{2n}}\left(1 - 2\dfrac{1}{\sqrt{2n}}\sqrt{\dfrac{n}{2}}\right)\right)e^{-1/2} = -(n+1)\sqrt{\dfrac{2}{en}}$. Si $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ avec $i \neq j$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_1,\cdots,x_n) = \left(-2x_j - 2x_i\left(1 - 2x_j \sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)\right)\exp\left(-\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2\right) = \left(-2x_i - 2x_j + 4x_ix_j \sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)\exp\left(-\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2\right)$ donc $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a_n) = \left(-4\dfrac{1}{\sqrt{2n}} + \dfrac{4}{2n}\sqrt{\dfrac{n}{2}}\right)e^{-1/2} = -\sqrt{\dfrac{2}{en}}$. Ainsi, la matrice hessienne de f en a_n vaut $H = -\sqrt{\dfrac{2}{en}}\begin{pmatrix} n+1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & n+1 \end{pmatrix}$. Soit la matrice symétrique réelle $M = \begin{pmatrix} n+1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & n+1 \end{pmatrix}$, $M - nI_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 1, d'après la formule du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(M - nI_n)) = n-1$ donc n est une valeur propre de M d'ordre de multiplicité supérieure à $n-1$. De plus, en notant $v = (1,\cdots,1)$, on a $Mv = 2nv$ avec $v \neq 0$ donc $2n \in \mathrm{Sp}(M)$ de sorte que $\mathrm{Sp}(M) = \{n, 2n\} \subset \mathbb{R}_+^*$ (avec $\chi_M = (X-n)^{n-1}(X-2n)$). Ainsi, M est symétrique définie positive donc H est symétrique définie négative ce qui montre que f admet en a_n un maximum local.

c. Comme $f(-x_1,\cdots,-x_n) = -f(x_1,\cdots,x_n)$, puisque f admet en a_n un minimum local, la fonction f admet un maximum local en $-a_n$ car si $\forall x \in B(a_n, r),\ f(x) \geqslant f(a_n)$, alors $\forall -x \in B(-a_n, r),\ f(-x) \leqslant f(-a_n)$.

d. Pour $x = (x_1,\cdots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, $|f(x)| \leqslant \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|\right)\exp\left(-\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2\right)$ et on sait que $||x||_1 \leqslant \sqrt{n}||x||_2$ (par Cauchy-Schwarz) donc $|f(x)| \leqslant g(||x||_2)$ avec $g : r \mapsto \sqrt{n} r e^{-r^2}$. Comme $\lim\limits_{r\to+\infty} g(r)$ par croissances comparées, on a bien $\lim\limits_{||x||_2\to+\infty} f(x) = 0$ par encadrement.

e. Posons $\alpha_n = f(a_n) > 0$, il existe $r_n > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ ||x||_2 \geqslant r_n \Longrightarrow |f(x)| \leqslant \dfrac{\alpha_n}{2}$ d'après la question précédente. La fonction f étant continue sur le fermé borné $K_n = B_f(0, r_n)$, comme on est en dimension finie, d'après le théorème des bornes atteintes, f admet un maximum absolu sur K_n. Comme f est inférieure à $\dfrac{\alpha_n}{2}$ sur la frontière de K_n et que $f(a_n) = \alpha_n > \dfrac{\alpha_n}{2}$, le maximum de f sur K_n est atteint dans l'intérieur de K_n, c'est-à-dire dans l'ouvert $\overset{\circ}{K_n} = B(0, r_n)$ donc en un point critique, donc en a_n ou en $-a_n$ avec les calculs de la question **a.**. Mais $f(a_n) > 0$ et $f(-a_n) < 0$ donc $m_n = \underset{K_n}{\mathrm{Max}}(f) = f(a_n)$.

Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on a deux possibilités :

- Si $x \in K_n$, alors $f(x) \leqslant m_n = f(a_n)$.
- Si $x \notin K_n$, alors $f(x) \leqslant \dfrac{\alpha_n}{2} \leqslant f(a_n)$.

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) \leqslant f(a_n) = m_n$ donc $\underset{x\in\mathbb{R}^n}{\mathrm{Max}}\, f(x) = f(a_n)$ et f admet bien en a_n un maximum absolu.

