CENTRALE MATHS 2

PSI 1

PARTIE 1 : 2014

1 *Centrale Maths2 PSI 2014* Aymeline Martin

Soit $f : x \mapsto e^{\frac{-x^2}{2}}$ et $P_n : x \mapsto (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} f^{(n)}(x)$.

a. Donner P_n pour $n \in [\![1;10]\!]$. Conjecturer et dire comment vous le démontreriez.

b. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1}(x) = xP_n(x) - P'_n(x)$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P'_n(x) = nP_{n-1}(x)$.

c. Donner $P_n(0)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Indication : on pourra considérer $P'_n(0)$.

d. Trouver une équation différentielle d'ordre 2 vérifiée par P_n sur $\mathbb{R}$ en partant de $P''_n(x) - xP'_n(x)$.

On définit maintenant $\phi(P,Q) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{\frac{-t^2}{2}}\,dt$.

e. Montrer que ϕ est bien définie et que c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

f. Calculer $\phi(X^i, X^j)$ pour $(i,j) \in [\![0;8]\!]^2$. Effectuer une conjecture et la démontrer.

Bonus : En divisant par $\sqrt{2\pi}$, à quoi cela vous fait-il penser ? Qu'a-t-on alors si on pose la famille des $\left(\dfrac{P_n}{n!\sqrt{2\pi}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$? Calculer la distance de X^{42} à $E_8 = \mathrm{Vect}(P_0, \cdots, P_8)$.

2 *Centrale Maths2 PSI 2014* Valentine Joseph

On définit sur $E = \mathbb{R}[X]$ le produit scalaire $(P|Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$. On note $||\,.\,||$ la norme euclidienne associée à ce produit scalaire. On note aussi $N_\infty(P) = \underset{[-1;1]}{\mathrm{Max}}\,|P|$.

a. Justifier les affirmations données par l'énoncé.

b. Calculer $(X^k|X^l)$ pour $(k,l) \in [\![0;5]\!]^2$.

c. Donner $(E_i)_{0\leqslant i\leqslant 5}$ la famille orthonormalisée par Gram-Schmidt de la base canonique de $\mathbb{R}_5[X]$.

d. Représenter sur $[-1;1]$ ces polynômes. En quel point est atteint le maximum ?

e. Montrer que si $P \in \mathbb{R}_5[X]$ et $||P|| \leqslant 1$, alors $N_\infty(P) \leqslant 3\sqrt{2}$...

3 *Centrale Maths2 PSI 2014* Alizée Mayet

Soit la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $a_1 = 1$ et $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}$.

a. Calculer les 10 premiers termes de cette suite.

b. Conjecture quand à la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{a_n}{4^n}$?

c. Que peut-on dire du rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n x^n$?

d. Que peut-on dire du rayon de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} b_n x^n$ où $b_1 = 1$ et $b_n = \dfrac{n}{2n-1} \sum\limits_{k=1}^{n-1} b_k b_{n-k}$?

4 *Centrale Maths2 PSI 2014* Tanguy Cazalets

Pour f continue sur $\mathbb{R}_+$, de carré intégrable, on définit la fonction g sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$.

a. Montrer que $f : t \mapsto e^{-t}$ satisfait ces critères. Calculer $\int_0^{+\infty} f(t)^2 dt$, $\int_0^{+\infty} g(t)^2 dt$ et $\int_0^{+\infty} f(t)g(t)dt$.

b. On pose $f(t) = \frac{\sin(t)}{t}$. Montrer que f satisfait les critères précédents. Calculer $\int_0^{+\infty} f(t)^2 dt$, $\int_0^{+\infty} g(t)^2 dt$ et $\int_0^{+\infty} f(t)g(t)dt$. On admettra que $\int_0^{+\infty} f$ est convergente (intégrale de DIRICHLET et que $\int_0^{+\infty} f = \frac{\pi}{2}$.
On revient dorénavant au cas général.

c. g est-elle prolongeable en 0 ? Soit $0 < a < b$, établir une relation entre $\int_a^b g(t)^2 dt$ et $\int_a^b f(t)g(t)dt$.

d. Établir dans un premier temps que $\int_a^b g(t)^2 dt \leqslant a g(a)^2 + 2\sqrt{\int_a^b g(t)^2 dt \int_0^{+\infty} f(t)^2 dt}$ puis en déduire ensuite la nouvelle majoration : $\int_a^b g(t)^2 dt \leqslant \sqrt{\int_0^{+\infty} f(t)^2 dt} + \sqrt{a g(a)^2 + \int_0^{+\infty} f(t)^2 dt}$.

e. Montrer que g^2 et fg sont intégrables et trouver une relation simple entre $\int_0^{+\infty} g(t)^2 dt$ et $\int_0^{+\infty} f(t)g(t)dt$.

5 *Centrale Maths2 PSI 2014* Servane Courtaux

a. Montrer que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible, la matrice ${}^tMM$ est inversible, diagonalisable et que son spectre est inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.
b. En déduire qu'il existe $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (symétrique) à valeurs propres strictement positives telles que $M = OS$ (vérification avec Maple sur un exemple).
c. Montrer que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible, il existe $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $T \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$ (triangulaire supérieure) telles que $M = OT$. Indication : appliquer l'orthonormalisation de GRAM-SCHMIDT à la famille crée par les vecteurs colonnes de M.

6 *Centrale Maths2 PSI 2014* Gabriel Detraz

On note $d(n)$ le nombre de diviseurs positifs de l'entier n et $D(n) = \sum_{k=1}^{n} d(k)$.
a. Donner $d(k)$ et $D(k)$ pour $k \in [\![1;10]\!]$. Puis $d(2750)$ et $D(2750)$.
On pose maintenant $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n)x^n$ et $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} D(n)x^n$.
b. Quel est l'ensemble de définition de f ? De g ? Donner les rayons de convergence des séries.
c. Tracer f et g sur un intervalle convenable.
d. Déterminer les limites de f et g aux bornes de leur ensemble de définition.
e. Trouver éventuellement des équivalents pour f et g en ces mêmes bornes.
f. Déterminer, par conjecture, $\lim_{n\to+\infty} \frac{d(n)}{nH(n)}$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{D(n)}{nH(n)}$ avec $H(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
g. Vérifier numériquement les conjectures....

PARTIE 2 : 2015

7 *Centrale Maths2 PSI 2015* Alberto Alonso et Agatha Courtenay

On prend trois matrices X, Y, Z dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, un réel a et la matrice $A(a) = X + aY + a^2 Z$.

a. Trouver les valeurs propres de $A(a)$ pour $a \in \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$. Quelle hypothèse peut-on émettre quant au polynôme caractéristique de $A(a)$?

b. Donner une norme N sur $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. Créer une fonction qui renvoie la norme d'une matrice.

c. À l'aide de la représentation graphique de l'application qui à a dans le segment $[-5; 3]$ associe $N(P_a(A(a)))$ où P_a est un polynôme bien choisi, discuter de l'existence de a tel que :

- A soit diagonalisable avec une valeur propre triple.
- A soit diagonalisable avec une valeur propre double (non triple).
- A soit non diagonalisable avec une valeur propre double .

d. Trouver des matrices P inversible et T triangulaire telles que $A(0) = PTP^{-1}$.

8 *Centrale Maths2 PSI 2015* Inès Arranz-Valsero

a. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, montrer l'existence de $S(P) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{P(n)}{n!}$.

b. Montrer que $P \mapsto S(P)$ est une forme linéaire.

c. Calculer $\sum\limits_{k=0}^{50} \dfrac{P(k)}{k!}$ pour $P = X^d$ avec $d \in [\![0; 10]\!]$ et pour $P = X^9 + 9X^8 - 152X^4 + 28X^2 - 7$.

On définit une famille de polynômes $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $H_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ H_{n+1} = (X - n)H_n$.

d. Montrer que $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.

e. Calculer $S(H_n)$.

f. Comment peut-on calculer $S(P)$ pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$.

9 *Centrale Maths2 PSI 2015* Jean-Raphaël Biehler

Soit $u_{m,n} = \displaystyle\int_0^1 x^m (1-x)^n \,dx$.

a. Calculer $u_{m,0}$, puis exprimer $u_{m,n}$ en fonction de $u_{m+1,n-1}$.

b. Écrire une fonction python qui renvoie $u_{m,n}$ sous forme fractionnelle.

c. Vérifier à l'aide des approximations d'intégrales de python (dossier fourni), pour plusieurs valeurs de m et n, que votre résultats fournit des résultats cohérents.

d. À l'aide d'une division euclidienne, simplifier le quotient de polynômes suivant : $\dfrac{x^6 + 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4}{4 + x^4(1-x)^4}$ (le résultat doit être $\dfrac{1}{1+x^2}$).

e. Montrer que $\pi = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(-\dfrac{1}{4}\right)^{4k} \displaystyle\int_0^1 (x^6 + 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4)x^{4n}(1-x)^{4n} \,dx$.

f. Après avoir simplifié le résultat ci-dessus à l'aide des $u_{m,n}$, calculer avec python S_0, S_1, S_2 où S_n est la somme partielle de la série ci-dessus, puis commenter.

10 *Centrale Maths2 PSI 2015* Térence Burcelin

On pose $x(t) = \dfrac{\sin\big(3\pi t/2\big)\cos(t)}{1-2\cos(t)}$ et $y(t) = \dfrac{\sin\big(3\pi t/2\big)\sin(t)}{1-2\cos(t)}$.

a. Domaine de définition ? Parité ? Tracer la courbe.

b. D'après le graphe, conjecturer les symétries de la courbe puis les prouver par le calcul.

c. Déterminer les équations des asymptotes.

d. Réaliser un programme pour calculer la longueur de la boucle qui coupe l'axe des abscisses.

11 *Centrale Maths2 PSI 2015* Bastien Chevallier

Soit $f_n(t) = \dfrac{\sin\big((2n+1)t\big)}{2n+1}$ et $S_n(t) = \dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f_k(t)$. On note, quand elle existe $S(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x)$.

a. Représenter graphiquement sur $[0;\pi]$ la fonction S_n pour $n=5$, $n=10$ et $n=20$.

Que peut-on en déduire sur la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$?

b. Calculer l'abscisse α (à 10^{-3} près) où S (????) atteint son premier maximum et calculer ce maximum M.

c. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right],\ S_n(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^x \dfrac{\sin(2nt)\cos(nt)}{\sin(t)}\,dt.$

d. Calculer $a_n \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que $S_n'(a_n) = 0$. Comparer a_{10} et α.

12 *Centrale Maths2 PSI 2015* Marin de Bonnières

On suit l'évolution d'une particule entre différentes positions A_0, A_1, A_2 et A_3. À $t=0$, la particule est en A_1. À $t=n$, la particule change de position selon le schéma suivant, elle va :

- de A_0 en A_0 avec une probabilité de 1,
- de A_1 en A_0 avec une probabilité de p,
- de A_1 en A_2 avec une probabilité de $1-p$,
- de A_2 en A_1 avec une probabilité de p,
- de A_2 en A_3 avec une probabilité de $1-p$,
- de A_3 en A_0 avec une probabilité de 1.

a. Écrire une fonction *saut*, qui donne l'indice de la position de la particule à l'instant n.

Essayer pour $n=100$, $p=0,3$ et $p=0,7$.

b. Écrire une fonction *histogramme* qui dépend de n, p et N (le nombre de simulations) et qui renvoie le nombre de fois où la particule s'est arrêtée sur chaque indice (après chaque simulation).

On pose $X_n = {}^t\big(P(x_n=0)\ P(x_n=1)\ P(x_n=2)\ P(x_n=3)\big)$ où x_n est la variable aléatoire qui définit la position de la particule à l'instant n.

c. Déterminer une matrice A indépendante de n telle que $X_{n+1} = AX_n$.

d. Montrer que A est diagonalisable ssi $0<p<1$.

e. Pour $p=\dfrac{1}{2}$, calculer la probabilité quand n tend vers $+\infty$ que la particule se trouve dans chaque position.

13 *Centrale Maths2 PSI 2015* Mathieu Dubes

Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $f_0(x) = x$ et $f_{n+1}(x) = 3f_n\left(\frac{x}{3}\right) - 4f_n^3\left(\frac{x}{3}\right)$.

a. Écrire sur python une fonction qui renvoie $f_n(x)$.

b. Tracer f_n sur python et sur $[0;4\pi]$ pour $n \in [\![1;5]\!]$ en limitant les ordonnées en valeur absolue à 3.

c. Soit $\phi(x) = 3x - 4x^3$. Tracer Φ avec python sur $[-1;1]$ puis tracer $x \mapsto \phi(\sin(x))$ sur $[-2\pi;2\pi]$.

d. Prouver que : $\forall(x,y) \in [-1;1]^2,\ |\phi(x) - \phi(y)| \leqslant 9|x - y|$.

e. Montrer que $|f_p(x) - \sin(x)| \leqslant 9^n \left|\frac{x}{3^n} - \sin\left(\frac{x}{3^n}\right)\right|$.

Indication : on pourra poser $v_p = f_p\left(\frac{x}{3^{n-p}}\right)$ et $w_p = \sin\left(\frac{x}{3^{n-p}}\right)$.

f. Qu'en déduire sur la convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

14 *Centrale Maths2 PSI 2015* Arnaud Dubessay

Un ascenseur, p étages, n personnes dedans, les n personnes doivent descendre à l'un des p étages de manière équiprobable et indépendamment les uns des autres. Soit X la variable aléatoire qui est le nombre d'arrêt. Soit la variable aléatoire X_i qui est le nombre de personnes qui descendent à l'étage i.

a. Simuler la variable X avec Python (en choisissant n et p).

b. Quelle est la loi de X_i ?

c. Quelle est la loi de X ?

d. Donner un équivalent de $P(X = j)$ quand p tend vers $+\infty$.

15 *Centrale Maths2 PSI 2015* Mathieu Gaultier

Soit $G \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ et $g : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ qui à P associe le reste de la division euclidienne de XP par G.

a. Montrer que g est un endomorphisme.

b. Soit $n = 3$ et $G = X(X-1)(X+1)(X+2)$. Exprimer la matrice de g dans la base canonique. Montrer que g est diagonalisable. Tracer sur $[-3;2]$ les applications associées aux vecteurs propres de g.

c. On revient au cas général. Montrer que g est diagonalisable et exprimer ses vecteurs propres.

16 *Centrale Maths2 PSI 2015* Adrien Gruson

On considère les polynômes $P = X^4 + X^3 + 6X^2$ et $Q = -X^4 - 4X^3 + 6X - 6$ (pas très sûr). On définit aussi la courbe $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid P(x) = Q(y)\}$. On note aussi $f(x,y) = x^2 + y^2$.

a. Représenter à l'écran les polynômes sur $[-3;2]$.

b. Représenter Γ à l'écran.

c. Montrer que Γ est un fermé borné.

d. Montrer qu'il existe une tangente en tout couple $(x,y) \in \Gamma$ et en expliciter un vecteur directeur.

e. Montrer qu'il existe un point $M_0(x_0,y_0) \in \Gamma$ tel que $f(x_0,y_0) = \sup_{\Gamma} |f|$.

f. Paramétrage local par une courbe $f(\alpha(t),\beta(t))$ autour de $f(x_0,y_0)$ de la tangente ??????????

g. À l'aide de l'ordinateur, évaluer la borne supérieure considérée. Qu'en déduit-on ?

17 *Centrale Maths2 PSI 2015* Alexandre Janot

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ et f son application canoniquement associée.

a. Calculer les valeurs propres de A. A est-elle diagonalisable ?

b. Trouver $\mathrm{Ker}\left((f - \lambda\,\mathrm{id})^2\right)$ (avec λ une valeur propre).

c. Trouver une base $\mathcal{B}$ dans laquelle f a une matrice de la forme suivante :

- Sur les 2 premiers termes de la diagonale : a. Sur les 2 derniers : b.
- Un 1 au dessus du 2-ème a, un 1 au dessus du dernier b.

Exprimer a et b.

d. Montrer que A est semblable à sa transposée.

18 *Centrale Maths2 PSI 2015* Arthur Lacombe

Soit, pour $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{e^x - 1}$.

a. Déterminer la limite de f en 0.

b. Représenter f à l'écran.

c. Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

d. Déterminer un réel positif a tel que $|A - F(a)| \leqslant 10^{-5}$ si $A = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ et $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$.

e. Approcher $F(a)$ par la méthode des trapèzes ou des rectangles.

f. Montrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $A = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

19 *Centrale Maths2 PSI 2015* Margaux Ledieu

Soit $a \in [0;1]$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2\,\mathrm{Min}(u_n, 1 - u_n)$.

a. Écrire une fonction *suite*(a, n) qui renvoie le terme u_n.

b. Calculer u_{10} pour $a \in \{0.1, 0.3, 0.9\}$.

c. Écrire une fonction *dessin*(a, N) qui renvoie le dessin en ligne brisée des $N + 1$ couples (u_k, k) pour $k \in [\![0; N]\!]$.

d. La tester pour différents couples.

e. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0;1]$.

f. Montrer qu'on peut écrire $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 - |2u_n - 1|$.

g. Soit $u_n = \dfrac{1}{\pi}\,\mathrm{Arccos}\left(\cos(2^n \pi a)\right)$. Réaliser le dessin de cette suite. Interprétez.

20 *Centrale Maths2 PSI 2015* Guillaume Leroy

Une matrice carrée est dite stochastique si tous ses coefficients sont positifs et si la somme des coefficients de chaque ligne vaut 1. Une matrice carrée est dite doublement stochastique si en plus la somme des coefficients de chaque colonne vaut également 1.

a. Écrire une fonction python qui détermine si une matrice est stochastique ou non.

b. Écrire une fonction python qui déterminer si une matrice est doublement stochastique ou non.

c. L'ensemble des matrices stochastiques est-il stable par produit matriciel ?
De même pour les matrices doublement stochastiques.

Soit $(X_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(X_{2,n})_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant chacune une loi de Bernoulli de paramètre p. On définit $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $Z_0 = 1$ et $\forall n \geqslant 1,\ Z_{n+1} = j^{X_{1,n}+X_{2,n}} Z_n$ (où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$). On pose $U_n = {}^t\big(P(Z_n = 1), P(Z_n = j), P(Z_n = j^2)\big) \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$.

d. Montrer qu'il existe une matrice A telle que $U_{n+1} = AU_n$.

e. A est-elle stochastique, doublement stochastique ?

f. Exprimer A en fonction de I_3 et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

g. Calculer A^n.

21 *Centrale Maths2 PSI 2015* Paul Mondou

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $u_n : I = \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n e^{-(n+2)x}}{(n+1)(n+2)}$.

Soit la fonction f définie (quand c'est possible) par $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.

a. Montrer que f est définie et continue sur I.

b. Soit $S_N(x) = \sum\limits_{n=0}^{N} u_n(x)$. Montrer que pour un intervalle $J \subset I$: $\exists N \in \mathbb{N},\ \forall x \in J,\ \Big|f(x) - S_N(x)\Big| \leqslant 10^{-5}$.

c. Afficher le graphe de f sur un intervalle convenable.

d. Étudier le comportement de f aux limites de I.

22 *Centrale Maths2 PSI 2015* Gabriel Olympie

Soit $E = \mathbb{R}^4$. On pose une matrice A de taille 4x4 (je me souviens plus des coefficients).

a. Écrire une fonction python qui renvoie la norme d'une matrice, norme que l'on définira au préalable.

b. Vérifier que A est orthonormale, quel est son déterminant ?

c. Trouver le plus petit k entier non nul tel que $A^k = I_4$.

d. Déterminer les valeurs propres de A et les relier au résultat du **c.**.

e. Soit $P = \chi_A$, montrer qu'il existe Q et R polynômes réels irréductibles de degré 2 tels que $P = Q \times R$.

f. Soit $E_1 = \ker(Q(A))$ et $E_2 = \ker(R(A))$. Trouver une base orthonormée de E_1 et une pour E_2.

g. Montrer que E_1 et E_2 sont supplémentaires orthogonaux.

23 *Centrale Maths2 PSI 2015* Oriana Peltzer

On se donne une matrice $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ dont les termes sont des huitièmes d'entiers.

On se donne aussi U et B dans $\mathcal{M}_{5,1}(\mathbb{R})$ et la suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $X_0 = U$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n + B$.

a. Vérifier que l'entrée de A est correcte et que ses valeurs propres contiennent 1, i ou j et $\dfrac{1-\sqrt{17}}{8}$.

b. Pour 5 cas de couples (U, B), faire un programme affichant les termes d'indices 150, 151, 152 de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et conjecturer sur la convergence de la suite (cas de convergence et de périodicité des termes).

c. Trouver l'espace vectoriel des B vérifiant la convergence de $(X_n)_{n\geqslant 0}$.

d. Expliciter les (B, U) tels que $(X_n)_{n\geqslant 0}$ soit stationnaire.

24 *Centrale Maths2 PSI 2015* François-Xavier Solvar

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $u_n = n^3 \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n^4 + n^2k^2 + k^4}$.

a. Écrire une fonction qui donne le terme u_n.

b. Écrire un script traçant les 10, 100, 1000 premiers termes. Conjecture sur la convergence de $(u_n)_{n\geqslant 1}$?

c. Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2+x^4}$. Représenter graphiquement f sur $[0;1]$.

d. Calculer l'aire sous la courbe de f par la méthode des trapèzes avec un pas de $0,01$. La comparer à u_{1000}.

e. Trouver a et b deux réels tels que $f(x) = \dfrac{ax+b}{1+x+x^2} + \dfrac{-ax+b}{1-x+x^2}$.

f. Montrer la convergence de $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et donner sa limite ℓ.

g. On définit $v_n = \displaystyle\int_{1/n}^{1} f(t)\mathrm{d}t$. Donner un équivalent de v_n.

25 *Centrale Maths2 PSI 2015* Marie Trarieux

Soit f_n un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ avec $n \geqslant 2$ (?????) et $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ (canonique ?????).

a. Définir une fonction sur Python qui renvoie $A_n = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_n}(f_n)$.

b. Caractériser géométriquement f_2 et f_3.

c. Donner les éléments propres de A_6.

d. Trouver χ_{A_6} et le décomposer en facteurs irréductibles.

e. Donner une base... et déterminer un entier d_6 tel que .....

26 *Centrale Maths2 PSI 2015* Julien Venne

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des diviseurs de n dans $\mathbb{N}^*$, d_n le cardinal de $\mathcal{D}_n$ et σ_n la somme des éléments de $\mathcal{D}_n$. **a.** Déterminer les valeurs de $d_1, \cdots, d_{10}$, $\sigma_1, \cdots, \sigma_{10}$. Calculer d_{2970} et s_{2970}.

b. Tracer sous forme de ligne brisée les premiers termes des deux suites.

c. Que peut-on dire des variations des suites $(d_n)_{n\geqslant 1}$ et $(\sigma_n)_{n\geqslant 1}$?

d. Trouver un encadrement de σ_n en fonction de d_n.

On s'intéresse aux deux séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 1} d_n x^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \sigma_n x^n$.

e. Déterminer leurs rayons de convergence. Que se passe-t-il quand $x = R$ pour ces deux séries ?

f. Série harmonique et une autre et rapport entre les deux.....

PARTIE 3 : 2016

27 *Centrale Maths2 PSI 2016* Erwann Alric

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} = (C_1\ C_2\ C_3)$.

Montrer de la manière la plus simple possible que (C_1, C_2, C_3) forme une base de $\mathbb{R}^3$.
Orthonormaliser (C_1, C_2, C_3) en (u, v, w) à l'aide du procédé de Gram-Schmidt (on ne demande que des valeurs approchées).

Soit $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ non nul.

Trouver $S \in SO(2)$ telle que $S\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ 0 \end{pmatrix}$ et exprimer γ en fonction de α et β.

28 *Centrale Maths2 PSI 2016* Antoine Badet

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. On définit le produit scalaire $(P|Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$.

a. Justifier qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B} = (P_0, \cdots, P_n)$ de E telle que $\forall k \in [\![0; n]\!],\ \deg(P_k) = k$.
b. Montrer que $\forall k \in [\![1; n]\!],\ P_k \in (\mathbb{R}_{k-1}[X])^{\perp}$.
c. Calculer P_0, P_1, P_2, P_3 à l'aide de python. Les afficher.
d. Montrer que P_k s'annule une fois sur $[0; 1]$.
e. ????
Questions : Écrire le procédé d'orthonormalisation et le théorème de Gram-Schmidt.

29 *Centrale Maths2 PSI 2016* Owain Biddulph

On considère la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $a_0 > 0$ et $\forall n \geqslant 0,\ a_{n+1} = 1 - e^{-a_n}$.

a. Représenter les 50 premiers termes de la suite pour $a_0 \in \{1, \cdots, 10\}$ puis pour $a_0 \in \left\{\frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{10}\right\}$. Quelle conjecture peut-on faire ?
b. Démontrer la conjecture.
On considère la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ de somme S avec $a_0 = 1$.
c. Déterminer son rayon.
d. Donner la valeur approchée à 10^{-5} près de $S\left(\frac{1}{2}\right)$.
e. Représenter S sur un domaine judicieusement choisi.
f. Conjecturer la limite de S aux bornes de son intervalle de définition. Valeur de $S(-1)$ à 10^{-5} près.
g. Représenter les 1000 premiers termes de la suite $(na_n)_{n\geqslant 0}$. Conjecturer.
h. Démontrer la conjecture faite en question **f.**

30 *Centrale Maths2 PSI 2016* Sylvin Bielle (OdlT 2016/2017 Centrale PSI planche 158 avec Python)

On définit $f_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ par $f_n(t) = \dfrac{1 - \cos(t/n)}{t^2(1+t^2)}$ et la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ par $u_n = \int_0^{+\infty} f_n(t)dt$.

a. Tracer avec Python les courbes de $f_1, \cdots, f_{10}$ ainsi que la fonction constante $\frac{1}{2}$ sur $]0; \pi[$.
b. Calculer les 30 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ avec Python.
Peut-on donner une conjecture sur la suite ? Prouver cette conjecture.
c. Soit $x > 0$, on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{1 - \cos(xt)}{t^2(1+t^2)}dt$. Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
d. Tracer F avec Python sur $]0; 10]$. Justifier que F est prolongeable par continuité en 0.
e. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

31 *Centrale Maths2 PSI 2016* Adrien Boudy

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est à diagonale propre si ses coefficients diagonaux sont ses valeurs propres.

a. Donner des exemples de matrices non diagonales à diagonale propre.

b. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ est-elle à diagonale propre ?

c. Écrire une fonction qui prend en argument M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et qui renvoie la liste des coefficients de son polynôme caractéristique. Indication : on pourra utiliser les valeurs propres de M.

d. Définir une norme sur $\mathbb{R}[X]$. Écrire une fonction qui prend en argument un polynôme sous la forme de la liste de ses coefficients et qui renvoie sa norme.

e. Soit $A(a) = \begin{pmatrix} a & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$???. À quelle condition sur a la matrice $A(a)$ est-elle à diagonale propre ? Indication : on pourra utiliser le graphe de $a \mapsto N(P_a)$ où P_a est un polynôme bien choisi.

f. Que dire d'une matrice A symétrique réelle à diagonale propre ?

Indication : on pourra calculer $\mathrm{Tr}(A^2)$ de deux manières différentes.

32 *Centrale Maths2 PSI 2016* Pauline Bourda (OdlT 2016/2017 Centrale PSI planche 172 avec Python)

a. Tracer avec python la surface décrite par $f : (x, y) \mapsto \sum_{i=0}^{4} (i^4 - xi^3 - y)^2$ avec $(x, y) \in]0; 10[\times] - 2,5; 5[$.

b. Observer l'existence d'un minium de F et affiner l'intervalle.

c. Montrer que $(P|Q) = \sum_{k=0}^{4} P(k)Q(k)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_4[X]$.

d. Montrer l'existence de $A = \underset{(a,b)\in\mathbb{R}^2}{\mathrm{Inf}} \sum_{k=0}^{4} (k^4 - ak^3 - b)^2$. Calculer A.

e. Créer une liste X contenant les nombres [., .] avec un pas de $0,01$; de même pour Y et les nombres [., .].

f. Comparer avec la valeur déterminer à la question **d.**.

33 *Centrale Maths2 PSI 2016* Matthieu Cadiot

Soit $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice échiquier de taille 4.

a. Programme python qui donne la matrice échiquier de taille n.

b. Instructions pour obtenir la liste des matrices échiquier de taille $2p$ pour $p \in [\![1; 100]\!]$.

c. Si M est une matrice échiquier de taille $2p$, calculer $M^3 - p^2M$. Qu'en déduit-on ?

d. Montrer que M est diagonalisable sans passer par χ_M.

e. Donner les sous-espaces propres. Montrer qu'ils sont orthogonaux.

f. Déterminer la projection orthogonale sur $E_0(M)$.

g. ....

34 *Centrale Maths2 PSI 2016* Thomas Corbères

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, le réel $u_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{\binom{n}{k}}$.

a. Écrire une fonction qui renvoie un tableau de $\binom{p}{k}$ avec $0 \leqslant k \leqslant p \leqslant n$ (sans utiliser les factorielles).

b. Calculer les 20 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Conjecturer une limite.

c. En posant $w_n = \sum_{k=2}^{n-2} \dfrac{1}{\binom{n}{k}}$, montrer que $w_n \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

d. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$.

e. Déterminer le rayon de la série entière associée.

f. Tracer la fonction $x \mapsto (1-x)f(x)$. En déduire une conjecture concernant l'équivalent de f en 1^-. Démontrer cette conjecture.

g. .....

35 *Centrale Maths2 PSI 2016* Samy Essabar

On nous donne une matrice $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ nilpotente d'indice 4.

a. Calculer A^2, A^3, A^4. Quel est le rang de A^k pour $k \in [\![1;4]\!]$?

b. Soit f canoniquement associé à A. Montrer que $\exists u \in \mathbb{R}^4,\ (u, f(u), f^2(u), f^3(u))$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

Quels sont tous les u qui vérifient cette propriété ? Trouver $P \in GL_4(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

c. Soit $B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ donnée (????).

Trouver les valeurs propres de B. Donner les vecteurs propres avec des coefficients entiers.

Montrer que : $\exists u \in \mathbb{R}^4,\ (u, g(u), g^2(u), g^3(u))$ est une base de $\mathbb{R}^4$ où g est canoniquement associé à B.

d. Existe-t-il $u \in \mathbb{R}^4$ tel que $(u, h(u), h^2(u), h^3(u))$ est une base de $\mathbb{R}^4$ si h est canoniquement associé à $A = \lambda I_4$? Même question si A est diagonalisable mais $A \neq \lambda I_4$.

e. Donner une matrice orthogonale qui vérifie cette propriété.

36 *Centrale Maths2 PSI 2016* Léo Fusil (Compléments OdlT 2016/2017 Centrale PSI planche 211 avec Python)

On définit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_0^1 \ln(1+t^n)\mathrm{d}t$.

a. Montrer que I_n est défini. Écrire un programme qui renvoie une liste contenant les I_k pour $k \in [\![0;n]\!]$. On utilisera la méthode des trapèzes avec un pas de 0.01.

b. Tracer les 10 premières valeurs de I_n, puis les 100 et les 1000 premières.

c. Quelle conjecture peut-on faire ? Montrer ce résultat.

d. On pose $L = \int_0^1 \dfrac{\ln(1+u)}{u}\mathrm{d}u$. Montrer que L existe puis écrire un programme qui renvoie une liste contenant les $\dfrac{kI_k}{L}$ pour $k \in [\![0;n]\!]$. Tracer les 10, 100 puis 1000 premières valeurs de la suite $\left(\dfrac{kI_k}{L}\right)_{k\in\mathbb{N}}$.

e. Quelle conjecture peut-on faire ? Montrer que $I_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{L}{n}$.

f. Montrer que $L = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

37 *Centrale Maths2 PSI 2016* Alexandre Janot

Soit f une fonction continue par morceaux et π-périodique sur $\mathbb{R}$, on note g sa restriction à l'intervalle $[0;\pi[$.
a. Étude d'exemples, tracer f dans les cas où g est la fonction suivante : $t \mapsto t$, $t \mapsto e^t$ et $t \mapsto \sin(t)$.
b. Montrer que $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-t}dt$ existe. Calculer dans les 3 cas précédents le rapport $\dfrac{\int_0^{+\infty} f(t)e^{-t}dt}{\int_0^{\pi} f(t)e^{-t}dt}$ et les comparer à $\dfrac{e^\pi}{e^\pi - 1}$. Trouver et démontrer une relation entre $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-t}dt$ et $\int_0^{\pi} tf(t)e^{-t}dt$.
c. On pose $g_n(t) = \dfrac{\cos(2nt)}{4n^2-1}$. Sur quel intervalle $\sum\limits_{n\geqslant 1} g_n$ converge simplement ? Tracer $t \mapsto \dfrac{2}{\pi} - \dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{+\infty} g_n(t)$.
Conjecturer vers quoi converge $\sum\limits_{n\geqslant 1} g_n$ (on l'admettra).
d. encore 2 questions...

38 *Centrale Maths2 PSI 2016* Elliott Jean-François

a. Montrer que (E) : $\mathrm{sh}(x) = 1$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ qu'on appelle α.
b. Coder un programme Python afin d'obtenir un arrondi à 10^{-5} près de α.
c. Coder une fonction *suite(n)* sur Python permettant d'obtenir une valeur approchée de $I_n = \int_0^{\alpha} \mathrm{sh}^n(t)dt$.
d. Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2}.
e. Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$.
f. Trouver un équivalent simple de I_n quand n tend vers $+\infty$.
g. Que dire de la nature de $\sum\limits_{n\geqslant 0} (-1)^n I_n$? Donner un arrondi à 10^{-2} près de la somme associée.

39 *Centrale Maths2 PSI 2016* Émilien Ouzeri

Soit ε l'ensemble des matrices (magiques) M de taille 3 vérifiant

$$\forall i \in [\![1;3]\!],\ \sum_{j=1}^{3} m_{i,j} = \mathrm{Tr}\ (M),\ \forall j \in [\![1;3]\!],\ \sum_{i=1}^{3} m_{i,j} = \mathrm{Tr}\ (M) \ \text{ et } \ m_{1,3} + m_{2,2} + m_{3,1} = \mathrm{Tr}\ (M).$$

a. Montrer que l'application qui a tout élément de ε associe le triplet $(m_{1,1}, m_{2,1}, m_{3,1})$ est un isomorphisme.
b. Écrire un algorithme qui prend en argument 3 réels a, b et c et qui renvoie l'unique matrice M de ε avec (a, b, c) pour première colonne.
Exprimer les matrices pour $A_1 = (1, 1, 1)$, $A_2 = (-1, 3, -2)$ et $A_3 = (2, 9, 4)$.
c. Déterminer le spectre de ces trois matrices. Aboutir à une conjecture, et la prouver.

40 *Centrale Maths2 PSI 2016* Marie Rebière

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \mathrm{Arctan}(n+1) - \mathrm{Arctan}(n)$.
a. Tracer (n, u_n) sur python. Étudier la monotonie et la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
b. Soit $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\varepsilon_n = 0$ ou 1. Étudier la convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} \varepsilon_n u_n$. On note $S(\varepsilon) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n u_n$.
c. Montrer que $0 \leqslant S(\varepsilon) \leqslant \frac{\pi}{2}$. L'inégalité est-elle optimale ?
d. Pour $\varepsilon = (0, 1, 0, 1, 0, \cdots)$, calculer $S(\varepsilon)$ à 10^{-5} près avec python.
e. Montrer que $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\exists \varepsilon \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ telle que $x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n u_n$.
f. Écrire un algorithme prenant en argument le couple (x, N) donnant les N premiers termes d'une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n u_n$.
g. Exécuter le programme pour $N = 50$ et $x = 0,5$ puis pour..... Comparer.

41 <u>*Centrale Maths2 PSI 2016*</u> Arthur Robbe

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0(x) = x$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1}(x) = \dfrac{u_n(x)^2}{n+1}$.

a. Écrire une fonction *suite(n,x)* qui renvoie $u_n(x)$.

b. Tracer $([k, u_k(x)])_{k\in[\![0;n]\!]}$ pour quelques valeurs de x.

c. En particulier pour $x = 1,6616$ et $n = 30$ et pour $x = 1,6617$ et $n = 17$ (pas sûr des valeurs).

d. Montrer l'équivalence entre les assertions suivantes :
(a) $\exists m \geqslant 1,\ u_m > 1$, (b) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 et (c) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

e. Que se passe-t-il si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas ?

f. On pose $w_n = \dfrac{\ln(n+1)}{2^{n+1}}$ et $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} w_k$. Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Donner une approximation de sa limite. On pose $\delta = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$. Donner une approximation de e^{δ}.

g. Pour $x > 0$, on pose $v_n(x) = \dfrac{\ln(u_n(x))}{2^{n+1}}$. Calculer $v_{n+1}(x) - v_n(x)$. En déduire $v_n(x)$ en fonction de x et S_n. En déduire $u_n(x)$ en fonction de x et S_n. Donner la condition sur x pour que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

42 <u>*Centrale Maths2 PSI 2016*</u> Marine Saint-Mézard

Soit E l'ensemble des polynômes scindés sur $\mathbb{R}$ à coefficients dans $\{-1, 0, 1\}$. Soit U l'ensemble des polynômes unitaires de E dont 0 n'est pas racine et U'_n l'ensemble des polynômes de degré n de U.

a. Soit $P \in E$ et $k \in \mathbb{N}^*$, que peut-on dire de $X^k P$? Quelle relation y a-t-il entre E et U ?

b. Quel lien y a-t-il entre U et U'_n ?

c. Déterminer U'_1 et U'_2 ainsi que les racines de ces polynômes. Déterminer U'_3.

d. Déterminer $U \cap \mathbb{R}_3[X]$.

e. Montrer que si $(x_1, \cdots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, alors $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} \dfrac{x_i}{x_j} \geqslant n^2$.

On s'intéresse maintenant à U'_4. Soit $P \in U'_4$ qu'on écrit $P = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + d = \prod\limits_{i=1}^{4}(X - \alpha_i)$.

On admet que $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant 4} \dfrac{\alpha_i^2}{\alpha_j^2} = (a - 2b)\left(\dfrac{c^2}{d^2} - \dfrac{2b}{d}\right)$ (?????).

f. Montrer que U'_4 est non vide.

g. Déterminer U'_n dans le cas général.

h. En développant le produit, démontrer la relation admise précédemment.

i. ....

43 <u>*Centrale Maths2 PSI 2016*</u> Hugo Saint-Vignes

Soit n boules donc p sont blanches et les autres rouges. On les place de manière aléatoire dans n cases numérotées de 1 à n. Pour $i \in [\![1; n-1]\!]$, on définit la variable aléatoire X_i qui vaut 1 s'il y a changement de couleur entre les cases i et $i+1$ et 0 sinon. N est le nombre total de changements de couleur.

a. Faire une fonction Python calculant N (on utilisera *rd.permutation(L)* qui permute les éléments de L).

b. Calculer $E(X_i)$. Calculer $E(N)$.

c. Comment approcher $E(N)$ avec Python.

Pour $n = 24$, tracer $A_p(E(N)\text{théorique}), B_p(E(N)\text{approx})$ en fonction de p.

d. Calculer $V(N)$.

44 <u>*Centrale Maths2 PSI 2016*</u> Clément Suberchicot et Hugo Tarlé

On pose $L = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$.

a. Montrer que L est bien définie et donner une valeur approchée de L.

b. Majorer $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$. En déduire une condition sur n pour que S_n soit une valeur approchée de L à 10^{-8} près. Expliciter cette valeur.

On définit $A_{p,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)\cdots(k+p)}$.

c. Pour $p \geqslant 1$, déterminer une expression simplifiée de $A_{p,n}$. On pourra simplifier $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+p}$.

d. Trouver (a, b, c) tel que :

$$\frac{1}{n^3} = \frac{a}{n(n+1)(n+2)} + \frac{b}{n(n+1)(n+2)(n+3)} + \frac{c}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} + \varepsilon_n \quad \text{avec} \quad \varepsilon_n \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^5}\right).$$

e. Peut-être il fallait majorer $\sum_{k=n+1}^{+\infty} |\varepsilon_k|$!!!!!

45 <u>*Centrale Maths2 PSI 2016*</u> Théo Taupiac (OdlT 2016/2017 Centrale PSI planche 170 avec Python)

Soit $0 \leqslant p \leqslant 1$. On considère deux points *puits* appelés A_0 et A_3, et deux points intermédiaires A_1 et A_2. À l'instant initial, la particule x se situe en A_1. À chaque étape, les probabilités sont les suivantes :

- Si la particule est en A_0 ou A_3, elle y reste (pour toujours).
- Si la particule est en A_1, une probabilité p d'aller en A_0, une probabilité $1 - p$ d'aller en A_2.
- Si la particule est en A_2, une probabilité $1 - p$ d'aller en A_3, une probabilité p d'aller en A_1.

Le but est de modéliser la position finale de la particule au bout de n itérations.

Questions python :

a. Programmer une fonction *saut* qui permet de déterminer la position de la particule à l'itération $K + 1$ connaissant sa position à l'instant K.

b. Écrire une procédure pour obtenir la position de la particule au bout de n itérations, faire des essais avec $p = 0,3$; $p = 0,5$; $p = 0,7$ et $n = 100$.

c. Programmer une fonction *Histogramme*, ayant pour paramètres N, n et p (N étant le nombre de particules étudiées, n le nombre de déplacements) qui retourne le nombre de particules ayant fini en A_0, A_1, A_2 et A_3. Tester la fonction pour $N = 100$, $n = 20$, $p = 0,3$; $p = 0,5$; $p = 0,7$.

Ces résultats vous paraissent-ils surprenants ?

Questions bonus :

Analyse des résultats, donner le puits le plus attracteur pour la probabilité p donnée.

Explication des rares fois où il y a une particule en A_1 ou A_2. (Dépendance de n).

Comment avoir des résultats "plus probants" (valeur de N) ?

Existe-t-il une probabilité qui donne une forme d'équiprobabilité du puits final ? Justifier avec un théorème d'analyse. Idem pour son unicité.

Questions Matrices:

On considère la matrice colonne X_n, avec ${}^tX_n = (P(Y_n = A_0)\ P(Y_n = A_1)\ P(Y_n = A_2)\ P(Y_n = A_3))$ où Y_n est le point où est la particule x à l'instant n.

d. Déterminer la matrice carrée A (ne dépendant pas de n) pour avoir $X_{n+1} = AX_n$.

e. Montrer que A est diagonalisable pour $0 < p < 1$.

f. Pour $p = 0,5$, trouver les éléments propres de A, et calculer la limite de X_n lorsque n tend vers $+\infty$. Discuter pour les autres valeurs de p.

46 *OdlT 2016/2017 Centrale PSI planche 162 avec Python, abordable dès la première année*

Soit $(P_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de polynômes définis par $P_0 = 1$, $P_1 = 2X$ et $P_{n+1} = 2XP_n - P_{n-1}$.

a. Calculer $P_2, \ldots, P_8$.

b. Conjecturer le degré, le coefficient dominant et la parité de P_n. Justifier ces résultats.

c. Vérifier que $< P, Q >= \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}P(t)Q(t)dt$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

d. Calculer $< P_iP_j >$ pour $0 \leqslant i, j \leqslant 8$. Que dire de la famille $(P_i)_{0\leqslant i\leqslant 8}$?

e. Calculer la matrice de Φ, défini par $\Phi(P) = 3XP' - (1-X^2)P''$ dans la base $B = (P_0, \cdots, P_8)$ de $\mathbb{R}_8[X]$. Que peut-on dire de Φ ?

f. Retrouver la résultat concernant la famille $(P_i)_{0\leqslant i\leqslant 8}$ par une autre méthode.

47 *OdlT 2016/2017 Centrale PSI planche 166 avec Python*

a. Justifier que $< P, Q >= \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ et que $N_\infty(P) = \underset{t\in[-1;1]}{Max}|P(t)|$ est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

b. Calculer $< X^k, X^l >$ pour $0 \leqslant k, l \leqslant 5$.

c. On note $F = \mathbb{R}_5[X]$. Déterminer une base orthonormée $(E_0, \ldots, E_5)$ de F en appliquant le procédé de Gram-Schmidt à la base canonique.

d. Tracer les polynômes E_i et trouver $N_\infty(E_i)$ ainsi que la valeur de t pour laquelle elle est atteinte.

e. Montrer que, si P est un polynôme de F tel que $||P|| = 1$, alors $N_\infty(P) \leqslant 3\sqrt{2}$. Quand a-t-on égalité ?

f. Trouver a et b tels que $a||P|| \leqslant N_\infty(P) \leqslant b||P||$.

g. Donner des exemples de polynômes pour lesquels il y a égalité, à droite ou à gauche.

48 *OdlT 2016/2017 Centrale PSI planche 167 avec Python, abordable dès la première année*

a. Résoudre l'équation différentielle $x'' + \omega^2 x = 0$, $x(0) = 0$, $x'(0) = a$ où a et ω sont des réels.

b. Tracer les solutions de $x'' + \omega^2\sin(x) = 0$, $x(0) = a$, $x'(0) = 0$ sur $[0; 10]$ pour $a \in \{0.5, 1, 1.5, 2, 2.5\}$.

c. Pour $r \in]0; 1[$, montrer que la fonction $F : t \mapsto \displaystyle\int_0^t \frac{du}{\sqrt{1-r^2\sin^2(u)}}$ est impaire, strictement croissante et réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

d. Montrer que F et sa bijection réciproque sont C^∞.

e. Pour $r = 0.9$, représenter F sur $[\![-5; 5]\!]$.

f. Représenter $\phi : t \mapsto \text{Arcsin}\left(r\sin(F^{-1}(t))\right)$ sur $[-5; 5]$.

g. On donne $\omega > 0$, $0 < a < 2\omega$, $r = \dfrac{a}{2\omega}$. Montrer que $\phi''(t) + \omega^2\sin(\phi(t)) = 0$.