150 **a.** Γ est une parabole dont l'axe de symétrie est la droite d'équation (Ox) et le sommet $S = (0,0)$.

b. Pour $t \in \mathbb{R}$, le point $M_t = (t^2, 2t)$ appartient bien à Γ car $(2t)^2 = 4(t^2)$ et tout point M de Γ s'écrit $M = M_t$ pour un unique $t \in \mathbb{R}$. Comme la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = (t^2, 2t)$ est un paramétrage bijectif de cette parabole Γ, et que $f'(t) = (2t, 2)$, la tangente T_t à Γ en M_t est définie par

$M=(x,y)\in T_t \iff (\overrightarrow{M_tM},f'(t))$ liée$\iff [\overrightarrow{M_tM},f'(t)]=0 \iff \begin{vmatrix} x-t^2 & 2t \\ y-2t & 2 \end{vmatrix}=0$ donc la droite T_t est d'équation $T_t\ :\ 2(x-t^2)-2t(y-2t)=0 \iff x-ty+t^2=0$.

151 La fonction $x\mapsto ||x||$ est de classe C^2 par composée sur $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ car $||x||=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$ et que la fonction $(x_1,\cdots,x_n)\mapsto x_1^2+\cdots+x_n^2$ est polynomiale donc C^2 sur $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et que $t\mapsto\sqrt{t}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$. Par composition, la fonction $F:x\mapsto f\Big(\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}\Big)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$.
Pour $k\in[\![1;n]\!]$, on a $\dfrac{\partial F}{\partial x_k}(x)=\dfrac{2x_k}{2\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}}f'(||x||)=\dfrac{x_k}{||x||}f'(||x||)$. On dérive une fois de plus et on a $\dfrac{\partial^2F}{\partial {x_k}^2}(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}}f'(||x||)-\dfrac{2x_k^2}{2(x_1^2+\cdots+x_n^2)^{3/2}}f'(||x||)+\dfrac{4x_k^2}{4(x_1^2+\cdots+x_n^2)}f''(||x||)$ qui se met sous forme plus compacte en $\dfrac{\partial^2F}{\partial {x_k}^2}(x)=\dfrac{f'(||x||)}{||x||}-\dfrac{x_k^2f'(||x||)}{||x||^3}+\dfrac{x_k^2f''(||x||)}{||x||^2}$.
Or, par hypothèse, on a $\forall x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\},\ \Delta F(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^n\dfrac{\partial^2F}{\partial {x_k}^2}(x)=0$ donc, en regroupant tous les termes, on obtient $\dfrac{nf'(||x||)}{||x||}-\dfrac{||x||^2f'(||x||)}{||x||^3}+\dfrac{||x||^2f''(||x||)}{||x||^2}=\dfrac{(n-1)f'(||x||)}{||x||}+f''(||x||)=0$. Comme la fonction $x\mapsto||x||$ est surjective de $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ dans $\mathbb{R}_+^*$, on a $\forall t\in\mathbb{R}_+^*,\ tf''(t)+(n-1)f'(t)=0$. Ainsi, f' est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de $(E)\ :\ ty'+(n-1)y=0$ qu'on sait résoudre et $\exists\lambda\in\mathbb{R},\ \forall t>0,\ f'(t)=\dfrac{\lambda}{t^{n-1}}$. Traitons deux cas :

- Si $n=1$, on a donc $\forall t>0,\ f'(t)=\lambda$ donc, comme $\mathbb{R}_+^*$ est un intervalle, $\exists\mu\in\mathbb{R},\ \forall t>0,\ f(t)=\lambda t+\mu$ et f est affine ce qui est logique pour une fonction dont la dérivée seconde est nulle !
- Si $n=2$, on a donc, à nouveau, $\exists\mu\in\mathbb{R},\ \forall t>0,\ f(t)=\lambda\ln(t)+\mu$.
- Si $n\geqslant 3$, il vient, encore, $\exists\mu\in\mathbb{R},\ \forall t>0,\ f(t)=-\dfrac{\lambda}{(n-2)t^{n-2}}+\mu$.