49 *OdlT 2016/2017 Centrale PSI planche 171 et compléments OdlT 2016/2017 planche 212 avec Python*

a. Justifier l'existence de $I(p, q) = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q}dx$ et $S(p, q) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{nq+p}$ avec $(p, q) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.

b. Écrire sur Python un programme permettant de calculer $I(p, q)$ à 10^{-5} près.

c. Écrire sur Python un programme permettant de calculer $S(p, q)$ à 10^{-5} près.

d. Calculer informatiquement $I(1, 2), I(2, 2)$ et $I(1/2, 1/2)$.

e. Tracer les graphes des fonctions f et g définies par $f(x) = I(1/x, 1/x)$ et $g(x) = S(1/x, 1/x)$ pour $x \in]0; 1]$.

f. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, expliciter $f(n) = I(1/n, 1/n)$.

g. Calculer $I(p, q)$ et $S(p, q)$ pour $(p, q) \in \{(1, 2), (2, 2)\}$. Que conjecturer ?

h. Démonter que $I(p, q) = S(p, q)$.

50 *Compléments OdlT 2016/2017 Centrale PSI planche 213 avec Python*

On note E l'ensemble des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour toute fonction $f \in E$, on définit la fonction $\phi(f)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\forall x > 0,\ \phi(f)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} f(t)\mathrm{d}t$.

a. Montrer que ϕ est définie et continue. $\phi(f)$ appartient-elle nécessairement à E ?

b. Trouver, à l'aide de Python, une relation entre $\phi(f_n)(x)$ et $g(x) = \dfrac{1}{x^2+n^2}$, d'abord pour $f_n(t) = \sin(nt)$ puis pour $f_n(t) = \cos(nt)$. Démontrer ces relations.

c. On donne deux suites (a_n) et (b_n), telles que $a_n \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et $b_n \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Montrer que $S : t \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) \in E$.

d. Expliciter $\phi(S)$.

51 *Compléments OdlT 2016/2017 Centrale PSI planche 216 avec Python*

a. Calculer le polynôme caractéristique de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$.

b. Déterminer le spectre de A à l'aide de Python. A est-elle diagonalisable ?

c. Donner le module des valeurs propres complexes.

d. Montrer que $(A^n)_{n\geqslant 0}$ tend vers une matrice de projecteur.

On donne $u_0 = 2$, $u_1 = 3$, $u_2 = 5$, $u_3 = 8$, $u_4 = 11$ et $u_{n+5} = \dfrac{1}{5}(u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + u_{n+4})$.

e. Donner une relation de récurrence de la forme $U_{n+1} = AU_n$ et, à l'aide de Python, trouver la limite de la suite $(U_n)_{n\geqslant 0}$.

f. On choisit maintenant $v_0 = \ln 2$, $v_1 = \ln 3$, $v_2 = \ln 5$, $v_3 = \ln 8$, $v_4 = \ln 11$, $v_{n+5} = \left(\prod\limits_{k=0}^{4} v_{n+k}\right)^{1/5}$.

Donner le lien entre u_n et v_n.

g. En déduire que $(v_n)_{n\geqslant 0}$ converge et donner sa limite.

h. Expliciter $v_{n+k} = \left(\prod\limits_{s=n}^{n+k-1} v_s\right)^{1/5}$.

52 *Compléments OdlT 2016/2017 Centrale PSI planche 217 avec Python*

a. Soit $f(x, y) = \dfrac{x}{x+y} + \dfrac{50-x}{100-(x+y)}$; justifier que f admet un maximum sur $D = [1; 49] \times [0; 50]$.

b. Tracer sur Python la surface $z = f(x, y)$.

c. Identifier graphiquement le(s) couple(s) pour le(s)quel(s) f est maximale.

d. 50 boules blanches et 50 boules noires sont réparties dans deux urnes U_1 et U_2.

e. On suppose que U_1 en contient 20 blanches et 40 noires, on choisit l'une des deux urnes au hasard, de manière équiprobable et on tire une boule ; donner la probabilité qu'elle soit blanche.

f. Dans le cas général, on note respectivement x et y les nombres de boules blanches et noires dans U_1 ; calculer la probabilité $P(x, y)$ de tirer une boule blanche.

g. Justifier que $P(x, y)$ admet un maximum, donner la (les) répartition(s) du lieu où l'on trouve ce maximum et sa valeur.

h. Écrire un programme Python qui renvoie le(s) couple(s) pour le(s)quel(s) $P(x, y)$ est maximal.

i. Retrouver ce résultat en étudiant les dérivées partielles de F.

53 *Compléments OdlT 2016/2017 Centrale PSI planche 224 avec Python (incomplet)*

Pour a et α réels, on pose $u_0 = \alpha$ et $u_{n+1} = au_n + \dfrac{1}{n+1}$.

a. Écrire une fonction U de paramètres (a, u_0, n) renvoyant u_n.
b. On donne trois courbes : attribuer chacune d'elles à la valeur correspondante de $a \in \{0.9, 1.1, -1.1\}$.
c. Créer un programme Python qui génère ce genre de courbes.
d. Montrer que si $a = 1$, (u_n) diverge vers $+\infty$.
e. On choisit $a = \dfrac{1}{2}$; tracer la ligne brisée joignant les points (u_k, ku_k) pour $1 \leqslant k \leqslant 100$ et tester pour les valeurs $u_0 \in \{0, 1, 10, 50\}$.
f. Émettre une conjecture quant à un équivalent de u_n en $+\infty$.
g. Montrer que $\forall n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{1}{2^n}\left(u_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{2^k}{k}\right)$.
On admet que si (v_n) et (w_n) sont deux suites de réels strictement positifs telles que $v_n \underset{+\infty}{\sim} w_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ diverge, alors $\sum\limits_{k=1}^{n} v_k \underset{+\infty}{\sim} \sum\limits_{k=1}^{n} w_k$.
h. Trouver un équivalent de u_n et un équivalent de $v_n = \dfrac{2^{n+1}}{n+1} - \dfrac{2^n}{n}$.
i. Donner la nature et le rayon de convergence de $\sum u_n x^n$.
j. Exprimer u_n en fonction de n pour α quelconque.

54 *Compléments OdlT 2016/2017 Centrale PSI planche 225 avec Python (incomplet)*

On dit qu'une urne est dans l'état n si elle contient n boules blanches et $n+2$ rouges.
Si on en tire une boule blanche, on la remet et on rajoute une boule rouge ; si la boule tirée est rouge, on ne la remet pas et on retire une boule blanche.
a. Montrer que, à l'issue d'un tirage, on est dans l'état $n+1$ ou $n-1$.
b. Écrire un programme prenant l'état initial en paramètre et renvoyant l'état de l'urne après un tirage.
c. Écrire un programme simulant 1000 tirages en prenant successivement comme état initial $n \in \{5, 10, 20, 100\}$ et tracer un graphe donnant les états successifs de l'urne pour chaque valeur de n.
d. L'expérience s'arrête lorsque l'urne atteint l'état 0 ; modifier l'algorithme pour prendre en compte ce paramètre ; que peut-on conjecturer quant à l'issue de l'expérience ?
e. On note E_j l'évènement : "l'état initial est l'état j et l'expérience s'arrête au bout d'un temps fini" et $P(E_j) = p_j$; montrer que $p_j = \dfrac{j}{2j+2}p_{j-1} + \dfrac{j+2}{2j+2}p_{j+1}$.

55 *Compléments OdlT 2016/2017 Centrale PSI planche 226 avec Python (incomplet)*

a. Montrer que g qui à $P \in \mathbb{R}_n[X]$, associe le reste de la division euclidienne de XP par G, polynôme fixé scindé à racines simples, est un endomorphisme.
b. On choisit $n = 3$ et $G(X) = X(X-1)(X+1)(X+2)$; donner la matrice de g dans la base canonique.
c. g est-il diagonalisable ? Représenter des vecteurs propres de chaque sous-espace propres sur $[-3; 2]$.
d. Dans le cas général, g est-il diagonalisable ?

56 *Compléments OdlT 2016/2017 Centrale PSI planche 228 avec Python (incomplet)*

a. Représenter $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + xy - y^2 = 1\}$.
b. On note H^+ l'ensemble des couples de $H \cap (\mathbb{N}^*)^2$; représenter, avec H les trois premiers éléments de H^+ notés A_1, A_2, A_3.
c. Déterminer la matrice Q canoniquement associée à f, définie par $f(A_1) = A_2$ et $f(A_2) = A_3$ dans $\mathbb{R}^2$ euclidien.
d. Montrer que Q est inversible et calculer Q^n.
e. Pour $U \in H_+$, on pose $M_0 = U$ et $M_{n+1} = f^{-1}(M_n)$.

57 *Compléments OdlT 2016/2017 Centrale PSI planche 229 avec Python (incomplet)*

Un polycopié de 20 pages est fourni par le concours, comportant toute la documentation nécessaire sur la résolution d'équations différentielles, le calcul intégral, le calcul matriciel, le tracé de courbes, etc.

a. Tracer la courbe Γ : $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t}{1+t^3} \\ y(t) = \dfrac{t^2}{1+t^3} \end{cases}$ à l'aide des outils informatiques fournis.

b. Étudier la symétrie de Γ (on pourra poser $u = \dfrac{1}{t}$) et expliquer pourquoi l'étude sur $]-1;1]$ suffit.

c. Donner la formule permettant de calculer la longueur de Γ pour $t \geqslant 0$ puis en calculer une valeur approchée.

58 *Compléments OdlT 2016/2017 Centrale PSI planche 230 avec Python (incomplet)*

On pose $f(x) = 0$ si $x \leqslant 0$ et $f(x) = e^{-1/x}$ sinon.

a. Tracer f sur $[-2;2]$.

b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists P_n \in \mathbb{R}[X]$, $\forall x > 0$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{2n}} f(x)$.

c. Donner P_n pour $1 \leqslant n \leqslant 5$ à l'aide de Python.

d. Quelle est la classe de f sur $\mathbb{R}$?

e. Est-elle développable en série entière au voisinage de 0 ?

f. Tracer $g(x) = f(x)f(1-x)$ et $h(x) = \dfrac{\int_0^x g(t)dt}{\int_0^1 g(t)dt}$ sur un intervalle bien choisi.

59 *Compléments OdlT 2016/2017 Centrale PSI planche 231 avec Python*

Un jeton circule dans une boîte à 4 cases consécutives numérotées $1, 2, 3, 4$. À $n = 0$ il est dans la case 1.

À l'instant n, s'il est dans la case 1, il sera, à l'instant $n+1$, dans l'une quelconque des quatre cases de manière équiprobable ; s'il est dans la case k, il sera dans la case $k-1$ au tour suivant.

a. Écrire un programme qui prend n en argument et renvoie la liste des positions successives du jeton.

b. Tracer l'ensemble des positions pour $n \in \{10, 50, 100\}$.

c. On pose $U_k = \begin{pmatrix} P(X_k = 1) \\ P(X_k = 2) \\ P(X_k = 3) \\ P(X_k = 4) \end{pmatrix}$. Trouver A telle que $U_{n+1} = AU_n$ et en déduire que $U_n = A^n U_0$.

d. Diagonaliser A, en déduire que (U_n) converge et donner sa limite.

e. Donner la loi de Y_i, nombre de passage du jeton par le point i.

60 *Compléments OdlT 2016/2017 Centrale PSI planche 233 avec Python (incomplet)*

a. Montrer que l'ensemble des matrices $A(s,t) = \begin{pmatrix} t & t & t & t \\ s & t & t & t \\ s & s & t & t \\ s & s & s & t \end{pmatrix}$, avec $(s,t) \in \mathbb{R}^2$, est un espace vectoriel.

Quelle est sa dimension ?

b. Est-il stable par le produit matriciel ?

c. Montrer que $\exists! t_0 \in \mathbb{R},\ A(0,t_0)$ est diagonalisable.

d. Soit $t \neq t_0$; montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle l'endomorphisme canoniquement associé à $A(0,t) - tI_4$ a pour matrice **e.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

f. Écrire un programme Python prenant deux réels s et t en argument et renvoyant la matrice $A(s,t)$.

g. Stocker dans une liste les matrices $A(1,t)$, $t \in \{1,2,3,4,5\}$.

h. À l'aide de Python, montrer que ces cinq matrices sont diagonalisables. Quel est le rang de $A(1,1)$?

i. Prendre trois valeurs de t au choix et dire si $A(1,t)$ est diagonalisable.

j. Quelle conjecture peut-on faire ?

61 *Compléments OdlT 2016/2017 Centrale PSI planche 234 avec Python*

L'exercice présentait deux matrices, A et P, de taille 6x6 (coefficients oubliés).

On note B_C la base canonique de $\mathbb{R}^6$ et u l'endomorphisme canoniquement associé à A.

a. Entrer A sous Python et vérifier que son spectre est dans $\mathbb{N}$.

b. Déterminer le rang de A et trouver $p = \mathrm{Min}\{k \in \mathbb{N},\ \operatorname{rang} A^k = \operatorname{rang} A^{k+1}\}$.

c. Montrer que P est inversible.

On note B la base de $\mathbb{R}^6$ telle que P soit la matrice de passage de B_C à B et on pose $M = P^{-1}AP$.

d. Calculer $2\det(P)M$.

e. Trouver une base de chaque sous-espace propre de A, dont les vecteurs ont des coordonnées entières.

f. Trouver une base de $\mathrm{Ker}(u)$ puis une base B_k de $\mathrm{Ker}(A^k)$, contenant B_{k-1} pour tout k dans $[\![2;p]\!]$

62 *Compléments OdlT 2016/2017 Centrale PSI planche 236 avec Python*

À l'aide de Python, étudier l'arc $\begin{cases} x(t) = \sqrt{\cos^2 t + 4\cos t + 3} \\ y(t) = \sin t \end{cases}$: ensemble de définition, symétries, variations, points singuliers, tracé.

63 *Compléments OdlT 2016/2017 Centrale PSI planche 237 avec Python (incomplet)*

a. $f : t \mapsto t^2 \ln(t)$ et $g : t \mapsto t \ln^2(t)$ sont-elles continues en 0 si on pose $f(0) = g(0) = 0$? Dérivables ?

b. Représenter l'arc paramétré $C = (f(t), g(t))$ pour $t \geqslant 0$.

c. La courbe présente-t-elle une branche infinie ?

d. Montrer qu'il existe un point double et donner la tangente en ce point.

e. Donner une approximation de la longueur de l'arc compris entre les deux paramètres du point double.

f. Montrer qu'il existe une tangente passant par l'origine en dehors de la tangente à l'origine.

64 *Compléments OdlT 2016/2017 Centrale PSI planche 238 avec Python*

On donne $\varphi_M(X) = {}^tXMX$ où $X \in \mathbb{R}^n$.

a. Pour $n = 2$, $M = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ et $(x, y) \in [-2; 2]^2$, tracer sur Python la surface correspondant à $f(x, y) = \varphi_M(X)$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

b. Déterminer les éventuels extrema sur $\mathbb{R}^2$.

c. Montrer que f est surjective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

d. Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se décompose comme la somme d'un matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique. Cette décomposition est-elle unique ?

e. Écrire en Python une fonction qui donne la partie symétrique S d'une matrice. L'appliquer à $M =$? *une matrice 3x3 avec des coefficients de l'ordre de la centaine positifs et négatifs.*

f. Calculer $\varphi_S(x, y, z)$ et $\varphi_M(x, y, z)$ pour $(x, y, z) \in \{-2, 2\}^3$, puis pour d'autres valeurs. Que peut-on conjecturer ?

g. Montrer que $\varphi_S = \varphi_M$ pour toute matrice réelle, avec S la partie symétrique.

h. Soit M nilpotente. Quel est le lien entre $\mathrm{Tr}\,(M)$ et $\mathrm{Tr}\,(S)$?

i. Déterminer le spectre réel de M.

j. Quelle est l'image de l'application φ_M ?

65 *Compléments OdlT 2016/2017 Centrale PSI planche 241 avec Python*

a. Donner le domaine de convergence simple D de $f = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$ si $f_n(z) = \dfrac{z^{2^{n-1}}}{\sum\limits_{k=0}^{2^n-1} z^k}$ avec $z \in \mathbb{C}$ et $n \geqslant 1$.

b. Écrire une fonction Python $f(n, z)$ donnant $\sum\limits_{k=0}^{n} f_k(z)$.

c. Lorsque c'est possible, donner les valeurs à 10^{-5} près de $f(1)$, $f(-1)$, $f(2)$, $f(-2)$ (en tout une dizaine de valeurs).

d. Tracer f sur $[-2; 2] \cup D$. Que conjecturer ?

e. $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ est-elle uniformément convergente sur $\mathbb{R} \cap D$?

f. Exprimer f à l'aide de fonctions usuelles.

PARTIE 4 : 2017

66 *Centrale Maths2 PSI 2017* Aloïs Blarre

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ et, pour tout $n \geqslant 1$, $f_n : x \mapsto f\left(\dfrac{x}{n}\right)$.

a. Tracer sous Python les premiers termes de la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ pour $f : x \mapsto \sqrt{x}$, $f : x \mapsto e^x$, $f : x \mapsto \ln(x)$ et $f : x \mapsto \sin\left(2\pi\dfrac{\ln(x)}{\ln(2)}\right)$. Conjecturer la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ pour ces différentes fonctions.

b. On suppose que f admet une limite finie en 0. Montrer que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement.
Montrer que si $a > 0$, la converge est même uniforme sur $]0; a]$.

c. On suppose maintenant que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement si et seulement si $f(0) = f'(0) = 0$.

67 *Centrale Maths2 PSI 2017* Vincent Bouget

Soit a et b deux réels, $n \geqslant 2$ un entier et $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour $P \in E$, on définit $f(P) = (X-a)(X-b)P' - nXP$.

a. Montrer que f est un endomorphisme de E.

b. Écrire la matrice M de f dans la base canonique de E.

c. Écrire une fonction $\mathtt{matrice}(n, a, b)$ qui renvoie la matrice M.

d. Écrire une fonction $\mathtt{elementspropres}(n, a, b)$ qui renvoie les éléments propres de la matrice M.

e. Appliquer la fonction précédente dans les cas suivants : $n = 2$, ($a = 1$ et $b = 0$) ou ($a = 1$ et $b = -1$).

f. f est elle diagonalisable ?

Question subsidiaire : on prend K dans E et on définit $(P|Q) = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)K(t)dt$.

- Condition sur K pour que cette fonction soit un produit scalaire sur E.
- Condition sur K pour que les vecteurs propres de f forment une base orthonormale pour ce produit scalaire.

68 *Centrale Maths2 PSI 2017* Adrien Cassagne

Pour $k \geqslant 1$, on définit f_k sur $]0; 1[$ par $f_k(x) = \dfrac{1}{x} + \sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{1}{x-k}$.

a. Tracer les fonctions f_k pour $k \in [\![1; 5]\!]$.

b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists! u_n \in]0; 1[,\ f_n(u_n) = 0$.

c. À l'aide d'une méthode de dichotomie, donner une valeur approchée de u_n à 10^{-8} près.

d. Conjecturer le sens de variation de $(u_n)_{n\geqslant 1}$ puis démontrer qu'elle converge.

69 *Centrale Maths2 PSI 2017* Alexandre Chamley

On donnait deux matrices A et B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ayant les mêmes valeurs propres simples.

a. Déterminer $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que PAP^{-1} et PBP^{-1} soient égales et diagonales.

b. Y a-t-il unicité de cette matrice P ?

On donnait à nouveau deux matrices A et B ayant les mêmes valeurs propres mais de multiplicité 1 et 2.

c. Déterminer $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que PAP^{-1} et PBP^{-1} soient égales et diagonales.

d. Y a-t-il unicité de cette matrice P ?

e. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$. Montrer l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E composée de vecteurs propres communs à u et à v.

70 *Centrale Maths2 PSI 2017* Célia Detrez et Agathe Maldonado

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \mathrm{Arctan}(n+1) - \mathrm{Arctan}(n)$.

a. Tracer avec Python la ligne polygonale formée par les points $M_k = (k, u_k)$ pour $k \in [\![0;50]\!]$.

b. Étudier la monotonie et la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c. Trouver un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$.

d. Soit $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ une suite. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} \varepsilon_n u_n$ converge. On note $S(\varepsilon)$ sa somme. Montrer que $0 \leqslant S(\varepsilon) \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ et que cet encadrement est optimal.

f. Soit $\varepsilon = (0,1,0,1,0,1,\ldots)$. Donner une valeur de $S(\varepsilon)$ à 10^{-5} près.

g. Montrer que $\forall x \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right],\ \exists \varepsilon \in \{0,1\}^{\mathbb{N}},\ x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n u_n$.

h. Écrire un algorithme prenant en argument le couple (x, N) avec $x \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ et $N \in \mathbb{N}$ et qui renvoie les N premiers termes de ε telle que $x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n u_n$.

71 *Centrale Maths2 PSI 2017* Joseph Dumoulin

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^7 + 0,99x - 2,03$.

a. Tracer la courbe de f sur des intervalles proposés.

b. Montrer que $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle r et donner un encadrement de r par deux entiers.

c. Déterminer une valeur de r à 10^{-5} près.

d. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = x^7 + x - 2$. Tracer h et f sur le même graphe autour de r et r_0 (unique solution réelle de $h(x) = 0$).

Dans la suite, soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,p,q) = x^7 + px - q$. On admet qu'il existe $\phi \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ qui vérifie : $g(x,p,q) = 0 \iff x = \phi(p,q)$. On définit alors $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $F(p,q) = g(\phi(p,q),p,q)$.

e. Donner les dérivées partielles de F en fonction de p et q.

f. En déduire les dérivées partielles de ϕ.

g. Faire le développement limité de ϕ autour de $(1,2)$.

h. Déterminer un équivalent de $r - r_0$ (pas sûr !).

72 *Centrale Maths2 PSI 2017* Élio Garnaoui

Pour $n \geqslant 0$, on définit $f_n(x) = \prod\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{x+k}$. Puis $F(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ et $G(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

a. Montrer que F et G sont bien définies sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Représenter avec Python les premières sommes partielles des deux séries sur un intervalle bien choisi. Représenter aussi $\dfrac{F}{G}$ et conjecturer.

On admet qu'il existe une famille de réels $(\alpha_{i,n})_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\ n\in\mathbb{N}}}$ telle que $\forall x > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ f_n(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} \dfrac{\alpha_{i,n}}{x+i}$.

c. En considérant un équivalent de $f_n(x)$ en $-i$, déterminer $\alpha_{i,n}$.

d. Prouver la conjecture faire à la question **b.**.

e. Trouver un équivalent de F en 0 (pas sûr).

73 *Centrale Maths2 PSI 2017* Nelson Gary

Soit $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ continue. On pose, pour $n \geqslant 1$, $S_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$. On pose $I_{0,n}(f) = S_{2^n}(f)$.

Le module numpy est autorisé.

a. Écrire une fonction permettant de calculer cette somme $S_n(f)$.

b. Calculer $I_{0,n}(f) - I_{0,n-1}(f)$.

c. On prend $f(x) = \dfrac{4}{1+x^2}$. Comparer numériquement $I_{0,8}(f)$ et $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.

On pose maintenant, pour $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, le réel $I_{m,n}(f) = ...$

d. Trouver une relation de récurrence sur les $I_{m,n}(f)$.

e. En déduire le tableau des $I_{m,n}(f)$ pour $(m,n) \in [\![1;8]\!]^2$.

f. Comparer la valeur de $I_{8,0}(f)$ à celles trouvées précédemment.