152 Analyse : soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue, vérifiant $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)+\displaystyle\int_0^x(x-t)f(t)dt=1$ qu'on développe, par linéarité de l'intégrale de fonctions continues sur des segments, en $f(x)+x\displaystyle\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt=1\quad(1)$. Comme $f_1:t\mapsto f(t)$ et $f_2:t\mapsto tf(t)$ sont continues sur $\mathbb{R}$, les fonctions $F_1:x\mapsto\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ et $F_2:x\mapsto\displaystyle\int_0^x tf(t)dt$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ par le théorème fondamental de l'intégration (ce sont les primitives de f_1 ou f_2 qui s'annulent en 0). En dérivant (1), on a $\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)+\displaystyle\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=f'(x)+\int_0^x f(t)dt=0\quad(2)$.
On dérive à nouveau (2) pour avoir $\forall x\in\mathbb{R},\ f''(x)+f(x)=0\quad(3)$. Comme les solutions de l'équation caractéristique $z^2+1=0$ de cette équation différentielle linéaire à coefficients constants du second ordre sont $z=\pm i$, les solutions sur $\mathbb{R}$ de (3) sont les fonctions $y:x\mapsto A\cos(x)+B\sin(x)$ avec $(A,B)\in\mathbb{R}^2$. En prenant $x=0$ dans (1) et (2), on a $f(0)=1$ et $f'(0)=0$ donc $A=1$ et $B=0$. Ainsi, $f=\cos$.
Synthèse : Soit $f=\cos$, alors pour tout $x\in\mathbb{R}$, en posant $u(t)=x-t$ et $v(t)=\sin(t)$ dans $\displaystyle\int_0^x(x-t)\cos(t)dt$, les fonctions u et v étant de classe C^1 sur $\widetilde{[0;x]}$, par intégration par parties, on a la relation souhaitée, à savoir $f(x)+\displaystyle\int_0^x(x-t)f(t)dt=\cos(x)+[(x-t)\sin(t)]_0^x+\int_0^x\sin(t)dt=\cos(x)+[-\cos(t)]_0^x=1$.
Conclusion : la seule fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue vérifiant $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)+\displaystyle\int_0^x(x-t)f(t)dt=1$ est $f=\cos$.

153 **a.** Comme $(x,y)\mapsto x^2$, $(x,y)\mapsto y^2$ et $(x,y)\mapsto xy$ sont polynomiales donc de classe C^1 sur Ω et que la dernière ne s'annule pas, la fonction f est de classe C^1 sur Ω par inverse et somme de fonctions de classe C^1.

b. Les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x} : (x,y) \mapsto 2x - \frac{a}{x^2y}$ et $\frac{\partial f}{\partial y} : (x,y) \mapsto 2y - \frac{a}{xy^2}$ sont continues sur Ω pour les mêmes raisons et on a l'expression du gradient : $\forall (x,y) \in \Omega,\ \overrightarrow{\text{grad}}\, f(x,y) = \left(2x - \frac{a}{x^2y}, 2y - \frac{a}{xy^2}\right)$.

c. Comme $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t,t) = \lim\limits_{t\to 0^+} \left(2t^2 + \frac{a}{t^2}\right) = +\infty$ alors que $\lim\limits_{t\to 0^+} (t,t) = (0,0)$, la fonction f n'est pas prolongeable par continuité en $(0,0)$.

d. Comme Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, si f admet en un point un extremum local, ce point sera un point critique de f d'après le cours. Or, si $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x,y) = (0,0)$ pour $(x,y) \in \Omega$, on a $2x - \frac{a}{x^2y} = 0$ (1) et $2y - \frac{a}{xy^2} = 0$ (2). En multipliant (1) et (2), il vient $4xy = \frac{a^2}{x^3y^3}$ donc $(xy)^4 = \frac{a^2}{4}$ d'où $xy = \sqrt{\frac{a}{2}}$. Ainsi, en reportant ceci dans (1) et en multipliant par x, $2x^2 = \sqrt{2a}$ donc $x = \left(\frac{a}{2}\right)^{1/4} = x_0$. Par symétrie entre x et y dans ces équations, $y = \left(\frac{a}{2}\right)^{1/4} = y_0 = x_0$. Il y a un seul point critique de f sur Ω, le point $(x_0, y_0) = \left(\left(\frac{a}{2}\right)^{1/4}, \left(\frac{a}{2}\right)^{1/4}\right)$.
La valeur de f en (x_0,y_0) est $f(x_0,y_0) = \sqrt{\frac{a}{2}} + \sqrt{\frac{a}{2}} + \sqrt{2a} = 2\sqrt{2a} = m$. La fonction f est de classe C^2 sur Ω pour les mêmes raisons qu'avant et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 + \frac{2a}{x^3y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2 + \frac{2a}{xy^3}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{a}{x^2y^2}$, donc la hessienne de f en (x_0,y_0) vaut $H = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$. Puisque $\chi_H = X^2 - 12X + 32 = (X-4)(X-8)$, $\text{Sp}(H) = \{4, 8\}$ donc H est une matrice symétrique définie positive et f admet en (x_0,y_0) un minimum local.
Soit $T = \left\{(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \mid x \leqslant \sqrt{m},\ y \leqslant \sqrt{m}, xy \geqslant \frac{a}{m}\right\}$. Comme T est borné par définition, fermé (grâce aux inégalité larges), et non vide car $(x_0,y_0) \in T$ puisque $\left(\frac{a}{2}\right)^{1/4} \leqslant \sqrt{m} = \left(8a\right)^{1/4}$ et $\left(\frac{a}{2}\right)^{1/2} \geqslant \frac{a}{m} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^{1/2}$, la fonction continue f admet un minimum absolu sur le “triangle” T par le théorème des bornes atteintes. Si (x,y) est sur la frontière de T, on a $x = \sqrt{m}$ ou $y = \sqrt{m}$ donc $f(x,y) > m = f(x_0,y_0)$ ou $xy = \frac{a}{m}$ donc $f(x,y) > m = f(x_0,y_0)$. Ainsi, le minimum de f sur T est atteint à l'intérieur de T donc en un point critique, donc forcément en (x_0,y_0). Ainsi, $\underset{T}{\text{Min}}(f) = f(x_0,y_0) = m$.
Par conséquent, pour $(x,y) \in \Omega$, soit $(x,y) \in T$ et on a vu que $f(x,y) \geqslant f(x_0,y_0) = \underset{T}{\text{Min}}(f)$, soit $(x,y) \notin T$ et, comme avant, $x > \sqrt{m}$ ou $y > \sqrt{m}$ donc $f(x,y) > m = f(x_0,y_0)$ ou $xy > \frac{a}{m}$ donc $f(x,y) > m = f(x_0,y_0)$. On a donc $m = f(x_0,y_0) = \underset{\Omega}{\text{Min}}(f)$ et f admet en (x_0,y_0) un minimum absolu.

154

155 **a.** Soit $n \in \mathbb{N}$ et $y : x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ avec $a_n \neq 0$ une solution polynomiale (non nulle) de $(E_0)\ :\ x^2y'' - 2y = 0$. Le terme de degré maximal dans la fonction polynomiale $x \mapsto x^2y''(x) - 2y(x)$ est d'ordre n et il vaut $(n(n-1)a_n - 2a_n)x^n = (n^2 - n - 2)a_n x^n = (n+1)(n-2)a_n x^n$. Ainsi, puisque $x^2y''(x) - 2y(x) = 0$, on a $(n+1)(n-2)a_n$ et, puisque $a_n \neq 0$, $(n+1)(n-2) = 0$ donc $n = 2$ car $n + 1 > 0$.
Prenons donc $y : x \mapsto a_2x^2 + a_1x + a_0$, alors $y''(x) = 2a_2$ donc $2a_2x^2 - 2a_2x^2 - 2a_1x - 2a_0 = -2a_1x - 2a_0 = 0$ pour $x \in I$ où I est l'intervalle sur lequel on résout (E_0) et ceci équivaut à la nullité du polynôme $-2a_1X - 2a_0$ donc à $a_0 = a_1 = 0$. Les solutions polynomiales de l'équation homogène (E_0) sont les fonctions $y : x \mapsto a_2x^2$.

b. Soit $I = \mathbb{R}_+^*$ ou $I = \mathbb{R}_-^*$. Pour une fonction $y : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable, on définit $z : I \to \mathbb{R}$ par

$z(x) = \dfrac{y(x)}{x^2}$ donc $y(x) = x^2 z(x)$ (méthode de LAGRANGE) de sorte que z est aussi deux fois dérivable sur I et qu'on a l'équivalence, puisque $y''(x) = 2z(x) + 2xz'(x) + x^2 z''(x)$ par la formule de LEIBNIZ :

$$\begin{aligned}(\forall x \in I,\ x^2y''(x) - 2y(x) = 3x^2) &\iff (\forall x \in I,\ x^2(2z(x) + 4xz'(x) + x^2z''(x)) - 2x^2z(x) = 3x^2)\\ &\iff (\forall x \in I,\ 4xz'(x) + x^2z''(x) = 3)\\ &\iff (\forall x \in I,\ x^2a'(x) + 4xa(x) = 3)\ \text{ en posant } a = z'\end{aligned}$$