74 *Centrale Maths2 PSI 2017* Valentin Gorce

Soit $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots, +a_1X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les racines de P (répétées avec leur ordre de multiplicité). On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$ et, pour $k \geqslant 1$, $P_k = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i^k)$.

a. Déterminer le polynôme caractéristique de A.

b. Écrire $\mathrm{Poly}(k, L)$ avec $k \geqslant 1$ et L la liste des coefficients de P, et qui renvoie les coefficients de P_k.

c. Montrer que si les $a_0, \cdots, a_{n-1}$ sont des entiers, alors les coefficients de P_k le sont aussi.

75 *Centrale Maths2 PSI 2017* Élisa Gressier-Monard

Soit $f(x) = (1 - \cos(5\pi x))x(1-x)$ et $M = \operatorname*{Sup}_{x\in[0;1]} f(x)$. On pose $I_n = \int_0^1 f(x)^n \mathrm{d}x$ et $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} I_k x^k$.

a. Tracer la courbe représentative de f et conjecturer la valeur de M.

b. Faire afficher les premiers termes de la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$.

c. Tracer S_n pour $n \in \{0, 10, 20, 30, 40, 50\}$. Que peut-on en conclure ?

d. Rayon de convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} I_n x^n$?

e. On pose $u_n = \dfrac{I_{n+1}}{I_n}$. Monotonie de $(u_n)_{n\geqslant 0}$? Convergence ?

76 *Centrale Maths2 PSI 2017* Tom Huix

Pour $n \geqslant 2$, on définit $M = \left(\dfrac{(-1)^{i+j+1}+1}{2}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (matrice échiquier avec alternance de 0 et de 1 avec des 0 sur la diagonale). Par exemple si $n = 3$: $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Écrire une fonction prenant n en argument et qui renvoie la matrice M d'échiquier de taille n.

b. Écrire une fonction renvoyant une liste contenant les matrices d'échiquier de taille $2p$ pour $p \in [\![1;100]\!]$.

c. Conjecturer sur la valeur de $M^3 - p^2M$.

d. Prouver que M est diagonalisable.

e. Trouver une base de chaque sous-espace propre.

f. Montrer que ces sous-espaces propres sont orthogonaux deux à deux.

g. Trouver une expression de la projection orthogonale sur E_0.

77 *Centrale Maths2 PSI 2017* Thomas Laborde

On définit deux suites de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $f_0 = 1$, $g_0 = 0$ et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, les relations $f_{n+1}(t) = f_n(t) - tg_n(t)$ et $g_{n+1}(t) = g_n(t) + tf_n(t)$.

a. Écrire un code Python permettant de calculer $f_n(t)$ et $g_n(t)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$, on note $z_n(t) = f_n(t) + ig_n(t)$. Soit, dans le plan complexe, le point $M_n(t) = \dfrac{z_n(t)}{|z_n(t)|}$.

b. Tracer $(M_n(t))_{n\in[\![0;10]\!]}$ pour $t = 1/2$ et $t = 1/3$.

c. On définit la suite de fonctions $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in \mathbb{R},\ h_n(t) = f_n\left(\dfrac{t}{n}\right)$. Tracer h_n sur $[0; 2\pi]$ pour $n = 10$, $n = 20$ et $n = 100$. Conjecturer la valeur de $h_n(t)$.

d. Montrer qu'il existe deux suites $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathbb{R},\ f_n(t) = \rho_n(t)\cos(\theta_n(t))$ et $g_n(t) = \rho_n(t)\sin(\theta_n(t))$. Donner les expressions de $\rho_n(t)$ et $\theta_n(t)$.

e. Soit deux suites de fonctions continues $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui convergent uniformément sur un segment $[a; b]$ vers des fonctions u et v.

Montrer que $(\cos \circ u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\cos \circ u$.

Montrer que $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers uv.

f. Vérifier l'hypothèse faite sur $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à la question **c.**.

78 *Centrale Maths2 PSI 2017* Maxime Lacourcelle

Soit $f :]-1; 1[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des coefficients du DSE de f.

a. Trouver une relation de récurrence entre a_n et a_{n+1}.

b. Écrire une fonction qui prend en entrée n et calcule la valeur de a_n.

c. Écrire une fonction qui prend en entrée n et x, et qui calcule $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$.

d. Tracer les a_n en fonction de n, pour n entre 0 et 10.

e. Conjecturer, grâce a cela, la monotonie de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et sa limite.

f. Le démontrer. Indication : on pourra étudier la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \ln\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$.

g. ....

79 *Centrale Maths2 PSI 2017* Bastien Lamagnère

Soit $n \geqslant 2$ et $A(n) = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n+1} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définie par $a_{i,j} = \dfrac{1}{i+j-1}$.

a. Écrire une fonction $\mathsf{Matrice}(n)$ qui renvoie la matrice $A(n)$.

b. Renvoyer les valeurs propres de $A(2)$, $A(3)$ et $A(4)$.

c. Prouver l'existence de $m(n)$: la plus petite valeur propre de $A(n)$.

d. Écrire une fonction $\mathsf{Plus\_Petite\_Valeur\_Propre}_A(l, n)$ qui renvoie le graphe de la fonction $k \mapsto m(k)$ sur $[\![l; n]\!]$. Que peut-on conjecturer ?

f. Montrer que $m(n)$ est positif et qu'il tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

g. Rappeler la définition d'une norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

h. Montrer que $M(n) = \sup\limits_{X\in S_n} ({}^tXA(n)X)$ existe où $S_n = \{X \in \mathbb{R}^n \mid ||X|| = 1\}$.

i. Montrer que $M(n)$ est la plus grande des valeurs propres de $A(n)$.

80 Centrale Maths2 PSI 2017 Cléa Maricourt

Soit $f :]0;1] \to \mathbb{R}$ continue. On pose, pour $n \geqslant 1$, $S_n(f) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$.

a. Écrire une fonction permettant de calculer cette somme. La tester avec les fonctions suivantes :

• $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ • $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ • $f(x) = \ln(x)$ $f(x) = \cos(x)$.

Conjecturer la limite de $(S_n(f))_{n\geqslant 1}$ en prenant n entre 1 et 2^{15}.

b. On prend $g(x) = x\sin\left(2^{1/x}\pi\right)$. Calculer $S_n(g')$ et $\displaystyle\int_0^1 g'(t)\mathrm{d}t$.

c. On suppose f continue et décroissante. Montrer que $\dfrac{S_n(f)}{n} \leqslant \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.

Soit $\alpha \in]0;1]$ et $M = \operatorname{Sup}\limits_{[\alpha;1]}(|f'|)$.

d. Montrer que $f(t) - \dfrac{M}{n} \leqslant f\left(\dfrac{k}{n}\right) \leqslant f(t)$.

e. ......

f. Donner les cas où les résultats de la question **c.** sont faux.

81 Centrale Maths2 PSI 2017 Clément Maurel

Soit $f_2(x,y) = x^2 + y^2 - \ln(y-x)$.

a. Tracer f_2 en Python pour $(x,y) \in [-10;10]^2$ avec un pas de $0,1$. Même chose pour $(x,y) \in [-1;1]^2$.

b. Soit (a,b) un point critique de f_2 (on suppose qu'il existe). Tentez de trouver les coordonnées a et b avec Python (section analyse numérique). Utiliser le tracé de la courbe de f_2 pour définir le point de départ de la recherche. Est-il possible de résoudre informatiquement ?

c. Trouver les coordonnées du point critique manuellement.

Soit $f_n : (x_1,\cdots,x_n) \mapsto \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 - \sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} \ln(x_j - x_i)$ avec $x_1 < \cdots < x_n$.

d. Expliciter $\dfrac{\partial f_n}{\partial x_k}$ pour $k \in [\![1;n]\!]$.

Soit $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ un point critique de f_n. On définit $P = \prod\limits_{i=1}^{n}(X-\alpha_i)$ et $Q_k = \prod\limits_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}(X-\alpha_i)$ pour $k \in [\![1;n]\!]$.

e. Montrer que $P'(\alpha_k) = Q(\alpha_k)$, $P''(\alpha_k) = 2Q'(\alpha_k)$ et que $\dfrac{Q_k'(\alpha_k)}{Q_k(\alpha_k)} = 2\alpha_k$.

82 Centrale Maths2 PSI 2017 Vincent Meslier

On considère $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $P = X^5 + X^4 - 10X^3 + 6X^2 + 9X - 7$ et $u_n = \dfrac{\operatorname{Tr}\left(M^{n+1}\right)}{\operatorname{Tr}\left(M^n\right)}$.

a. Trouver les racines entières de P et déterminer une factorisation de P, puis toutes les racines de P.

b. Calculer les 40 premiers termes de $(u_n)_{n\geqslant 0}$. Qu'en conclure ?

c. Vérifie que P annule M.

On définit M et P de manière générale (matrice compagnon).

d. Montrer que P annule M.

e. Trouver l'expression de u_n en fonction des valeurs propres de M.

83 *Centrale Maths2 PSI 2017* Claire Meunier

On pose $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^{n^2}$.

a. Domaine de définition de f.

b. Créer un programme Python qui renvoie la somme partielle de $-n$ à n : $S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} x^{k^2}$.

c. Approximation à 10^{-5} de la somme précédente par rapport à $f(1/2)$.

d. Tracer l'approximation de $g(x) = \sqrt{\dfrac{\pi}{1-x}}$ et les valeurs de la somme. Conjecture (en 1).

e. Trouver un équivalent de f en 1. Indication : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t^2}\,dt = \sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha}}$ pour $\alpha > 0$.

On note $r_2(n)$ le nombre de façons d'écrire l'entier $n \in \mathbb{N}$ comme une somme de deux carrés (d'entiers).

f. Écrire un programme donnant $r_2(n)$.

g. Donner les valeurs de $r_2(n)$ jusqu'à $n = 100$.

On pose $h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} r_2(n)x^n$.

h. Déterminer le domaine de définition de h.

i. Trouver une relation entre h et f. En déduire un équivalent de h en 1.

84 *Centrale Maths2 PSI 2017* Sam Pérochon

Soit H_n l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ dont les coefficients valent ± 1 et dont les colonnes sont orthogonales deux à deux. Soit SH_n les matrices de H_n qui sont symétriques.

a. Donner une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Programmer une fonction qui renvoie la norme d'une matrice.

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients valent ± 1.

b. Montrer que $A \in H_n \iff {}^tAA = nI_n$.

c. Que fait l'instruction $[[x, y] \texttt{ for } x \in [0, 1] \texttt{ for } y \texttt{ in } [0, 1]]$?

d. Déterminer les matrices et le cardinal de H_4.

e. Déterminer les matrices et le cardinal de SH_4.

f. À quoi est égal l'ensemble $T = \{\mathrm{Tr}\,(A) \mid A \in SH_4\}$?

g. À quoi est égal l'ensemble $T = \{\mathrm{Tr}\,(A) \mid A \in H_8\}$?

85 *Centrale Maths2 PSI 2017* Claire Raulin

Soit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = a_1 = 1$ et la relation $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = a_{n+1} + \dfrac{2a_n}{n+2}$.

a. Écrire une fonction $\mathsf{suite}(n)$ qui renvoie les termes $a_2, \cdots, a_n$.

b. Montrer que $\forall n \geqslant 1,\ 1 \leqslant a_n \leqslant n^2$. En déduire le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$.

c. Écrire une fonction pour tracer la solution de l'équation $(E)\ :\ (1-x)y' = (2x+1)y$ avec $y(0) = 1$.

d. Montrer que $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est solution de cette équation.

e. Calculer la solution générale de cette équation et en déduire les coefficients a_n.

86 *Centrale Maths2 PSI 2017* Antoine Romero-Romero

On considère une urne contenant n boules, numérotées de 0 à $n-1$.
On tire successivement 3 boules aléatoirement dans l'urne, avec remise.
On note respectivement X, Y et Z les numéros des première, deuxième et troisième boule tirée.
a. Écrire un code Python qui simule l'experience aléatoire, puis renvoie un booléen qui prend la valeur True si $X+Y=Z$, False sinon.
b. Calculer $p_n = P(X+Y=Z)$.
c. Écrire un code Python permettant de vérifier la valeur de p_n.
d. Utiliser des fonctions génératrices pour calculer $P(X+Y+Z=k)$ pour $k \in [\![0; n-1]\!]$.
e. Que peut-on dire de p_n et $P(X+Y+Z=n-1)$?
f. ...... ???? Il me semble qu'il fallait à nouveau écrire un code.
On considère maintenant la même expérience, sans remise.
On note A, B et C les numéros des trois boules tirées, et $q_n = P(A+B=C)$.
g. Écrire un code Python permettant de simuler la valeur de q_n. On pourra utiliser la fonction permutation du module numpy.random qui mélange une liste L aléatoirement.
h. Montrer que $q_n \underset{+\infty}{\sim} p_n$.

87 *Centrale Maths2 PSI 2017* Alexis Trubert

On note L_p^n l'ensemble des listes de n éléments à valeurs dans $[\![1; p]\!]$.
On dit qu'une liste est surjective si chaque élément de $[\![1; p]\!]$ est contenu dans cette liste.
On note alors S_p^n l'ensemble des listes surjectives de I_p^n, et $s_{n,p}$ son cardinal.
a. Que fait le programme suivant ?

```
L = [1, 2, 3]
L0 = [ [ ] ]
L1 = [ l + [a] for l in L0 for a in L ]
L2 = [ l + [a] for l in L1 for a in L ]
L3 = [ l + [a] for l in L2 for a in L ]
```

b.Écrire une fonction qui permet de tester si une liste est surjective, prenant en argument cette liste et p.
Quelle est la complexité de cet algorithme ? Peut-on faire mieux ?
c. Se servir de la fonction précédente calculer $s_{n,p}$ pour $p \in \{3,4,5\}$ et $n \in [\![1; 7]\!]$.
d. Soit $i \in [\![1; p]\!]$, on note A_i l'ensemble des listes de L_p^n qui ne contiennent pas i.
Déterminer card (L_p^n), card (A_i) et card $(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_i)$.
e. En déduire que $s_{n,p} = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{p+i} \binom{p}{i} i^n$. Indication : on pourra utiliser la formule du crible suivante card $(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n}$ card $(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k})$.

88 *Centrale Maths2 PSI 2017* Grégoire Verdès

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $A_n = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{i,j} = \frac{j}{i} + \frac{i}{j}$.
Parmi les différentes fiches Python à disposition, celle-ci était indispensable :
https://www.concours-centrale-supelec.fr/CentraleSupelec/SujetsOral/Multi/Python-matrices.pdf
a. Écrire une fonction A de paramètre n et qui renvoie sous forme d'un tableau numpy la matrice A_n.
Exécuter la fonction pour $n = 2, 3$ et 4. La matrice A_n est-elle diagonalisable ?
b. Pour $n \in [\![2; 100]\!]$, calculer à l'aide de Python le rang de A_n. Émettre une conjecture, puis la démontrer.
c. Pour $n \geqslant 3$, quelle est la valeur propre commune à toutes les A_n ?
Donner la dimension de l'espace propre associé.
d. À l'aide de Python, calculer, pour $n \in [\![2; 100]\!]$, les valeurs de $\mathrm{Tr}\,(A_n)^2$ et $\mathrm{Tr}\,(A_n^2)$.
Émettre une conjecture et la démontrer.
e. Écrire une fonction $\mathtt{non}_{\mathtt{n}}\mathtt{ulle}$ de paramètre n qui renvoie toutes les valeurs propres non nulles de A_n.
L'exécuter pour $n \in [\![2; 10]\!]$, pour $n = 100$, $n = 1000$ par exemple. Que remarque-t-on ?

89 *OdlT 2017/2018 Centrale PSI planche 162 avec Python*

f est une fonction non identiquement nulle, positive, continue et définie sur $[0,1]$; on note $M = \sup\limits_{x\in[0,1]} f(x)$.

a. On choisit $f_1(x) = x(1-x)\big(1+\cos(5\pi x)\big)$.
Tracer le graphe de f sur $[0;1]$ et déterminer une valeur approchée de M.

b. Écrire une fonction prenant en argument n et retournant $I_n = \displaystyle\int_0^1 f(x)^n dx$.

c. Tracer le graphe de $S_n : x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} I_k x^k$ sur $[-a;a]$ où $a = \dfrac{1}{M} + 0,1$ pour $f = f_1$ et $n \in \{10, 20, 30, 40, 50\}$.
Commenter.

d. Déterminer le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} I_n x^n$.

e. Soit $u_n = \dfrac{I_{n+1}}{I_n}$. Tracer les points $A_n = (n, u_n)$ pour les 30 premières valeurs et $f = f_1$. Que conjecturer ?

f. Étudier la monotonie et la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

90 *OdlT 2017/2018 Centrale PSI planche 164 avec Python, abordable dès la première année*

Soit $P \in \mathbb{C}_p[X]$, $Q \in \mathbb{C}_q[X]$ et $u(A,B) = AP + BQ$ définie sur $\mathbb{C}_{q-1}[X] \times \mathbb{C}_{p-1}[X]$.
Soit $\beta = \big((1,0), \ldots, (X^{q-1}, 0), (0,1), \ldots, (0, X^{p-1})\big)$, base de $\mathbb{C}_{q-1}[X] \times \mathbb{C}_{p-1}[X]$.

a. Donner la matrice $M_{P,Q}$ de u dans β en fonction des coefficients de P et Q.

b. Écrire un programme Python qui prend les listes associées aux coefficients de P et Q en paramètre et donne cette matrice.

c. On choisit $P(X) = X^4 + X^3 + 1$ et $Q(X) = X^3 - X + 1$. Montrer qu'il existe un unique $(A_0, B_0) \in \mathbb{C}_2[X] \times \mathbb{C}_3[X]$ tel que $A_0 P + B_0 Q = 1$.
On choisit $P = (X-1)(X-2)(X+2)$ et $Q_a = X(X-1)(X-a)$.

d. Tracer sur $[-2,1; 2,1]$, la fonction $d : t \mapsto \det(M_{PQ_t})$.

91 *OdlT 2017/2018 Centrale PSI planche 166 avec Python*

Un plateau de type monopoly compte 12 cases numérotées de 0 à 11. Le joueur commence sur la case 0.
On note Y_n la variable aléatoire associée au numéro de la case sur laquelle se trouve le joueur après le n-ième lancer d'un dé à six faces équilibré. On considère les lancers de dés indépendants.

a. Justifier $Y_n(\Omega) = [\![0;11]\!]$ et donner la loi de Y_0.

b. Écrire une fonction permettant de calculer Y_n.

c. Afficher les fréquences de $Y_n(\omega) = k$ avec $n \in \{50, 100, 200, 500\}$ et pour 5000 simulations.

d. Exprimer $P(Y_{n+1} = k)$ en fonction des $\big(P(Y_n = i)\big)_{0\leqslant i\leqslant 11}$.

e. Soit $U_n = \big(P(Y_n = 0), \ldots, P(Y_n = 11)\big)^T \in \mathcal{M}_{12,1}(\mathbb{R})$. Déterminer P telle que $U_{n+1} = PU_n$.

f. Exprimer U_n en fonction de U_0. P est-elle diagonalisable ?

92 *OdlT 2017/2018 Centrale PSI planche 168 avec Python*

On donne $f(x) = \dfrac{1}{2-e^x}$ et on note $a(n) = \dfrac{D^n f(0)}{n!}$.

a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ a(n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{a(n-k)}{k!}$ (on pourra utiliser $(2-e^x)f(x)$).

b. Écrire $a(n)$ sur Python pour $0 \leqslant n \leqslant 10$.

c. Tracer les courbes $\big(n, a(n)\big)$, $\Big(n, \dfrac{1}{(\ln 2)^n}\Big)$ et $\Big(n, \dfrac{1}{2(\ln 2)^n}\Big)$ pour $0 \leqslant n \leqslant 100$.
En déduire le rayon de convergence de $S(x) = \sum\limits_{n\geqslant 0} a(n)x^n$.

d. Tracer l'approximation de $S(x)$ pour $0 \leqslant n \leqslant 6$, tracer $f(x)$ sur $[0;10]$.

Que peut-on en déduire ? Le démontrer.

93 *OdlT 2017/2018 Centrale PSI planche 170 avec Python, abordable dès la première année*

a. Calculer, grâce à Python, les 50 premiers termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $u_n = \mathrm{Arctan}(n+1) - \mathrm{Arctan}(n)$.
b. Étudier la monotonie, la convergence et déterminer un équivalent de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
c. On note e une suite de 0 et de 1. Montrer l'existence de $S(e) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} e_n u_n$ et montrer que $0 \leqslant S(e) \leqslant \frac{\pi}{2}$.
d. Pour $e = (0, 1, 0, 1, \ldots)$, trouver à 10^{-5} près la valeur de $S(e)$.
e. Soit $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$. Montrer qu'il existe une suite e telle que $x = S(e)$.
f. Implémenter en Python pour un x donné.

94 *OdlT 2017/2018 Centrale PSI planche 173 avec Python*

La probabilité d'obtenir pile en lançant une pièce est $p \in [0; 1]$. On note E_n l'évènement "ne pas obtenir 2 piles d'affilée au cours des n premiers lancers" et p_n sa probabilité.
a. Écrire un programme qui prend n et p pour paramètres et renvoie *True* si E_n et *False* sinon.
b. Montrer que $p_{n+2} = (1-p)p_{n+1} + p(1-p)p_n$ et en déduire que l'évènement "obtenir 2 piles d'affilée sur un nombre infini de lancers" est presque sûr.
c. Écrire un programme qui donne la probabilité T d'obtenir pile aux lancers $n-1$ et n pour p fixé.
d. Donner la fonction génératrice de T, montrer que T admet une espérance et la calculer.
e. Écrire un programme qui vérifie la valeur de cette espérance.

95 *OdlT 2017/2018 Centrale PSI planche 177 avec Python*

a. Donner le domaine de définition D de $f : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$.
b. Représenter f sur Python, à 10^{-5} près.
c. Montrer que $g(x) = \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt$ est définie sur D et C^2 sur $]-1; 1[$.
d. Représenter g et conjecturer un lien entre f et g.
e. Calculer $f'(x)$ pour $x \in D \cap \mathbb{R}_+^*$ et établir la conjecture précédente.
f. Déterminer une relation entre $g(1)$, $g(x)$, $g(1-x)$ et une autre fonction que l'on précisera (on pourra faire une intégration par parties et/ou un changement de variable).
g. Déduire $g(x)$ puis $f(x)$, sachant que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

96 *Compléments OdlT 2017/2018 Centrale PSI planche 292 avec Python*

a. Déterminer le domaine de définition de $f : x \mapsto \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} x^{n^2}$.
b. Créer un programme Python qui renvoie la somme partielle de $-n$ à n, à savoir $S_n(x) = \sum\limits_{k=-n}^{n} x^{k^2}$.
c. Approximation à 10^{-5} de la somme précédente par rapport à $f(1/2)$.
d. Tracer l'approximation de $g(x) = \sqrt{\frac{\pi}{1-x}}$ et les valeurs de la somme. Émettre une conjecture.
e. Trouver un équivalent de f en 1 (on pourra utiliser que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ pour $\alpha > 0$.
f. On note $r_2(n)$ le nombre de façons d'écrire l'entier $n \in \mathbb{N}$ comme une somme de deux carrés d'entiers.
g. Écrire un programme donnant $r_2(n)$.
h. Donner les valeurs de $r_2(n)$ jusqu'à $n = 100$.
i. Déterminer le domaine de définition de $h : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} r_2(n) x^n$.
j. Trouver une relation entre h et f et en déduire un équivalent de h en 1.

97 *Compléments OdlT 2017/2018 Centrale PSI planche 293 avec Python*

On note H_n l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ dont les coefficients valent ± 1 et dont les colonnes sont orthogonales deux à deux. On note SH_n l'ensemble des matrices de H_n qui sont symétriques.
a. Donner une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et programmer une fonction qui renvoie la norme d'une matrice.
b. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients valent ± 1. Montrer que $A \in H_n \iff {}^tAA = nI_n$.
c. Que fait l'instruction $[[x,y]$ for $x \in [0;1]$, for y in $[0;1]]$?
d. Déterminer les matrices et le cardinal de H_4 puis de SH_4.
e. Qu'est-ce que l'ensemble $T = \{\mathrm{Tr}\ (A) \mid A \in SH_4\}$? L'ensemble $T = \{\mathrm{Tr}\ (A) \mid A \in H_8\}$?

98 *Compléments OdlT 2017/2018 Centrale PSI planche 294 avec Python*

Soit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = a_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = a_{n+1} + \dfrac{2a_n}{n+2}$.
a. Écrire une fonction *suite*(n) qui renvoie les termes $a_2, \ldots, a_n$.
b. Montrer que $\forall n \geqslant 1$, $1 \leqslant a_n \leqslant n^2$ et en déduire le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$.
c. Écrire une fonction pour tracer la solution de l'équation $(E) : (1-x)y' = (2x+1)y$ avec $y(0) = 1$.
d. Montrer que $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est solution de cette équation.
e. Calculer la solution générale de cette équation et en déduire les coefficients a_n.

99 *Compléments OdlT 2017/2018 Centrale PSI planche 295 avec Python*

Pour $n \geqslant 2$, on définit $M = \left(\dfrac{(-1)^{i+j-1}-1}{2}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, par exemple $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ pour $n = 3$: matrice échiquier avec alternance de 0 et de 1 avec des 0 sur la diagonale.
a. Écrire une fonction prenant n en argument et qui renvoie la matrice M d'échiquier de taille n.
b. Écrire une fonction renvoyant une liste contenant les matrices d'échiquier de taille $2p$ pour $p \in [\![1;100]\!]$.
c. Conjecturer sur la valeur de $M^3 - p^2M$.
d. Prouver que M est diagonalisable.
e. Trouver une base de chaque sous-espace propre.
f. Montrer que ces sous-espaces propres sont orthogonaux deux à deux.
g. Trouver une expression de la projection orthogonale sur E_0.

100 *Compléments OdlT 2017/2018 Centrale PSI planche 296 avec Python*

On définit deux suites de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $f_0 = 1$, $g_0 = 0$ et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, les relations $f_{n+1}(t) = f_n(t) - tg_n(t)$ et $g_{n+1}(t) = g_n(t) + tf_n(t)$.
a. Écrire un code Python permettant de calculer $f_n(t)$ et $g_n(t)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$.
b. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$, on note $z_n(t) = f_n(t) + ig_n(t)$ et, dans le plan complexe, le point $M_n(t) = \dfrac{z_n(t)}{|z_n(t)|}$.
Tracer $\big(M_n(t)\big)_{n\in[\![1;10]\!]}$ pour $t = 1/2$ et $t = 1/3$.
c. On définit la suite de fonctions $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in \mathbb{R},\ h_n(t) = f_n\left(\dfrac{t}{n}\right)$.
d. Tracer h_n sur $[0;2\pi]$ pour $n = 10$, $n = 20$ et $n = 100$.
e. Conjecturer la valeur de $h_n(t)$.
f. Montrer qu'il existe deux suites $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in R\ f_n(t) = \rho_n(t)\cos\big(\tau_n(t)\big)$ et $g_n(t) = \rho_n(t)\sin\big(\tau_n(t)\big)$.
g. Donner les expressions de $\rho_n(t)$ et $\tau_n(t)$.
h. Soit deux suites de fonctions continues $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui convergent uniformément sur un segment $[a;b]$ vers des fonctions u et v.
i. Montrer que $(\cos \circ u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\cos \circ u$.
j. Montrer que $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers uv.
k. Vérifier la conjecture faite sur $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

101 *Compléments OdlT 2017/2018 Centrale PSI planche 297 avec Python*

On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les racines de $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$, distinctes ou confondues. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$ et, pour $k \geqslant 1$, $P_k = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i^k)$.

a. Déterminer le polynôme caractéristique de A.

b. Écrire *Poly*(k, L) avec $k \geqslant 1$ et L la liste des coefficients de P, et qui renvoie les coefficients de P_k.

c. Montrer que si les $a_0, \dots, a_{n-1}$ sont des entiers, alors les coefficients de P_k le sont aussi.

102 *Compléments OdlT 2017/2018 Centrale PSI planche 298 avec Python*

a. Tracer la courbe de $f : x \mapsto x^7 + 0,99x - 2,03$ sur des intervalles proposés.

b. Montrer que $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle r et donner un encadrement de r par deux entiers.

c. Déterminer une valeur de r à 10^{-5} près.

d. Tracer $h : x \mapsto x^7 + x - 2$ et f sur le même graphe autour de r et r_0 (unique solution réelle de $h(x) = 0$).
Soit g définie sur $\mathbb{R}^3$ par $g(x, p, q) = x^7 + px - q$. On admet qu'il existe $\phi \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant $g(x, p, q) = 0$ si et seulement si $x = \phi(p, q)$. On pose alors $F(p, q) = g\big(\phi(p, q), p, q\big)$.

e. Donner les dérivées partielles de F en fonction de p et q.

f. En déduire les dérivées partielles de ϕ.

g. Faire le développement limité de ϕ autour de $(1, 2)$.

h. Déterminer un équivalent de $r - r_0$.

103 *Compléments OdlT 2017/2018 Centrale PSI planche 299 avec Python*

Pour $n \geqslant 0$, on pose $f_n(x) = \prod_{k=0}^{n} \frac{1}{x+k}$, $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ et $G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

a. Montrer que F et G sont définies sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Représenter avec Python les premières sommes partielles des deux séries sur un intervalle bien choisi. Représenter aussi $\frac{F}{G}$ et conjecturer.

c. On admet qu'il existe une famille de réels $(\alpha_{i,n})_{0 \leqslant i \leqslant n}$ telle que : $\forall x > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha_{i,n}}{x+i}$.

d. En considérant un équivalent de $f_n(x)$ en $-i$, déterminer $\alpha_{i,n}$.

e. Prouver la conjecture émise.

f. Trouver un équivalent de F en 0.

104 *Compléments OdlT 2017/2018 Centrale PSI planche 300 avec Python*

Soit a et b deux réels, $n \geqslant 2$ un entier et $E = \mathbb{R}_n[X]$.
Pour $P \in E$, on pose $f(P)(X) = (X - a)(X - b)P'(X) - nXP(X)$.

a. Montrer que f est un endomorphisme de E.

b. Écrire la matrice M de f dans la base canonique de E.

c. Écrire une fonction *matrice*(n, a, b) qui renvoie la matrice M.

d. Écrire une fonction *elementspropres*(n, a, b) qui renvoie les éléments propres de la matrice M.

e. Appliquer la fonction précédente dans les cas suivants : $n = 2$, $(a = 1$ et $b = 0)$ ou $(a = 1$ et $b = -1)$.

f. f est elle diagonalisable ?

g. À quelle condition sur $K \in E$ et on définit $(P|Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)K(t)dt$ munit-il E d'un produit scalaire ?

h. À quelle condition sur $K \in E$ les vecteurs propres de f forment-ils une base orthonormale ?

105 *Compléments OdlT 2017/2018 Centrale PSI planche 301 avec Python*

Pour $k \geqslant 1$, on définit f_k sur $]0;1[$ par $f_k(x) = \dfrac{1}{x} + \sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{1}{x-i}$.

a. Tracer les fonctions f_k pour $k \in [\![1;15]\!]$.

b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists! u_n \in]0;1[,\ f_n(u_n) = 0$.

c. À l'aide d'une méthode de dichotomie, donner une valeur approchée de u_n à 10^{-8} près.

d. Conjecturer le sens de variation de $(u_n)_{n\geqslant 1}$ puis démontrer qu'elle converge.

106 *Compléments OdlT 2017/2018 Centrale PSI planche 317 avec Python*

Une urne contient n jetons numérotés de 0 à $n-1$. On tire trois fois, avec remise, un jeton et on note X, Y, Z les variables aléatoires correspondant au jeton obtenu à chaque tirage.

a. Écrire un programme Python qui prend en paramètre le nombre n de jetons dans l'urne et qui vérifie si $X + Y = Z$. Calculer $p_n = p(X + Y = Z)$.

b. Écrire un programme Python qui vérifie le résultat obtenu.

c. Calculer, en utilisant les fonctions génératrices de X, Y et Z, $p(X + Y + Z = k)$ avec $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

d. Calculer $p(X + Y + Z = n - 1)$ et le comparer à p_n.

e. On tire maintenant 3 fois les jetons dans l'urne sans remise et on note A, B, C les variables aléatoires correspondant au jeton obtenu à chaque tirage. Calculer $q_n = p(A + B = C)$ et montrer que $q_n \underset{+\infty}{\sim} p_n$.

107 *Compléments OdlT 2017/2018 Centrale PSI planche 321 avec Python (incomplet)*

Soit $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $g(1) = 0$ et $g(t+1) - g(t) = \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$, et $\lim\limits_{t\to+\infty} g'(t) = 0$.

a. Exprimer g' comme somme d'une série de fonctions (on pourra s'intéresser à $g'(t+1)-g'(t)$) et en déduire g comme somme d'une série de fonctions.

b. Montrer que $z_1 = 1$ et $z_{n+1} = z_n + i\dfrac{z_n}{|z_n|}$ permet de définir une suite $(z_n)_{n\geqslant 1}$.

c. Calculer les 10 premiers termes de la suite.

d. Tracer sur Python les 100 premiers termes de la suite et l'arc $\begin{cases} x(t) = \sqrt{t}\cos(g(t)) \\ y(t) = \sqrt{t}\sin(g(t)) \end{cases}$.

108 *Compléments OdlT 2017/2018 Centrale PSI planche 327 avec Python (incomplet)*

Soit $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ continue. On pose, pour $n \geqslant 1$, $S_n(f) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$ et $I_{0,n}(f) = S_{2^n}(f)$.

Le module *numpy* est autorisé.

a. Écrire une fonction permettant de calculer cette somme $S_n(f)$.

b. Calculer $I_{0,n}(f) - I_{0,n-1}(f)$.

c. On prend $f(x) = \dfrac{4}{1+x^2}$. Comparer numériquement $I_{0,8}(f)$ et $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.

d. On pose maintenant, pour $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, le réel $I_{m,n}(f) =$???.

e. Trouver une relation de récurrence sur les $I_{m,n}(f)$.

f. En déduire le tableau des $I_{m,n}(f)$ pour $(m,n) \in [\![1;8]\!]^2$.

g. Comparer la valeur de $I_{8,0}(f)$ à celles trouvées précédemment.

109 *Compléments OdlT 2017/2018 Centrale PSI planche 328 avec Python (incomplet)*

Soit $f(x) = \big(1-\cos(5\pi x)\big)x(1-x)$ et $M = \underset{x\in[0;1]}{\text{Sup}}\, f(x)$. On pose $I_n = \int_0^1 f(x)^n dx$ et $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} I_k x^k$.

a. Tracer la courbe représentative de f et conjecturer la valeur de M.
b. Faire afficher les premiers termes de la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$.
c. Tracer S_n pour $n \in \{0, 10, 20, 30, 40, 50\}$. Que peut-on en conclure ?
d. Rayon de convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} I_n x^n$.
e. On pose $u_n = \dfrac{I_{n+1}}{I_n}$. Monotonie de $(u_n)_{n\geqslant 0}$? Convergence ?

110 *Compléments OdlT 2017/2018 Centrale PSI planche 329 avec Python (incomplet)*

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ et, pour tout $n \geqslant 1$, $f_n : x \mapsto f\left(\dfrac{x}{n}\right)$.

a. Tracer sous Python les premiers termes de la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ pour $f(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = e^x$, $f(x) = \ln(x)$ et $f(x) = \sin\left(2\pi\dfrac{\ln x}{\ln 2}\right)$. Conjecturer la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ pour ces différentes fonctions.
b. On suppose que f admet une limite finie en 0. Montrer que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement.
c. Montrer que si $a > 0$, la converge est uniforme sur $]0; a]$.
d. On suppose maintenant que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement si et seulement si $f(0) = f'(0) = 0$.

111 *Compléments OdlT 2017/2018 Centrale PSI planche 330 avec Python (incomplet)*

Soit f définie sur $]-1; 1[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des coefficients du développement en série entière de f.

a. Trouver une relation de récurrence entre a_n et a_{n+1}.
b. Écrire une fonction qui prend en entrée n et calcule la valeur de a_n.
c. Écrire une fonction qui prend en entrée n et x, et qui calcule $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.
d. Tracer les a_n en fonction de n, pour n entre 0 et 10.
e. Conjecturer, grâce a cela, la monotonie de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et sa limite.
f. Le démontrer (on pourra étudier la série $\sum_{n\geqslant 0} \ln\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$.

112 *Compléments OdlT 2017/2018 Centrale PSI planche 331 avec Python (incomplet)*

Soit $n \geqslant 2$ et $A(n) = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n+1} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définie par $a_{i,j} = \dfrac{1}{i+j-1}$.

a. Écrire une fonction *Matrice*(n) qui renvoie la matrice $A(n)$.
b. Renvoyer les valeurs propres de $A(2)$, $A(3)$ et $A(4)$.
c. Prouver l'existence de la plus petite valeur propre $m(n)$ de $A(n)$.
d. Écrire une fonction *PlusPetiteValeurPropreA*(l, n) qui renvoie le graphe de la fonction $m(k)$ sur $[\![1; n]\!]$. Que peut-on conjecturer ?
e. Montrer que $m(n)$ est positif et qu'il tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
f. Rappeler la définition d'une norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.
g. Montrer que $M(n) = \underset{X\in S_n}{\text{Sup}}\, ({}^tXA(n)X)$ existe où $S_n = \{X \in \mathbb{R}^n \mid ||X|| = 1\}$.
h. Montrer que $M(n)$ est la plus grande des valeurs propres de $A(n)$.

113 *Compléments OdlT 2017/2018 Centrale PSI planche 332 avec Python (incomplet)*

Pour $f :]0;1] \to \mathbb{R}$, on pose, pour $n \geqslant 1$, $S_n(f) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$.

a. Écrire une fonction permettant de calculer cette somme et la tester avec $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $f(x) = \ln(x)$ et $f(x) = \cos(x)$.

b. Conjecturer la limite de $(S_n(f))_{n\geqslant 1}$ en prenant n entre 1 et 2^{15}.

c. Soit $g(x) = x\sin\left(2^{1/x}\pi\right)$. Calculer $S_n(g')$ et $\displaystyle\int_0^1 g'(t)dt$.

d. On suppose f continue et décroissante. Montrer que $\dfrac{S_n(f)}{n} \leqslant \displaystyle\int_0^1 f(t)dt$.

e. Soit $\alpha \in]0;1]$ et $M = \sup\limits_{[\alpha;1]} |f'|$. Montrer que $f(t) - \dfrac{M}{n} \leqslant f\left(\dfrac{k}{n}\right) \leqslant f(t)$.

f. Donner les cas où les résultats de la question sont faux.

114 *Compléments OdlT 2017/2018 Centrale PSI planche 333 avec Python (incomplet)*

Tracer $f_2 : (x,y) \mapsto x^2 + y^2 - \ln(y-x)$ en Python pour $(x,y) \in [-10;10]^2$ avec un pas de $0,1$; même chose pour $(x,y) \in [-1;1]^2$.

a. On suppose que f_2 admet un point critique (a,b). Tenter de trouver les coordonnées a et b avec Python (section analyse numérique). Utiliser le tracé de la courbe de f_2 pour définir le point de départ de la recherche. Est-il possible de résoudre informatiquement ?

b. Trouver les coordonnées du point critique manuellement.

Soit $f_n(x_1,\ldots,x_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 - \sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} \ln(x_j - x_i)$ avec $x_1 < \ldots < x_n$.

c. Expliciter $\dfrac{\partial f_n}{\partial x_k}$ pour $k \in [\![1;n]\!]$.

d. Soit $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ un point critique de f_n. On définit $P = \prod\limits_{i=1}^{n}(X-\alpha_i)$ et $Q_k = \prod\limits_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}(X-\alpha_i)$ pour $k \in [\![1;n]\!]$.

e. Montrer que $P'(\alpha_k) = Q(\alpha_k)$, $P''(\alpha_k) = 2Q'(\alpha_k)$ et que $\dfrac{Q_k'(\alpha_k)}{Q_k(\alpha_k)} = 2\alpha_k$.

115 *Compléments OdlT 2017/2018 Centrale PSI planche 334 avec Python (incomplet)*

On donne $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $P = X^5 + X^4 - 10X^3 + 6X^2 + 9X - 7$ et $u_n = \dfrac{\mathrm{Tr}\,(M^{n+1})}{\mathrm{Tr}\,(M^n)}$.

a. Trouver les racines entières de P et déterminer une factorisation de P, puis toutes les racines de P.

b. Calculer les 40 premiers termes de $(u_n)_{n\geqslant 0}$. Qu'en conclure ?

c. Vérifier que P annule M.

d. On définit M et P de manière générale (matrice compagnon).

e. Montrer que P annule M.

f. Trouver l'expression de u_n en fonction des valeurs propres de M.

116 *Compléments OdlT 2017/2018 Centrale PSI planche 335 avec Python (incomplet)*

Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ dont aucune racine n'est de module égal à 1.

a. Justifier que $M(P) = \int_0^{2\pi} \ln(|P(e^{it}|)dt$ est défini.

b. Montrer que $\exists A \in \mathbb{R},\ \exists s \in \mathbb{N},\ \exists (m_k)_{1\leqslant k\leqslant s} \in \mathbb{N}^s,\ \exists (z_k)_{1\leqslant k\leqslant s} \in \mathbb{C}^s,\ M(P) = A + \sum_{k=1}^{s} m_k M(X - z_k)$.

c. Écrire une fonction *Mahler*(r, θ) qui renvoie la valeur de $M(X - re^{i\theta})$.

d. Tracer $\theta \mapsto M(X - re^{i\theta})$ pour $r \in \{0.1, 10, 100, 2017\}$. Que peut-on conjecturer ?

e. Tracer $\phi(r) = M(X - re^{i\theta})$ sur $[0; 3]$ avec un pas de 0.1 puis, sur le même graphe, tracer la fonction $\psi : r \mapsto 2\pi \ln(r)$. Que peut-on conjecturer ?

f. Démontrer la première conjecture faite.

g. Montrer que $X^{2n} - 1 = (X^2 - 1) \prod_{k=1}^{n-1} \left(X^2 - 2X \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1 \right)$.

h. Montrer la seconde conjecture faite.

117 *Compléments OdlT 2017/2018 Centrale PSI planche 337 avec Python (incomplet)*

On note $P_{a,b}$ l'ensemble des solutions de l'équation $y' = y + \frac{1}{x}$ vérifiant $y(a) = b$ avec $(a, b) \in U = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

a. Combien $P_{a,b}$ admet-il d'éléments pour a et b fixés ?

b. Définir une fonction qui trace la solution sur un intervalle judicieusement choisi. On testera en particulier les couples $(1, 1)$, , $(0, 1)$, $(2, 0)$, $(-2, 0)$, $(-2, -3)$.

c. Que se passe-t-il en 0 ?

d. Exprimer un élément solution de $P_{a,b}$ sous forme d'intégrale.

e. Réécrire et tester une fonction avec cette expression. Quelle est la limite en 0 ?

f. Montrer que si f, de classe C^1, vérifie $\lim_{x\to 0}(f'(x) + f(x)) = 0$ alors $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ (on pourra poser $g = f' + f$ et résoudre $y' + y = g$).

118 *Compléments OdlT 2017/2018 Centrale PSI planche 338 avec Python (incomplet)*

On s'intéresse aux solutions de l'équation matricielle $AX - XB = Y$. On note ϕ_A et ψ_B les applications qui à $X \in \mathcal{M}_n(K)$ associent respectivement AX et XB.

a. On choisit $A = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ -12 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer par le calcul la matrice de ϕ_A dans la base canonique.

b. À l'aide de Python, comparer les spectres de A et ϕ_A.

c. Dans le cas général, exprimer les valeurs propres de ϕ_A en fonction de celles de A.

d. Trouver une relation entre les dimensions des sous-espaces propres de A et de ϕ_A.

e. On suppose A inversible et on pose $S_m = \sum_{k=0}^{m} A^{-1-k} Y B^k$. Écrire une fonction Python qui prend A, B, Y et m pour paramètres et qui calcule S_m.

f. Quel lien y a-t-il entre S_m et la relation $AX - XB = Y$?

g. On suppose A et B simultanément diagonalisables et leurs spectres disjoints. Montrer que $AX - XB = Y$ admet une solution unique.

h. On suppose que $\forall (\lambda, \mu) \in \mathrm{Sp}(A) \times \mathrm{Sp}(B),\ |\lambda| > |\mu|$. Montrer que $(S_m)_{m\geqslant 0}$ converge.

119 *Compléments OdlT 2017/2018 Centrale PSI planche 339 avec Python (incomplet)*

On dit d'une matrice $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, carrée, réelle, qu'elle est stochastique si tous ses coefficients sont positifs ou nuls et si la somme de chaque ligne vaut 1.

On dit qu'elle est doublement stochastique si M et ${}^tM$ le sont.

a. Écrire une fonction *stocha* qui teste si une matrice est stochastique et une fonction *stocha2* qui teste si elle est doublement stochastique.

b. L'ensemble des matrices stochastiques est-il stable pour le produit matriciel ? Le montrer. Mêmes questions pour les matrices doublement stochastiques.

c. Montrer que M stochastique admet 1 pour valeur propre.

d. $x_{1,n}$ et $x_{2,n}$ suivant une même loi de Bernoulli de paramètre p, on pose $z_0 = 1$, $z_{n+1} = j^{x_{1,n}+x_{2,n}}$ et $Z_n = \begin{pmatrix} P(z_n = 1) \\ P(z_n = j) \\ P(z_n = j^2) \end{pmatrix}$. Trouver A telle que $Z_{n+1} = AZ_n$.

120 *Compléments OdlT 2017/2018 Centrale PSI planche 340 avec Python (incomplet)*

a. Donner l'ensemble de définition de $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt$ et tracer sa courbe sur $[0.1; 20]$. Émettre une conjecture sur son comportement asymptotique et la démontrer.

b. Montrer qu'il existe une unique solution f de $y'' + y = \dfrac{1}{x}$ vérifiant $f(1) = a$ et $f'(1) = b$ où a et b sont deux réels donnés. Tracer f.

c. Montrer que toute solution de l'équation différentielle est bornée sur $\mathbb{R}$.