Les solutions de $(F_0)\ :\ x^2y' + 4xy = 0$ sur I sont les fonctions $y : x \mapsto \dfrac{\lambda}{x^4}$ et, par méthode de variation de la constante, puisque $\dfrac{\lambda'}{x^2} = 3$ équivaut à $\lambda : x \mapsto x^3 + \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, les solutions de $(F)\ :\ x^2y' + 2xy = 3$ sont les fonctions $y : x \mapsto \dfrac{x^3+\alpha}{x^4} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{\alpha}{x^4}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Ainsi, y est solution de (E) sur I si et seulement si $z' : x \mapsto \dfrac{1}{x} + \dfrac{\alpha}{x^4}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et donc y est solution de (E) sur I si et seulement si $z : x \mapsto \ln(|x|) - \dfrac{\alpha}{3x^3} + \beta$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. En conclusion, les solutions réelles de (E) sur I sont les fonctions $y : x \mapsto x^2\ln(|x|) + \dfrac{A}{x} + Bx^2$ avec $A = -\dfrac{\alpha}{3} \in \mathbb{R}$ et $B = \beta \in \mathbb{R}$.

c. <u>Analyse</u> : soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution de (E) sur $\mathbb{R}$, alors ses restrictions à $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ sont a fortiori des solutions de (E) donc, d'après la question précédente, il existe des réels A_1, A_2, B_1, B_2 tels que l'on ait $\forall x < 0,\ y(x) = x^2\ln(|x|) + \dfrac{A_1}{x} + B_1x^2$ et $\forall x > 0,\ y(x) = x^2\ln(|x|) + \dfrac{A_2}{x} + B_2x^2$. Avec $x = 0$ dans (E), $y(0) = 0$. La continuité de y en 0 montre que $A_1 = A_2 = 0$ car $\lim\limits_{x\to0^-}(x^2\ln(|x|)+B_1x^2) = \lim\limits_{x\to0^+}(x^2\ln(|x|)+B_2x^2) = 0$. Pour tout B_1 et tout B_2, on a $y'(0) = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{y(x)-y(0)}{x-0} = 0$ car $\lim\limits_{x\to0^-}(x\ln(|x|) + B_1x) = \lim\limits_{x\to0^+}(x\ln(|x|) + B_2x) = 0$. On calcule $\forall x < 0,\ y'(x) = 2x\ln(|x|) + x + 2B_1x$ et $\forall x > 0,\ y'(x) = 2x\ln(|x|) + x + 2B_2x$. Mais comme $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{y'(x)-y'(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to0^-}(2\ln(|x|) + x + 2B_1) = -\infty = \lim\limits_{x\to0^+}(2\ln(|x|) + x + 2B_2) = \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{y'(x)-y'(0)}{x-0}$, la fonction y n'est pas deux fois dérivable en 0.

Pas besoin de synthèse puisqu'il n'y a aucune solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

156 **a.** Par opérations, la fonction f est de classe C^2 (et même C^∞) sur l'ouvert $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Comme $\forall (x,y) \in D,\ |f(x,y)| \leqslant |xy|\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = |x||y| \leqslant ||(x,y)||_2^2$ et que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} ||(x,y)||_2 = 0$, par encadrement, on trouve $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ et f est aussi continue en $(0,0)$. Par conséquent, f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

b. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0$ en revenant à la définition et, par un calcul brutal, on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{x(y^4+4x^2y^2-x^4)}{(x^2+y^2)^2}$. Le second calcul n'était pas nécessaire puisque $f(x,y) = -f(y,x)$ (1) donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\dfrac{\partial f}{\partial y}(y,x)$ en dérivant (1) par rapport à x avec la règle de la chaîne.

c. De même, les fonctions rationnelles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur l'ouvert D par opérations. De plus, $\forall (x,y) \in D,\ \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leqslant \dfrac{|y|(2x^4+4x^2y^2+2y^4)}{(x^2+y^2)^2} = 2|y| \leqslant 2||(x,y)||_2$ et, comme en **a.**, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est aussi continue en $(0,0)$. Comme $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\dfrac{\partial f}{\partial y}(y,x)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est aussi continue en $(0,0)$.

Ainsi, par définition, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

d. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(t,0) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \dfrac{t}{t} = 1$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,t) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{t} = -1$. On peut aussi calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = \lim_{t\to 0} \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,0) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{t} = 0$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = \lim_{t\to 0} \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,t) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{t} = 0$. Par contraposée du théorème de SCHWARZ, f n'est pas de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ car $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.