121 *Compléments OdlT 2017/2018 Centrale PSI planche 341 avec Python (incomplet)*

Une urne contient n boules, numérotées de 0 à $n-1$. On tire successivement 3 boules aléatoirement, avec remise. On note respectivement X, Y et Z les numéros des première, deuxième et troisième boules tirées.

a. Écrire un code Python qui simule l'experience aléatoire, puis renvoie un booléen qui prend la valeur *True* si $X + Y = Z$, *False* sinon.

b. Calculer $p_n = P(X + Y = Z)$.

c. Écrire un code Python permettant de vérifier la valeur de p_n.

d. Utiliser des fonctions génératrices pour calculer $P(X + Y + Z = k)$ pour $k \in [\![0; n-1]\!]$.

e. Que peut-on dire de p_n et $P(X + Y + Z = n-1)$?

f. On réitère la même expérience, mais sans remise ; on note A, B et C les numéros des trois boules tirées, et $q_n = P(A + B = C)$.

g. Écrire un code Python permettant de simuler la valeur de q_n (on pourra utiliser la fonction *permutation* du module *numpy.random* qui mélange une liste L aléatoirement.

h. Montrer que $q_n \underset{+\infty}{\sim} p_n$.

122 *Compléments OdlT 2017/2018 Centrale PSI planche 342 avec Python (incomplet)*

On note L_p^n l'ensemble des listes de n éléments à valeurs dans $[\![1;p]\!]$.
On dit qu'une liste est surjective si chaque élément de $[\![1;p]\!]$ est contenu dans cette liste.
On note alors S_p^n l'ensemble des listes surjectives de I_p^n, et $s_{n,p}$ son cardinal.
a. Que fait le programme suivant :

```
L = [1, 2, 3]
L0 = [[]]
L1 = [l + [a] for l in L0 for a in L]
L2 = [l + [a] for l in L1 for a in L]
L3 = [l + [a] for l in L2 for a in L] ?
```

b. Écrire une fonction qui permet de tester si une liste est surjective, prenant en argument cette liste et p.
c. Quelle est la complexité de cet algorithme ? Peut-on faire mieux ?
d. Se servir de la fonction précédente calculer $s_{n,p}$ pour $p \in \{3,4,5\}$ et $n \in [\![1;7]\!]$.
e. Soit $i \in [\![1;p]\!]$, on note A_i l'ensemble des listes de L_p^n qui ne contiennent pas i.
f. Déterminer $\text{card}\,(L_p^n)$, $\text{card}\,(A_i)$ et $\text{card}\,(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_i)$.
g. En déduire que $s_{n,p} = \sum\limits_{i=1}^{p} (-1)^{p+i} \binom{p}{i} i^n$ (on pourra utiliser la formule du crible de POINCARÉ qui affirme que $\text{card}\,(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum\limits_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} \text{card}\,(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k})$).

123 *Compléments OdlT 2017/2018 Centrale PSI planche 343 avec Python (incomplet)*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $a_{i,j} = \frac{j}{i} + \frac{i}{j}$.
Parmi les différentes fiches Python à disposition, celle-ci était indispensable : https://www.concours-centrale-supelec.fr/CentraleSupelec/SujetsOral/Multi/Python-matrices.pdf **a.** Écrire une fonction A de paramètre n et qui renvoie sous forme d'un tableau *numpy* la matrice A_n.
b. Exécuter la fonction pour $n = 2, 3$ et 4.
c. La matrice A_n est-elle diagonalisable?
d. Pour $n \in [\![2;100]\!]$, calculer à l'aide de Python le rang de A_n.
e. Émettre une conjecture, puis la démontrer.
f. Pour $n \geqslant 3$, quelle est la valeur propre commune à toutes les A_n ?
g. Donner la dimension de l'espace propre associé.
h. À l'aide de Python, calculer, pour $n \in [\![2;100]\!]$, les valeurs de $\text{Tr}\,(A_n)^2$ et $\text{Tr}\,(A_n^2)$.
i. Émettre une conjecture et la démontrer.
j. Écrire une fonction *nonnulle* de paramètre n qui renvoie toutes les valeurs propres non nulles de A_n. L'exécuter pour $n \in [\![2;10]\!]$, pour $n = 100$, $n = 1000$ par exemple. Que remarque-t-on?

PARTIE 5 : 2018

124 *Centrale Maths2 PSI 2018* Colin Baumgard et Jean Boudou

Soit $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$, pour $n \geqslant 1$, on pose $X_n = 2^{Y_n}$, $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ et $Z_n = \mathrm{Min}(2^N, X_n)$.

a. Montrer que X_n n'est pas d'espérance finie.
b. Modéliser les tirages de $X_1, \cdots, X_n$ et mettre dans un tableau les valeurs $\overline{X_1}, \cdots, \overline{X_n}$.
c. Tracer l'évolution de $\overline{X_n}$ pour $n \in [\![1;1000]\!]$. Que conjecturez-vous ?
d. Donner la loi de Z_n, son espérance et sa variance. Montrer que $P\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i \leqslant N\right) \leqslant \frac{3,2^N}{n}$.
e. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} P(X_n \leqslant N) = 0$(???). Que dire par rapport à la conjecture de **c.** ?...

125 *Centrale Maths2 PSI 2018* Charlotte Beaune

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 0$ si $x \leqslant 0$ et $f(x) = e^{-1/x}$ si $x > 0$.
On note $g(x) = f(x)f(1-x)$ et $h(x) = \frac{1}{\alpha}\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$ avec $\alpha = \int_0^1 g(t)\mathrm{d}t$.

a. Représenter la fonction f sur $[-2;2]$.
b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x > 0$, $f^{(n)}(x) = f(x)\frac{P_n(x)}{x^{2n}}$ avec P_n un polynôme.
c. Pour $n \in [\![1;5]\!]$, calculer $P_n(x)$ avec Python.
d. Quelle est la classe de f sur $\mathbb{R}$? f est-elle DSE ?
e. Représenter g et h sur des intervalles bien choisis. Calculer α à la décimale près.
f. Déduire de ci-dessus qu'il existe une fonction φ telle que $(|x| \leqslant 1/2 \Longrightarrow \varphi(x) = 1)$ et $(|x| \geqslant 1 \Longrightarrow \varphi(x) = 0)$.
g. Représenter le graphe de φ.
h. Montrer qu'il existe une suite $(M_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\varphi^{(n)}(x)| \leqslant M_n$...

126 *Centrale Maths2 PSI 2018* Peio Betbeder

Soit la suite $(s_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $s_1 = 2$, $s_2 = \pi$ et $\forall n \geqslant 1$, $s_{n+2} = \frac{2\pi s_n}{n+2}$.

a. Écrire une fonction récursive permettant le calcul de s_n.
b. Utiliser cette fonction pour calculer les 100 premiers termes de cette suite.
c. À quoi servent les instructions suivantes ?

```
res=[2,np.pi]
for k in range(2,100):
    res.append(res[k-2]*2*np.pi/(k+1))
```

Quel est l'intérêt d'utiliser cette méthode plutôt que la méthode récursive pour de grandes valeurs de n ?
d. Tracer les 100 premiers termes de la suite.
e. Déterminer explicitement s_n en fonction de n. Indication : étudier les cas n pair et n impair.
f. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum s_n x^n$.
g. Écrire une fonction qui renvoie $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} s_n x^n$ à 10^{-5} près.
h. Tracer $S(x)$ pour $x \in]-2;1[$.
i. Exprimer $\int_0^x t^2 e^{-\pi t^2}\mathrm{d}t$ en fonction de $\int_0^x e^{-\pi t^2}\mathrm{d}t$. En déduire les solutions de (E) : $y' - 2\pi x y = \pi x^2 + 2x^3$.

127 *Centrale Maths2 PSI 2018* Victor Bourdeaud'hui

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, $x \in \mathbb{R}$ et $F(x) = x\int_0^x \frac{P(t)}{x^2+t^2}\,dt$.

a. Coder une fonction qui calcule $F(x)$ pour x et P donné.
b. Coder une fonction qui trace le graphe de F. La tester pour $P = X^2+1$ et $P = X^3+X^2+2$.
c. Soit l'arc paramétré $t \mapsto (P(t), F(t))$. Coder une fonction qui trace cet arc. La tester pour $P = X^2$, $P = X^3$ et $P = X^4$. Faire une conjecture.
d. Montrer que $\phi : P \mapsto F$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
e. Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\phi_n : P \mapsto F$ est un endomorphisme. Écrire les matrices dans la base canonique de ϕ_4 et ϕ_6. Conjecturer sur les valeurs propres de ϕ_n et le démontrer...

128 *Centrale Maths2 PSI 2018* Elisabeth Carreau-Gaschereau

Soit $n \geqslant 4$ et $i \in [\![1;n]\!]$. La matrice $A_{n,i} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est telle que toutes les colonnes soient égales à u sauf la i-ième qui est égale à v si ${}^tu = (1\ 2\ \cdots n)$ et ${}^tv = (n\ n-1\ \cdots\ 1)$.
a. Écrire une fonction d'argument i et n qui renvoie la matrice $A_{n,i}$.
b. Donner le spectre de $A_{n,i}$ pour n allant de 4 à 7 et i variant de 1 à n.
c. Montrer que pour $n \geqslant 4$, les $A_{n,i}$ ont une valeur propre commune que l'on notera α.
d. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $\mathrm{Sp}(M) = \mathrm{Sp}({}^tM)$. Montrer que $\frac{n(n+1)}{2} \in \mathrm{Sp}(A_{n,i})$ pour $i \in [\![1;n]\!]$.
e. Montrer que $\mathrm{Sp}(A_{n,i}) = \{\alpha, \beta_{n,i}, \frac{n(n+1)}{2}\}$ avec $|\beta_{n,i}| < \frac{n(n+1)}{2}$. $A_{n,i}$ est-elle diagonalisable ?

129 *Centrale Maths2 PSI 2018* Anaïs Chaumeil

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ et la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par $u_0 = 1$, $u_1 = a_1$ et $\forall n \geqslant 2,\ u_n = a_n u_{n-1} + u_{n-2}$.
a. Écrire une fonction, a étant donnée, qui donne la liste $[u_0, \cdots, u_p]$.
b. Écrire une fonction qui donne la liste $[S_1, \cdots, S_p]$ avec $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{u_k u_{k-1}}$.
c. Tracer la ligne reliant les $((n, S_n))_{n\in[\![1;20]\!]}$ si $a_n = \frac{1}{2^n}$, $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $a_n = \frac{1}{n^2}$ et $a_n = 1$. Conjecture ?
d. Si $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ converge, montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \prod\limits_{k=1}^{n}(1+a_k)$. En déduire la nature de $\sum\limits_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^k}{u_k u_{k-1}}$.
e. Si $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ diverge, nature de la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^k}{u_k u_{k-1}}$? Indication : étude de $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_{n-1}(u_n - u_{n-2})$.

130 *Centrale Maths2 PSI 2018* Gauthier Crosio

Soit $a = (a_0, \cdots, a_{2n-2}) \in \mathbb{C}^{2n-1}$, on définit la matrice M telle que $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ m_{i,j} = a_{i+j-2}$.
a. Écrire une fonction qui prend en argument un vecteur a et renvoie la matrice M. La tester avec $a = (1,1,1,1,1)$ et $a = (1, \cdots, p)$ pour $p \in \{5, 7, 11, 21\}$.
On définit la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ par $x_0 = 0$, $x_1 = -2$, $x_2 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+3} = 2x_{n+2} + 5x_{n+1} - 6x_n$.
b. Écrire une fonction qui donne les $2n-1$ premiers termes de $(x_n)_{n\geqslant 0}$, donnant $a(n) = (x_0, \cdots, x_{2n-1})$. Calculer alors le rang de $M(a(p))$ pour $p \in \{4, 6, 27\}$.
c. Mêmes questions avec $x_0 = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 5$ et $\forall n \geqslant 0,\ x_{n+4} = 4x_{n+3} + 5x_{n+2} - 5x_{n+1} + x_n$. Quelle hypothèse peut-on faire?
d. De manière plus générale avec le polynôme $P = a_{p-1}X^{p-1} + \cdots + a_0$, on considère les suites définies par $x_{p+n} = a_{p-1}x_{p+n-1} + \cdots + a_0 x_n$ où $x_0, \cdots, x_{p-1}$ sont donnés. Montrer que l'ensemble de ces suites forme un sous-espace vectoriel E des suites complexes. Quelle est sa dimension ?
e. Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite non nulle de E. Montrer que $\big((x_{n+k})_{n\geqslant 0}\big)_{k\in\{0,\cdots,p-1\}}$ est une base de E.
f. En déduire que $(\mathrm{rang}\,(M(x_n)))_{n\geqslant 0}$ est une suite entière convergente. Quelle est sa limite ?....

131 *Centrale Maths2 PSI 2018* Erwan Dessailly

Soit $\Delta : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie par $\Delta(P) = P(X) - P(X-1)$.
a. Écrire une fonction qui renvoie $\Delta(P)$.
b. Calculer $(\Delta(X^k))_{k\in[\![1;10]\!]}$.
c. Montrer que Δ est linéaire. Déterminer $\mathrm{Ker}(\delta)$ et $\mathrm{Im}\,(\Delta)$.
d. Montrer qu'il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $P_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P_n(0) = 0$ et $P_n(X) - P_n(X-1) = X^{n-1}$.
e. Montrer que $\forall n \geqslant 1, \exists C_n \in \mathbb{R},\ \ P_n(X) = (n-1)\displaystyle\int_0^X P_{n-1}(t)dt + C_n X$...

132 *Centrale Maths2 PSI 2018* Florian Gaboriaud

Soit $A_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique.
a. Calculer $M = (I_2 - A_2)^{-1}(I_2 + A_2)$ à la main.
b. Caractériser géométriquement la matrice M.
Soit $a = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix}$. On se place dans $E = \mathbb{R}^3$ euclidien canonique.
c. Donner la matrice A_3, dans la base canonique, de $f_a : E \to E$ défini par $f_a(x) = a \wedge x$.
d. Calculer $N = (I_3 - A_3)^{-1}(I_3 + A_3)$ et caractériser géométriquement N. Indication : s'aider de $f_a(a)$.
Soit $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & -4 & 0 \\ -3 & 4 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.
e. Calculer de $M = (I_4 - A_4)^{-1}(I_4 + A_4)$. Caractériser géométriquement M.
f. Que peut-on conjecturer dans le cas général ?
g. Que peut-on démontrer ?

133 *Centrale Maths2 PSI 2018* Elio Garnaoui

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & -5 & 5 \end{pmatrix}$.
a. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
b. Calculer $P^{-1}UP$ et $P^{-1}VP$. U et V sont-elles diagonalisables ?
c. On pose $W(a) = U + aV$. Trouver une CNS pour que $W(a)$ soit diagonalisable.
d. Pour $a \in \{0, 1/2, 1\}$, montrer que $W(a)^t(W(a))$ et ${}^t(W(a))W(a)$ sont diagonalisables.
e. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que M^tM et ${}^tMM$ sont diagonalisables avec des valeurs propres positives.
f. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $\mathrm{Ker}({}^tMM) = \mathrm{Ker}(M)$ et que $\dim(\mathrm{Ker}({}^tMM)) = \dim(\mathrm{Ker}(M^tM))$.
g. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $F_\lambda = \mathrm{Ker}({}^tMM - \lambda I_n)$, $G_\lambda = \mathrm{Ker}(M^tM - \lambda I_n)$ et $f_\lambda : F_\lambda \to G_\lambda$ définie par $f_\lambda(X) = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}MX$. Montrer que f_λ est bien définie et que c'est une isométrie bijective.
i. En déduire que ${}^tMM$ et M^tM sont orthosemblables.

134 *Centrale Maths2 PSI 2018* Martin Gros

On note d_n le nombre de diviseurs positifs de n, $D_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} d_k$ et $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
a. Écrire deux fonctions d'argument n donnant D_n et H_n.
b. En comptant les points à coordonnées entières sous la courbe $\mathcal{H}$: $xy = n$, montrer que $D_n \underset{+\infty}{=} nH_n + O(n)$.
c. En déduire un équivalent de D_n et vérifier cet équivalent avec python.
d. Pour $x \in]-1;1[$, calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nH_n x^n$....

135 *Centrale Maths2 PSI 2018* Amélie Guyot

On définit $\theta_n : [-1;1] \to \mathbb{R}$ par $\theta_n(x) = \prod_{k=1}^{n} (1 - x^{2^k})$.

a. Écrire une fonction $\mathtt{dessin}(n)$ qui trace les θ_k pour tout $k \in [\![1;n]\!]$.

b. Conjecture sur la parité/imparité, monotonie des θ_k et sur la convergence simple sur $[-1;1]$ de $(\theta_n)_{n\geqslant 1}$.

c. Démontrer ces conjectures.

d. Montrer que $(\theta_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers $\theta :]-1;1[\to \mathbb{R}$ continue qui vérifie $\theta(x) = (1-x)\theta(x^2)$.

e. Trouver toutes les fonctions $f :]-1;1[\to \mathbb{R}$ continues qui vérifient $f(x) = (1-x)f(x^2)$.

f. Si $\forall x \in]-1;1[,\ \theta(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, calculer a_0 et montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n} = a_n$ et $a_{2n+1} = ...$

g. Écrire une fonction $\mathtt{coef}(n)$ qui renvoie les n premiers coefficients du DSE supposé de θ...

136 *Centrale Maths2 PSI 2018* Lucie Jandet et Thibaud Vendrely

On s'intéresse aux solutions de l'équation $y'' + \omega^2 y = 0$.

a. Montrer que l'ensemble des solutions réelles de (E) est en bijection avec les solutions réelles du système différentiel $X' = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$.

b. Expliquer brièvement en quoi les suites $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ peuvent approcher les solutions de (E) si on les définit par les relations $\begin{cases} y_{i+1} &= y_i + hz_i \\ z_{i+1} &= z_i - h\omega^2 y_i \end{cases}$.

c. Écrire une fonction *Euler* qui, à partir de cette méthode, approche les solutions de (E). Tracer une solution approchée ainsi que la solution exacte. Commenter.

On se donne alors deux nouvelles suites $(\tilde{y}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(\tilde{z}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telles que $\begin{cases} \tilde{y}_{i+1} &= \tilde{y}_i + h\tilde{z}_i \\ \tilde{z}_{i+1} &= \tilde{z}_i - h\omega^2 \tilde{y}_{i+1} \end{cases}$.

d. Écrire une fonction *Euler-bis* donnant les premiers termes de cette suite.

Tracer les résultats des deux fonctions et les comparer.

e. Montrer que les solutions $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ du premier système vérifient une relation de récurrence d'ordre 2 et les déterminer. Ces solutions convergent-elles ? Sont-elles bornées ?

f. Faire de même pour le second système.

137 *Centrale Maths2 PSI 2018* Eneko Jauretche

Soit l'équation différentielle $(E)\ :\ y'' + y = \dfrac{1}{x}$ et la fonction F définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt$.

a. Justifier l'existence de F sur $\mathbb{R}_+$. Tracer F sur $I = [0,01;20]$. Que dire de F en $+\infty$? Le montrer.

b. Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, justifier qu'il existe une unique solution f de (E) telle que $f(1) = a,\ f'(1) = b$.

Tracer cette fonction f pour $(a,b) = (1,1)$. Tracer $f - F$.

c. Montrer que toutes les solutions réelles de (E) sont bornées.

d. Quelles sont les solutions de (E) ayant une limite nulle en $+\infty$?

e. Montrer que $x \mapsto \cos(x) \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt - \sin(x) \int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}\,dt$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

f. Que peut-on en déduire sur l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$?

138 *Centrale Maths2 PSI 2018* Pauline Lamaignère

On considère une marche aléatoire d'un jeton sur quatre cases disposées en ligne notées C_1, C_2, C_3 et C_4.
À l'instant 0, le jeton est en C_1.
À l'instant n, si le jeton est en C_1, il va de manière équiprobable à l'instant $n+1$ sur chacune des quatre cases ; et s'il est en C_i avec $i \in \{2,3,4\}$, alors il va à l'instant $n+1$ en C_{i-1}.

On note X_k le numéro de la case où est le jeton à l'instant k et $U_k = \begin{pmatrix} P(X_k = 1) \\ P(X_k = 2) \\ P(X_k = 3) \\ P(X_k = 4) \end{pmatrix}$.

a. Écrire un programme qui fait la liste des n premières positions du jeton.
Représenter cette évolution graphiquement.
b. Conjecturer l'allure de la liste en faisant $n = 50, 100$ ou 150.
c. À l'aide de la formule des probabilités totales, trouver $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que $\forall k \in \mathbb{N},\ U_{k+1} = AU_k$.
En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = A^n U_0$.
d. Diagonaliser A et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$...

139 *Centrale Maths2 PSI 2018* Julien Langlais

On s'intéresse à $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{e^{-|x-n|}}{2^n}$. On pose $F(x) = 2^x S(x)$.
a. Montrer que S est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.
b. Tracer S sur $[0;6]$.
c. Justifier que S est intégrale sur $\mathbb{R}_+$ et calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_0^{+\infty} S(x)dx$.
d. Tracer F sur $[0;20]$. Trouver une relation entre $S(x)$ et $S(x+1)$ puis simplifier $F(x+1) - F(x)$.
e. Justifier l'allure du graphe de F en exprimant $F(x)$ à l'aide de $F(x - \lfloor x \rfloor)$...

140 *Centrale Maths2 PSI 2018* Pierre Le Bouille

On considère l'équation différentielle $(E)\ :\ xy'' + y' + y = 0$.
a. Que dire de l'ensemble des solutions ?
b. Résolution graphique avec la méthode d'Euler.
c. Chercher les solutions DSE de (E).
d. Montrer que si f est une solution DSE de (E) telle que $f(0) = 0$, alors f est décroissante...

141 *Centrale Maths2 PSI 2018* Marion Lebrun

Soit $q = (t,x,y,z) \in \mathbb{R}^4$ qu'on note $q = (a, \overrightarrow{u})$ avec $a = t$ et $\overrightarrow{u} = (x,y,z)$. On note H l'ensemble formé par tous ces "quaternions" q. On définit le produit sur H par $(a,\overrightarrow{u}) \times (b,\overrightarrow{v}) = (ab - (\overrightarrow{u}|\overrightarrow{v}), a\overrightarrow{v} + b\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$.
H est un nouvel espace vectoriel réel. On admet que cette multiplication est associative et distributive par rapport à l'addition usuelle de vecteurs de $\mathbb{R}^4$.
À un quaternion $q \in H$ est associé le réel $N(q) = \sqrt{t^2 + x^2 + y^2 + z^2}$ (sa norme).
On définit l'application $C : H \to H$ par $C(q) = (a, -\overrightarrow{u})$ si $q = (a, \overrightarrow{u})$.
a. Écrire une fonction permettant de renvoyer le produit de deux éléments q_1 et q_2 de H. La tester pour $q_1 \times q_2$ et $q_2 \times q_1$ avec $q_1 = (1,1,1,1)$ et $q_2 = (-1,0,0,1)$. Que constate-t-on ?
b. Montrer que C est un automorphisme de H. Caractériser les espaces géométriques caractéristiques de C.
c. Écrire une fonction permettant de renvoyer $C(q)$ étant donné l'argument q.
d. Exprimer, pour $(q,q') \in H^2$, $C(q \times q')$ en fonction de $C(q)$ et $C(q')$.
e. Calculer $q \times C(q)$. Montrer que $N(q) = ||q \times C(q)||$. Écrire une fonction renvoyant $N(q)$.
f. Tester $N(q) =$ et $N(C(q))$ pour différentes valeurs de q. Proposer une conjecture. La démontrer.
g. Montrer, pour $q \in H$ non nul, que $q \times \left(\dfrac{1}{N(q)^2} C(q)\right) = (1,0,0,0)$. On note $q^{-1} = \dfrac{1}{N(q)^2} C(q)$.

Soit $q_1 \in H$ tel que $N(q_1) = 1$. On définit $g_{q_1} : H \to H$ par $g_{q_1}(q) = q_1 \times q \times q_1^{-1}$.
h. Montrer que g_{q_1} est un automorphisme de H...

142 *Centrale Maths2 PSI 2018* Charlotte Nivelle

Soit l'arc paramétré Γ : $x(t) = \sqrt{\cos^2(t) + 4\cos(t) + 3}$, $y(t) = \sin(t)$.
On définit $f : (x, y, z) \mapsto (\sqrt{x^2 + y^2} - z)^2 + z^2 - 1$.
a. Quel est le domaine de définition de Γ ? Étudier les symétries de Γ.
b. Étudier les variations de x et y. Caractériser les points singuliers de Γ.
c. Étudier les tangentes à l'origine de Γ.
d. Tracer Γ et ses tangentes sur le même graphe.
e. Calculer la longueur de Γ en écrivant un programme.
f. Quel est le domaine de définition D de f ? f est-elle de classe C^1 sur D ?
g. Étudier les extrema de f....

143 *Centrale Maths2 PSI 2018* Marie-Jeanne Paul

Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt$.
a. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est bijective (on précisera sur quel intervalle).
b. Montrer que pour tout réel x, il existe un unique réel $y(x)$ tel que $\int_x^{y(x)} e^{t^2}\,dt = 1$.
c. Écrire une fonction prenant en argument x et y et renvoyant $\int_x^y e^{t^2}\,dt$.
d. Écrire une fonction prenant en argument x et renvoyant $y(x)$ à 10^{-2} près.
e. Tracer la courbe de la fonction y sur l'intervalle $[-10; 10]$.
f. Montrer que y est monotone et dérivable sur $\mathbb{R}$.

144 *Centrale Maths2 PSI 2018* Oihana Piquet

On définit sur $E = \mathbb{R}[X]$ le produit scalaire $(P|Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$. On note $||\,.\,||$ la norme euclidienne associée à ce produit scalaire. On note aussi $N_\infty(P) = \underset{[-1;1]}{\mathrm{Max}}\,|P|$.
a. Justifier les affirmations données par l'énoncé.
b. Calculer $(X^k|X^l)$ pour $(k, l) \in [\![0; 5]\!]^2$.
c. Donner $(E_i)_{0\leqslant i\leqslant 5}$ la famille orthonormalisée par Gram-Schmidt de la base canonique de $\mathbb{R}_5[X]$.
d. Représenter sur $[-1; 1]$ ces polynômes. En quel point est atteint le maximum ?
e. Montrer que si $P \in \mathbb{R}_5[X]$ et $||P|| \leqslant 1$, alors $N_\infty(P) \leqslant 3\sqrt{2}$...

145 *Centrale Maths2 PSI 2018* Raphaël Pobeda

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{j^n}{n}$ avec $j = e^{2i\pi/3}$. On pose aussi $I = \int_0^1 \dfrac{j - t}{1 + t + t^2}\,dt$.
a. Conjecture sur la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ et la valeur de $S = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$?
b. Que dire de l'existence de I ? Approcher I avec la méthode des rectangles.
c. Conjecturer une relation simple entre S et I.
d. Montrer cette conjecture. Indication : calculer $\int_0^1 (jt)^{k-1}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.
e. Le calcul exact de I est-il possible ? Si oui, comparer e^{-S} et $h(I)$ (h à trouver).
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite 3-périodique $a_1 = \alpha$, $a_2 = \beta$ et $a_3 = \gamma$.
On définit $z_n = \dfrac{a_n}{n}$ et $u_n = z_{3n-2} + z_{3n-1} + z_{3n}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.
f. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 1} z_n$ converge si et seulement si $\alpha + \beta + \gamma = 0$.
g. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 1} z_n$ converge si et seulement si $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge....

146 <u>*Centrale Maths2 PSI 2018*</u> Titouan Sancier

On définit, pour tout $y \notin \left\{\frac{1}{2}+n \mid n \in \mathbb{Z}\right\} = A$ l'entier q le plus proche de y, c'est-à-dire vérifiant $|y-q| < \frac{1}{2}$.

a. Coder une fonction qui renvoie l'entier le plus proche d'un réel $y \notin A$.

Soit a_n l'entier le plus proche de $n!e^{-1}$ et $b_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

b. Afficher les 16 premiers termes des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c. Conjecturer et prouver cette conjecture.

Soit $d_n = n!e^{-1} - b_n$ et $J_n = \int_0^1 x^n e^x dx$.

d. Afficher les 16 premiers termes des suites $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

e. Conjecturer et prouver cette conjecture....

147 <u>*Centrale Maths2 PSI 2018*</u> Antoine Secher

On considère une urne avec initialement une boule rouge et une boule noire. Au tirage n, on tire au hasard une boule dans l'urne. On la remet, et on rajoute en plus une boule de la même couleur que celle qu'on vient de tirer. On note X_n (resp. Y_n) la variable aléatoire qui indique le nombre de boules rouges (resp. noires) après n tirages. Pour $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n(u,v) = \sum\limits_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2} P(X_n = i, Y_n = j)u^i v^j$.

a. Écrire une fonction *simulation* (n) qui renvoie le nombre de boules rouges après n tirages.

b. Écrire une fonction *moyenne*(n, N) qui renvoie une liste L telle que $L[i]$ est la proportion des N simulations effectuées où on a i boules rouges après n tirages.

c. Tester cette dernière fonction et commenter les résultats.

d. Pour $(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2$, donner $P(X_{n+1} = i, Y_{n+1} = j)$ à l'aide de $P(X_n = i-1, Y_n = j)$, $P(X_n = i, Y_n = j-1)$.

e. En déduire que $P_{n+1}(u,v) = \frac{1}{n+2}\left(u^2 \frac{\partial P_n}{\partial u}(u,v) + v^2 \frac{\partial P_n}{\partial v}(u,v)\right)$.

f. Conclure que $P_n(u,v) = \frac{1}{n+2} \sum\limits_{k=0}^{n} u^{i+k} v^{i+j-k}$ (pas sûr).....

148 <u>*Centrale Maths2 PSI 2018*</u> Paul Simon

Soit $A = \begin{pmatrix} 64 & 0 & -28 & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix}$. Soit $A_1 = A$ et $\forall k \geqslant 1,\ A_{k+1} = A(A_k + a_k I_4)$ où $a_k = -\frac{\text{Tr }(A_k)}{k}$.

a. Calculer a_1, a_2, a_3 et a_4.

b. Calculer $P(A)$ si $P = X^4 + \sum\limits_{k=1}^{4} a_k X^{4-k}$. Que représente le polynôme P ?

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les valeurs propres complexes sont (éventuellement répétées avec leur ordre de multiplicité) $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. On définit $\chi_A = \prod\limits_{j=1}^{n}(X - \lambda_j) = X^n + \sum\limits_{k=1}^{n} b_k X^{n-k}$ et $S_j = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k^j$ pour $j \in \mathbb{N}^*$.

c. Montrer que $\forall j \in \mathbb{N}^*,\ \text{Tr }(A^j) = S_j$.

On donne la relation suivante : $\exists r > 0,\ \forall x \in]-r; r[\setminus\{0\},\ x^{n-1}\chi_A'(1/x) = x^n \chi_A(1/x)\left(\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{1+\lambda_j x}\right)$.

d. Montrer que pour $1 \leqslant p \leqslant n$, $S_p + S_{p-1}b_1 + \cdots + nb_p = 0$.

e. En déduire un algorithme permettant de calculer les coefficients de χ_A.

f. Conclure quant à la question **b.**.

149 *Centrale Maths2 PSI 2018* Benoit Souillard

On considère un tournoi. À chaque tour a lieu un duel. Le duel 1 oppose A_0 et A_1. Le gagnant du duel passe au tour suivant, le perdant est éliminé. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, le joueur A_k a une probabilité p de gagner le duel k et son adversaire a une probabilité $q = 1 - p$ de gagner.

Le tournoi se termine lorsqu'un joueur a gagné N duels.

On note E_n l'évènement " il n'y a pas de gagnant à l'issue du duel n".

Tous les duels sont mutuellement indépendants.

a. Écrire une fonction *tournoi*(N, p) qui modélise le tournoi et renvoie le nombre de duels nécessaires pour que le tournoi se termine.

b. Écrire une fonction *moyenne*(N, p) qui renvoie la valeur moyenne du nombre de duels nécessaires pour finir un tournoi sur 10^4 tournois.

c. Tester cette fonction pour $N = 6$ et $p = 0.6$ puis pour $N = 3$ et $p = 0.3$.

d. Montrer que $\forall k \in [\![1; N-1]\!]$, $P(E_n) = 1$. Que vaut $P(E_N)$?

e. Montrer que $\forall n \geqslant N+1, P(E_{n-1}) - P(E_n) = pq^{N-1}P(E_{n-N})$.

f. Montrer que la suite $(P(E_n))_{n\geqslant 1}$ converge, puis que $\sum\limits_{n\geqslant 1} P(E_n)$ converge.

g. Questions python sur des approximations + questions de probabilités sur des lois, espérances, fonction génératrices....

150 *Centrale Maths2 PSI 2018* Nicolas Ziegler

On s'intéresse à des applications linéaires $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ avec $p \leqslant n$ telles que $\mathrm{rang}\,(f) = p$. On se donne un vecteur $b \in \mathbb{R}^n$ et on cherche les vecteurs $x \in \mathbb{R}^p$ tels que $||f(x) - b|| = d(b, \mathrm{Im}\,(f))$.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a. Montrer que f canoniquement associée à A vérifie les hypothèses de l'énoncé.

b. Est-ce que b appartient à $\mathrm{Im}\,(f)$?

c. Déterminer la projection orthogonale de b sur $\mathrm{Im}\,(f)$.

d. Trouver tous les vecteurs $x \in \mathbb{R}^3$ tels que $||f(x) - b|| = d(b, \mathrm{Im}\,(f))$.

e. Étude du cas général....

151 *OdlT 2018/2019 Centrale PSI planche 156 avec Python*

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, on note (c_1, c_2, c_3) les colonnes de A.

a. Montrer, de la manière la plus simple possible, que (c_1, c_2, c_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

b. Donner, avec un nombre de décimales raisonnable, la base orthonormale (u, v, w) issue de (c_1, c_2, c_3) par l'algorithme de Gram-Schmidt.

c. Soit $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, montrer qu'il existe $S \in SO(2)$ telle que $S \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ 0 \end{pmatrix}$ et déterminer γ.

d. Montrer qu'il existe $Q \in O(3)$ tel que QA soit triangulaire supérieure (on pourra chercher $Q_1 \in O(3)$ telle que Q_1A ait son coefficient de la première colonne et dernière ligne nul).

e. Comparer Q à la matrice de passage de $\mathbb{R}^3$ dans (u, v, w), conclure...

152 *OdlT 2018/2019 Centrale PSI planche 161 avec Python*

Soit $q = (q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite croissante d'entiers naturels avec $q_1 \geqslant 2$.

On pose, pour $n \geqslant 1$, $S_n(q) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{q_1 \cdots q_k}$ et, en cas de convergence de la série, $S(q) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{q_1 \cdots q_n}$.

a. Écrire un algorithme qui calcule $S_n(q)$ et afficher les 10 premiers termes pour une suite géométrique de raison $r \in \{2, 3, 7\}$. Commenter.

b. Tester l'algorithme pour deux suites autres que géométriques et commenter.

c. Montrer que, pour toute telle suite q, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{q_1 \cdots q_n}$ converge et que $S(q) \in]0; 1]$.

d. Montrer que $\forall x \in]0; 1]$, il existe une unique suite $q(x)$ telle que $S\big(q(x)\big) = x$...

153 *OdlT 2018/2019 Centrale PSI planche 165 avec Python*

Soit $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ continue.

a. Montrer que le problème de Cauchy (C_a) : $\begin{cases} y''t) = q(t)y(t) \\ y(0) = 1 \\ y'0) = a \in \mathbb{R} \end{cases}$ admet une solution unique, notée y_a.

b. Montrer que $t \mapsto y_a(t)^2$ a une dérivée seconde strictement positive et en déduire le signe de y_a sur $\mathbb{R}_+$.

c. Montrer que $\forall t \geqslant 0,\ y_a(t) \geqslant 1 + at$.

d. Tracer y_a sur $[0; 5]$ avec un pas de $0,01$, pour $-5 \leqslant a \leqslant 5$, d'abord pour $q(t) = \dfrac{1+t}{20}$, puis pour $q(t) = \dfrac{e^t}{20}$.

e. En déduire les valeurs de a pour lesquelles y_a s'annule sur cet intervalle.

f. Montrer que $z_1 : t \mapsto \displaystyle\int_0^t \frac{dx}{y_1(x)}$, est bijective de $\mathbb{R}$ dans un intervalle $[0; M[$ où M est à déterminer.

g. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R},\ y_a(t) = y_1(t)\big(1 + (a-1)z_1(t)\big)$...

154 *Compléments OdlT 2018/2019 Centrale PSI planche 167 avec Python*

On pose $U_0 = 1$ et $\forall n \geqslant 1,\ U_n = \sum\limits_{j=0}^{n-1} \dbinom{n-1}{j} U_j$.

a. Écrire une fonction Python qui calcule U_n et une fonction *Factorielle(n)* qui calcule $n!$, les appliquer à $5 \leqslant n \leqslant 15$, comparer U_n et $n!$ et démontrer la propriété observée.

b. Montrer que $\sum\limits_{k\geqslant 0} u(k, n)$ converge, où $u(n, k) = \dfrac{k^n}{k!}$; on note S_n sa somme, calculer S_0.

c. Écrire une fonction Python qui calcule $S(n) = \dfrac{1}{e} \sum\limits_{k=0}^{n} u(k, n)$ et l'appliquer à $5 \leqslant n \leqslant 15$.

d. Conjecturer une relation entre U_n et $S(n)$.

e. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum\limits_{j=0}^{n-1} S_j$ puis démontrer la conjecture émise.

f. Montrer que la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{U_n}{n} x^n$ possède un rayon de convergence R non nul et donner une équation différentielle vérifiée par sa somme f.

g. En déduire f...

155 *Compléments OdlT 2018/2019 Centrale PSI planche 172 avec Python*

a. Justifier que $(E) : y''(t) + \left(1 + \dfrac{50}{t^2}\right) y(t) = 0$ admet une unique solution g telle que $g(1) = 0$ et $g'(1) = 1$.

b. Tracer cette solution sur $[1; 50]$, sur Python, à l'aide de la fonction *odeint*.

c. On note $x_1 < x_2 < \cdots < x_N$ les N points d'annulation de g sur l'intervalle $[1, 50]$ et $\forall n \in [\![1; N-1]\!]$, on pose $\Delta_n = x_{n+1} - x_n$. Tracer, à l'aide de la commande de la question précédente, tous les points $M_n(n, \Delta_n)$.

d. Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $f_a(t) = \sin(t - a)$ et $\phi(t) = f(t)g'(t) - f'(t)g(t)$; tracer f_a et g sur l'intervalle $[a, a + \pi]$ et constater que g s'annule une fois sur $[a; a + \pi]$.

e. On suppose que g ne s'annule pas sur $[a, a+\pi]$; étudier les variations de ϕ et en déduire une contradiction...

156 *Compléments OdlT 2018/2019 Centrale PSI planche 175 avec Python*

On dit que A symétrique réelle vérifie la propriété (P) si $\forall X \neq 0,\ {}^tXAX > 0$.
On dit que $(V_1, \cdots, V_n)$ est une famille A-conjuguée si $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ {}^tV_iAV_j = \delta_{i,j}$.

a. Vérifier que $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ vérifie (P).

b. Montrer que $\phi : (X,Y) \mapsto {}^tXAY$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.

c. Construire une base orthonormale pour ce produit scalaire par le procédé de GRAM-SCHMIDT appliqué à la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

d. On suppose (u_1, u_2, u_3) et (v_1, v_2, v_3) sont A-conjuguées. Donner un lien entre $\sum\limits_{k=1}^{3} u_k{}^tu_k$ et A^{-1} et entre $\sum\limits_{k=1}^{3} v_k{}^tv_k$ et A^{-1}, puis entre $\sum\limits_{k=1}^{3} ||v_k||^2$ et $\mathrm{Tr}\ (A^{-1})$.

e. Montrer que si A vérifie (P), il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que, si $(V_1, \cdots, V_n)$ est A-conjuguée, alors $\sum\limits_{k=1}^{n} ||V_k||^2 = \alpha$...

157 *Compléments OdlT 2018/2019 Centrale PSI planche 195 avec Python*

On dit que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthotransposable s'il existe $O \in O(n)$ telle que ${}^tOMO = {}^tM$.

a. Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

b. Créer une fonction Python qui calcule la norme (quelconque) d'une matrice de taille 2.

c. On note $S(t)$ la symétrie orthogonale du plan, d'angle t. Tracer la graphe de $t \mapsto ||S(t)MS(t) - {}^tM||$ pour $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Quel est son minimum ? Que peut-on en déduire ?

d. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ orthotransposable et décomposée sous la forme $M = S + A$. Montrer que S est diagonale et en déduire que toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est orthotransposable.

e. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ orthotransposable. Montrer que $\det(M{}^tM - {}^tMM) = 0$...

158 *Compléments OdlT 2018/2019 Centrale PSI planche 208 avec Python*

a. Calculer le polynôme caractéristique de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}$.

b. Donner ses valeurs propres et leur module. A est-elle diagonalisable ?

On donne $u_0 = 2$, $u_1 = 3$, $u_2 = ?$, $u_3 = ?$, $u_4 = 11$ et $u_{n+5} = \dfrac{1}{5}(u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + u_{n+4})$.

c. Écrire une fonction Python renvoyant une liste de $N+1$ éléments de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour N donné.

d. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ semble-t-elle converger ? Si oui, vers quelle valeur ?

e. Montrer que l'on peut écrire un système matriciel de la forme $U_{n+1} = BU_n$ où U_n et B sont à définir.

f. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = B^nU_0$ et que $(B^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice de projection dont on donnera les éléments caractéristiques.

g. Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pour $0 \leqslant i \leqslant 4$, on pose $v_i = \ln(u_i)$ et $v_{n+5} = \prod\limits_{p=0}^{5} (v_n - p)^{1/5}$

h. Écrire une fonction Python représentant les $N+1$ valeurs de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour N donné.

i. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ? Qu'en dire, par rapport à $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?..

159 *Compléments OdlT 2018/2019 Centrale PSI planche 209 avec Python*

On dit qu'une matrice carrée A est à diagonale propre si ses coefficients diagonaux sont ses valeurs propres.
a. Donner une matrice A à diagonale propre et non diagonalisable.
b. Vérifier avec Python si $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ est à diagonale propre.
c. Définir une fonction *Polynome(*M*)* qui renvoie les coefficients du polynôme $Q_M = \chi_M - \prod\limits_{i=1}^{n}(X - m_{ii})$.
d. Définir une norme N sur $\mathbb{R}[X]$ et l'implémenter sur Python.
e. Soit $A(a) = \begin{pmatrix} a & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$???. À quelle condition sur a la matrice $A(a)$ est-elle à diagonale propre ? Indication : on pourra utiliser le graphe de $a \mapsto N(P_a)$ où P_a est un polynôme bien choisi.
f. Que peut-on dire de A, symétrique réelle et à diagonale propre (calculer $\mathrm{Tr}\,(A^2)$ de deux façons) ?...

160 *Compléments OdlT 2018/2019 Centrale PSI planche 211 avec Python*

$M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite à diagonale strictement dominante si : $\forall i \in [\![1;n]\!],\ |m_{i,i}| > \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |m_{i,j}|$.
a. Écrire une fonction Python *diagdom(*M, n*)* qui prend M et n en argument et qui teste si M est à diagonale strictement dominante.
b. Donner une matrice $M \in O(2)$ à diagonale strictement dominante et la tester avec la fonction précédente.
c. Les matrices à diagonale strictement dominante forment-elle un ensemble stable par produit matriciel ?
d. Montrer que si $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et M à diagonale strictement dominante, $MX \neq 0$. Qu'en déduit-on ?
e. Écrire une fonction Python qui calcule $r_{Min} = \underset{i \in [\![1;n]\!]}{Min}\left(|m_{i,i}| - \sum\limits_{j \neq i} |m_{i,j}|\right)$ pour M donnée.
f. L'ensemble des matrices à diagonale strictement dominante est-il ouvert ?
g. Trouver les inverses, quand ils existent, de deux matrices d'ordre 3 données et dire si ces inverses sont à diagonale strictement dominante...

161 *Compléments OdlT 2018/2019 Centrale PSI planche 212 avec Python*

Soit une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable, de valeurs propres $a_1, \cdots, a_n$, P une matrice de passage telle que $M = P\,\mathrm{diag}(a_1, \cdots, a_n)\,P^{-1}$ et $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une application.
a. Écrire une fonction *appliquer(*f, M*)* qui renvoie $P\,\mathrm{diag}\big(f(a_1), \cdots, f(a_n)\big)P^{-1}$.
b. On choisit $M = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Tester le programme pour $f(x) = x$, $f(x) = x^2$ et $f(x) = \sin x$.
c. Même question pour M^2. Comparer et expliquer.
d. On pose $S_N = \sum\limits_{k=0}^{N} \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!} M^{2k+1}$. Comparer les premiers termes de S_N à la matrice obtenue avec *appliquer(*$\sin, M$*)* et conclure.
e. On note u l'endomorphisme canoniquement associé à $P\,\mathrm{diag}\big(f(a_1), \cdots, f(a_n)\big)P^{-1}$. Montrer que la restriction u_i de u au sous-espace propre E_i associé à la valeur propre a_i de M vérifie $u_i = f(a_i)\mathrm{id}_{E_i}$.
Soit Q inversible et $(b_1, \cdots, b_n)$ complexes tels que : $P\,\mathrm{diag}(a_1, \cdots, a_n)\,P^{-1} = Q\,\mathrm{diag}(b_1, \cdots, b_n)\,Q^{-1}$.
f. Montrer que $P\,\mathrm{diag}\big(f(a_1), \cdots, f(a_n)\big)\,P^{-1} = Q\,\mathrm{diag}\big(f(b_1), \cdots, f(b_n)\big)\,Q^{-1}$ puis exprimer $f(M)$ simplement.
g. Montrer que $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable puis que $M_k = \begin{pmatrix} (1/4)^k & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M'_k = \begin{pmatrix} -(1/4)^k & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, définies pour $k \in \mathbb{N}^*$, le sont.
h. Trouver les limites de $(M_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ et $(M'_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$. Que remarque-t-on ?...

162 *Compléments OdlT 2018/2019 Centrale PSI planche 214 avec Python*

a. Tracer, sur $[-3;2]$, les représentations graphiques de $P(X) = X^4+X^3-6X^2$ et $Q(X) = -X^4+X^3+5X^2-3X+6$.
b. Tracer $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid P(x) = Q(y)\}$.
c. Montrer que Γ est fermé et borné.
d. Montrer que $\exists M_0(x_0, y_0),\ f(M_0) = x_0^2 + y_0^2 = \mathrm{Sup}\,(x,y) \in \Gamma(f(M) = x^2 + y^2)$.
e. Donner l'équation de la tangente en M_0 à Γ et un vecteur directeur de cette tangente...

PARTIE 6 : 2019

163 *Centrale Maths2 PSI 2019* Augustin Aumont

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe une unique suite $(b_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ à support fini (b_i pour i-ème bit) telle que $n = \sum_{i=0}^{+\infty} b_i 2^i$ (unicité de l'écriture en base 2 de n).

Soit Y une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$. On pose $X = Y - 1$.

Soit, pour $i \in \mathbb{N}$, X_i la variable aléatoire correspondant au i-ème bit de X (c'est-à-dire $X = \sum_{i=0}^{+\infty} X_i 2^i$).

a. Expliquer la fonction suivante :

```
def f(n, i) :
  return(n//2^i)%2
```

b. Construire une fonction permettant, pour p, N, m donnés, de

- faire N tirages pour la variable aléatoire X.

- construire un tableau contenant, pour i allant de 0 à $m-1$, la valeur moyenne des X_i.

c. Tester le programme pour $N = 10000$, $m = 15$ et $p \in \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}\right\}$. Que constate-t-on ?

d. Montrer que $\forall i \in \mathbb{N},\ P(X_i = 1) = \sum_{j=0}^{2^i-1} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} P(X = 2^{i+1}k + 2^i + j\right)$.

e. Trouver, pour $i \in \mathbb{N}$, la loi de X_i.

164 *Centrale Maths2 PSI 2019* Ulrick Blé

Soit $n \geqslant 1$ et $M_n = (m_{i,j})_{0\leqslant i,j\leqslant n-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $m_{i,j} = 0$ si $i = j$ et $m_{i,j} = j+1$ sinon.

On définit $f_n : \mathbb{R} \setminus [\![-n;-1]\!] \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{x+k}$.

a. Écrire une fonction $\mathtt{matrice}(n)$ qui renvoie les valeurs propres de M_n.

b. Pour $n \in \{2,3,5,10\}$, tester $\mathtt{matrice}(n)$ et déterminer la dimension des sous-espaces propres de M_n. Quelle conjecture pour M_n ?

c. Écrire une fonction $\mathtt{fonction}(n,x)$ qui renvoie la valeur de $f_n(x)$.

d. On prend $x \in [-15;15]$, tracer pour un pas de $0,01$ et $n \in \{2,3,5,10\}$ les graphes des fonctions f_n.

e. Que dire des valeurs de x qui vérifient $f_n(x) = 0$? Faire une conjecture sur les valeurs propres de M_n.

f. Étudier les variations de f_n et déterminer d_n, le nombre de valeurs annulant f_n.

Quel est le signe de la plus grande valeur qui annule f_n ?

g. Soit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus [\![-n;-1]\!]$, on pose $X_\lambda = \left(\frac{1}{\lambda+i}\right)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{R}^n$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que X_λ soit un vecteur propre de M_n. Valider les conjectures faites en questions **b.** et **e.**.

h. Étudier pour certaines valeurs de n la quantité $\frac{\det(M_n)}{n!}$. à l'aide d'une fonction python.

Quelle conjecture peut-on faire ?....

165 *Centrale Maths2 PSI 2019* Tom Boileau et Benoît Le Morvan

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $c_n(x) = \dfrac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!}$ et $c_0(x) = 1$.

On pose $I = \{-1.23, -0.7, 0.5, 1, 2, 3, 4, 5, 6.789\}$.

a. Écrire une fonction python $c(n, x)$ renvoyant la valeur de $c_n(x)$.

Que vaut $c_n(x)$ pour $n = 10$ et $x = 0.5$, $x = -1.23$ et $x = 3$?

b. Écrire une fonction python $\mathtt{somme}(N, x)$ qui renvoie la valeur de $\sum\limits_{n=0}^{N} c_n(x)$. Renvoyer toutes les valeurs de $\mathtt{somme}(N, x)$ pour $N \in [\![0; 10]\!]$ et $x \in I$. Pour quelles valeurs de x la série semble-t-elle converger ?

c. Trouver une fonction simple f telle que $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n(x)$ pour $x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

d. Tracer les graphes de f et de $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{N} c_n(x)$ pour $N = 10$ et avec un pas de 0.01. Que peut-on conjecturer ?

e. Si $x \leqslant -1$, montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ |c_n(x)| \geqslant 1$. Que dire de la convergence de $\sum\limits_{n \geqslant 0} c_n(x)$. ?

f. Si $x \in \mathbb{R}_+$, montrer que $\sum\limits_{n \geqslant 0} c_n(x)$ converge.

166 *Centrale Maths2 PSI 2019* Thomas Brémond

On étudie un tournoi avec n joueurs numérotés de 1 à n.

Chaque joueur rencontre tout autre joueur une fois et une seule. On définit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, appelée la matrice du tournoi, par $a_{i,j} = 0$ si $i = j$, $a_{i,j} = 1$ si le joueur i bat le joueur j et $a_{i,j} = -1$ sinon.

a. Écrire une fonction qui prend en argument l'entier n et qui renvoie une matrice A de tournoi aléatoire.

b. Calculer le déterminant de plusieurs matrices et conjecturer sur la valeur du déterminant en fonction de n selon que n soit pair ou impair.

c. Prouver la conjecture dans le cas où n est impair.

d. On définit $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $\det(K)$.

e. Soit $H = M - K$ où M est une matrice de tournoi. Prouver que $\det(M)$ et $\det(K)$ ont la même parité.

167 *Centrale Maths2 PSI 2019* Charles Broquet

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\omega_n = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et $A_n = (a_{p,q})_{1 \leqslant p,q \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $a_{p,q} = \omega_n^{(p-1)(q-1)}$.

a. Écrire une fonction définissant A_n en fonction d'un argument n. La tester pour $n \in [\![2; 5]\!]$.

b. Calculer $A_n\overline{A_n}$ pour $n \in [\![2; 5]\!]$. Proposer une conjecture. La prouver.

c. Calculer A_n^2 pour $n \in [\![2; 5]\!]$. Proposer une conjecture. La prouver.

d. En déduire la valeur de A_n^4. En déduire un polynôme annulateur de A_n. A_n est-elle diagonalisable ?

e. Calculer $|\det(A_n)|$ à l'aide de la valeur de $A_n\overline{A_n}$.

f. Calculer $\det(A_n)$ à l'aide d'un déterminant usuel.

168 *Centrale Maths2 PSI 2019* Axel Brulavoine

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $G \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ et $g : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}[X]$ où $g(P)$ est le reste de la division euclidienne de XP par G.

a. Montrer que g est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

On prend dans les trois prochaines questions $n = 3$ et $G = X^4 - 2X^3 - X^2 + 2X$.

b. Déterminer la matrice de g dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

c. Est-ce que g est diagonalisable ?

d. Tracer les graphes des polynômes vecteurs propres de g sur le segment $[-3; 2]$.

On revient dans la suite de l'exercice au cas général.

e. Déterminer la matrice de g dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

f. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que g soit diagonalisable.

g. Soit $F \in \mathbb{R}_n[X]$ fixé, reprendre les questions précédentes avec $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ défini par $f(P)$ le reste de la division euclidienne de FP par G.

169 *Centrale Maths2 PSI 2019* Mathis Chénet

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ et le système différentiel $(S) \ : \ X'(t) = AX(t) \iff \begin{cases} x'(t) = & -y(t) - 2z(t) \\ y'(t) = & x(t) - 2z(t) \\ z'(t) = & 2x(t) + 2y(t) \end{cases}$.

a. Observer les graphes des fonctions $t \mapsto 2x(t) - 2y(t) + z(t)$ et $t \mapsto x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2$ pour $t \in [0; 10]$ par pas de $0,01$. Énoncer des conjectures concernant ces fonctions.

b. Démontrer ces conjectures.

c. Donner des conditions nécessaires et suffisantes de diagonalisabilité des matrices carrées.

d. Démontrer que pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ solution de (S), il existe trois colonnes C_1, C_2, C_3 de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ telles que $\forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = C_1 + e^{3it}C_2 + e^{-3it}C_3$.

e. Si X solution de (S), montrer que $t \mapsto ||X(t)||_2$ est constante.

170 *Centrale Maths2 PSI 2019* Carla Chevillard

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = (a_{i,j})_{0 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définie par $a_{i,j} = 0$ si $i > j$, $a_{i,j} = 2$ si $i = j$, $a_{i,j} = \binom{j}{i}$ sinon.

a. La matrice A_n est-elle inversible ? Quel est son spectre ? Dimension du sous-espace propre ?

On pose $C_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A_n^{-1} C_n = \begin{pmatrix} e_{0,n} \\ \vdots \\ e_{n,n} \end{pmatrix}$ et $E_n = \sum_{k=0}^{n} e_{k,n} X^k \in \mathbb{R}_n[X]$.

b. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X+1) + P(X) = 2X^n$.

c. Écrire une fonction $\texttt{coef}(n)$ qui calcule les $e_{k,n}$.

d. Écrire une fonction $\texttt{euler}(n)$ qui renvoie les polynômes E_n. Calculer $E_1, \cdots, E_{10}$.

171 *Centrale Maths2 PSI 2019* Maël Classeau et Louis Destarac

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A vérifie la propriété $(\mathcal{P})$ si $\exists P_A \in GL_n(\mathbb{K}),\ {}^tA = P_A^{-1}AP_A$.
a. Montrer que A vérifie $(\mathcal{P})$ si A est diagonalisable. Exprimer P_A dans ce cas.
b. On donne $A = \begin{pmatrix} . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{pmatrix}$. Trouver $Q \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $Q^{-1}AQ$ soit diagonale avec des coefficients entiers. Calculer $P_A \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que ${}^tA = P_A^{-1}AP_A$.
c. La matrice $A = \begin{pmatrix} a & ab \\ 0 & b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ vérifie-t-elle $(\mathcal{P})$. Si oui, donner P_A.
d. On donne $A = \begin{pmatrix} . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{pmatrix}$ (à coefficients entiers). Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$.

172 *Centrale Maths2 PSI 2019* Romain Cornuault et Enola Soenen

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 2\sqrt{u_n(u_n+1)}$.
Soit la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = \dfrac{x^2}{4(x+1)}$.
a. Calculer les 30 premiers termes de cette suite. Conjecturer. Prouver votre conjecture.
b. Calculer les 30 premiers termes de $\left(\dfrac{4^n}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et une approximation de $\dfrac{1}{4}\left(\displaystyle\int_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x\sqrt{x+1}}\right)^2$. Conjecturer.
c. Montrer que f est bijective et déterminer sa bijection réciproque.
d. Pour $A \geqslant 1$, montrer que $\displaystyle\int_A^{+\infty} \dfrac{dx}{x\sqrt{x+1}}$ converge. Montrer que $\displaystyle\int_A^{+\infty} \dfrac{dx}{x\sqrt{x+1}} = \int_1^{+\infty} \dfrac{dt}{t\sqrt{At+1}}$.
e. Prouver l'existence et déterminer la valeur de $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \sqrt{A}\int_A^{+\infty} \dfrac{dx}{x\sqrt{x+1}}$.
On admet que $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\int_{u_n}^{+\infty} \dfrac{dx}{x\sqrt{x+1}} = 2\int_{u_{n+1}}^{+\infty} \dfrac{dx}{x\sqrt{x+1}}$ (R).
f. Démontrer la conjecture de la question **b.**.
g. Montrer la relation (R).

173 *Centrale Maths2 PSI 2019* Thomas Crété

Soit $n \geqslant 2$, on dit qu'une permutation σ de $[\![0;n-1]\!]$ est alternée si $\forall i \in [\![0;n-2]\!],\ (-1)^i\big(\sigma(i+1)-\sigma(i)\big) > 0$.
On note a_n le nombre de permutations alternées de $[\![0;n-1]\!]$. On pose $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$.
On définit $u_n = \dfrac{a_n}{n!}$: la proportion de permutations alternées parmi toutes les permutations de $[\![0;n-1]\!]$.
a. Déterminer a_2, a_3 et a_4.
b. Écrire un programme renvoyant un booléen attestant si une permutation est alternée ou pas.
c. Écrire une permutation renvoyant une valeur approchée de u_n.
d. Écrire un programme renvoyant la liste des valeurs de u_n pour $n \in [\![0;9]\!]$.
e. Montrer que le rayon de convergence R de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$ vérifie $R \geqslant 1$.
On pose $f : t \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_{2n+1}t^{2n+1}$ et $g : t \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_{2n}t^{2n}$.
f. Tracer sur $[-1;1]$ les graphes des fonctions $f+g$ et $t \mapsto \dfrac{1}{\cos(t)} + \tan(t)$. Conjecturer.
g. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (n+1)u_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} u_{2k+1}u_{n-k-1}$.
h. Montrer que $\forall t \in [-1;1],\ f'(t) = 1 + (f(t))^2$ et $g'(t) = g(t)f(t)$.
i. Montrer la conjecture de la question **f.**.

174 *Centrale Maths2 PSI 2019* Fabien Dupuis

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $N_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ et $R_n = I_{n+1} + \sum\limits_{k=1}^{n} a_k N_n^k \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ où les coefficients a_k sont définis par $a_k = \dfrac{(-1)^{k-1}}{k\,2^{2k-1}}\dbinom{2k-2}{k-1}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

a. Écrire un programme d'argument n qui renvoie N_n.
b. Déterminer N_n^{n+1} pour $n \in \{2, 5, 10\}$. Établir une conjecture. Prouver cette conjecture.
c. Écrire un programme d'argument n qui renvoie R_n.
d. Calculer R_n^2 pour $n \in \{2, 5, 10\}$. Émettre une conjecture.
e. Montrer l'existence d'un polynôme P_n tel que $\sqrt{1+x} \underset{0}{=} P_n(x) + O(x^{n+1})$.
f. Montrer que $P_n^2 - X - 1$ est un multiple de X^{n+1}.
g. Prouver la conjecture de la question **d.**.

175 *Centrale Maths2 PSI 2019* Pierre Fabre

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer le polynôme caractéristique P de M. Tracer le graphe de P sur $[-1; 3]$.
b. Montrer que M possède une unique valeur propre réelle λ et que $\lambda \in [1; 2]$.
c. On note σ une valeur propre complexe non réelle de M. Montrer que $|\sigma|^2\lambda = 1$. Comparer 1, $|\sigma|$ et $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

On pose, pour tout entier n, $u_n = \mathrm{Tr}\,(M^n)$ et $v_n = \cos(\pi u_n)$.
d. Montrer qu'il existe deux réels α et β tels que $\forall n \in \mathbb{N},\ M^{n+3} = \alpha M^{n+1} + \beta M^n$.
e. Trouver une relation de récurrence pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Calculer u_n et v_n pour $n \in [\![0; 10]\!]$.
f. Tracer l'évolution des termes de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $n \in [\![0; 21]\!]$.
g. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique et donner sa période.
h. On pose $w_n = \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$. Montrer que la suite $(w_n)_{n\geqslant 0}$ n'est pas bornée.

176 *Centrale Maths2 PSI 2019* Romain Galea

Deux candidats A et B se présentent à une élection. Sur m personnes comptant voter, il y en a initialement a qui souhaitent voter pour A. Chaque jour, on isole au hasard une personne parmi les m, puis une seconde. La première convainc systématiquement la seconde de voter comme elle. On définit la variable aléatoire X_n comptant le nombre de personnes ayant l'intention de voter A au n-ième jour.
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0; m]\!]$, on pose $\pi_{n,k} = P(X_n = k)$.
a. Écrire une fonction d'arguments n, m, a, renvoyant le résultat de l'expérience aléatoire au n-ième jour.
b. Montrer que l'on a $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in [\![0; m-1]\!],\ P(X_{n+1} = k+1 | X_n = k) = \dfrac{k(m-k)}{m(m-1)}$ mais aussi $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in [\![0; m]\!],\ P(X_{n+1} = k | X_n = k) = 1 - \dfrac{2k(m-k)}{m(m-1)}$.
c. Montrer que l'on a $\pi_{n+1,k} = \dfrac{(k-1)(m-k+1)}{m(m-1)}\pi_{n,k-1} + \left(1 - \dfrac{2k(m-k)}{m(m-1)}\right)\pi_{n,k} + \dfrac{(k+1)(m-k-1)}{m(m-1)}\pi_{n,k+1}$ pour tout entier n et tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant m-1$.

177 *Centrale Maths2 PSI 2019* Mathis Girard et Auriane Luquet

Soit $x \in]-1;1[$ et $I(x) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 - 2x\cos(\theta) + x^2)\,d\theta$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $u_n(\theta) = \dfrac{x^n \cos(n\theta)}{n}$ et, en cas de convergence, $f_x(\theta) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(\theta)$.

a. Émettre une conjecture sur les valeurs de $I(x)$ pour $x \in]-1;1[$.

b. Montrer que $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

c. Montrer que f_x est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

d. Montrer que $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 - 2x\cos(\theta) + x^2)\,d\theta = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{\pi} \frac{x^n \cos(n\theta)}{n}\,d\theta$ et conclure.

178 *Centrale Maths2 PSI 2019* Perrine Hoffmann

Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $U_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}U_j$.

Pour tout couple $(k, n) \in \mathbb{N}^2$, on pose aussi $u(k, n) = \dfrac{k^n}{k!}$.

On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{U_n}{n!}x^n$ en cas de convergence.

a. Écrire des fonctions $\mathtt{factorielle}(n)$ et $U(n)$ qui renvoient $n!$ et U_n respectivement.

b. Comparer U_n et $n!$ pour $n \in [\![0;10]\!]$. Conjecturer. Démontrer cette conjecture.

c. Montrer que $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u(k, n)$ existe pour tout entier n. Calculer S_0.

d. Écrire une fonction qui retourne $S(p, n) = \dfrac{1}{e}\displaystyle\sum_{k=0}^{p} u(k, n)$. Conjecturer une relation entre S_n et U_n.

e. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}S_j$. Démontrer la conjecture de la question **d.**.

f. Montrer que la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{U_n}{n!}x^n$ admet un rayon R strictement positif.

g. Trouver une équation différentielle vérifiée par f. En déduire une expression “simple” de $f(x)$.

h. En déduire la valeur exacte de R.

179 *Centrale Maths2 PSI 2019* Lola Josseran

Soit l'arc paramétré $\Gamma\ :\ x(t) = \sqrt{\cos^2(t) + 4\cos(t) + 3},\ y(t) = \sin(t)$.

On définit $f : (x, y, z) \mapsto (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 - 2$.

a. Quel est le domaine de définition de Γ ? Étudier les symétries de Γ.

b. Étudier les variations de x et y. Caractériser les points singuliers de Γ.

c. Étudier les tangentes à l'origine de Γ.

d. Tracer Γ sur pyzo. Déterminer la tangente à Γ au point de paramètre $t = \pi$.

e. Calculer la longueur de Γ.

f. Quel est le domaine de définition D de f ? f est-elle de classe C^1 sur D ?

g. Tracer la surface $S\ :\ f(x, y, z) = 0$ sur pyzo.

h. La fonction f admet-elle des points critiques ? Étudier les extrema de f.

180 *Centrale Maths2 PSI 2019* Paul Louzier

Pour s'aider, le candidat pourra importer les modules suivants : import numpy as np, import numpy.linalg as lag ; import matplotlib.pyplot as plt ; import math.

On pose $A = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 13 & 7 & 4 \\ 7 & 13 & 4 \\ 4 & 4 & 16 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a. Montrer que l'équation $(E)\ :\ Ax = b$ admet une unique solution $a \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ à déterminer.

On cherche une nouvelle méthode de résolution. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \big(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})\big)^{\mathbb{N}}$ définie par $x_0 \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = x_n + \alpha(b - Ax_n)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $x_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

b. Écrire une fonction qui prend en entrée x_0, α et n et qui renvoie la liste $[x_0, x_1, \ldots, x_n]$.

c. Écrire une fonction qui prend en entrée x_0, α et n et qui affiche l'évolution des trois suites entre les indices 0 et n sur un même graphe.

d. Essayer cette fonction pour $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et différents $\alpha \in]0;1]$. Que voit-t-on ? Essayer pour différents x_0.

e. La matrice A est-elle diagonalisable ? Donner ses valeurs propres.

On pose $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ et $e_n = \ell - x_n$ lorsque la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

f. Lorsque la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, calculer ℓ.

g. Montrer que : $\big(\forall x_0 \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge }\big) \iff \lim\limits_{n\to+\infty}(I_3 - \alpha A)^n = 0$.

181 *Centrale Maths2 PSI 2019* Lucas Maisonnave

Soit $A = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont notées u_1, u_2, u_3 et u_4. On pose $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$ et $G = \mathrm{Vect}(u_3, u_4)$, p la projection orthogonale sur F et q la projection orthogonale sur G.

a. Déterminer P la matrice de p dans la base canonique. Indication : on pourra utiliser $\mathrm{alg.qr}(M)[0]$ qui donne pour une matrice inversible M la base orthonormée obtenue par la procédé de Gram-Schmidt à partir des colonnes de la matrice M.

b. Déterminer Q la matrice de q dans la base canonique.

On a maintenant $E = \mathbb{R}^{2n}$ et F, G deux sous-espaces de E tels que $E = F \oplus G$ et $F \cap G^{\perp} = \{0\}$.

On note p (resp. q) la projection orthogonale sur F (resp. G).

c. Montrer que $p - q$ et $p \circ q \circ p$ sont diagonalisables.

182 *Centrale Maths2 PSI 2019* Victor Marguerite

On pourra importer certains modules : numpy, matplitlib.pyplot, np.polynomial.

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des polynômes dont les coefficients sont dans $\{0,1\}$.

On définit $W = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists P \in \mathcal{P},\ P(z) = 0\}$.

a. À l'aide de l'outil informatique, représenter graphiquement les racines des polynômes de $\mathcal{P}$ de degré inférieur ou égal à 7.

b. Montrer que W est stable par l'application $f : z \mapsto \bar{z}$.

c. Montrer que $W \setminus \{0\}$ est stable par l'application $g : z \mapsto \dfrac{1}{z}$.

Soit maintenant $z \in W \setminus \{0\}$ tel que $|z| < 1$ et $P \in \mathcal{P}$ tel que $P(z) = 0$. On pose $Q(z) = P(z) + 1 + \dfrac{z}{2(1-z)}$.

d. Expliquer pourquoi on peut fixer sans perte de généralité $P(0) = 1$.

e. Montrer que $|Q(z)| \leqslant \dfrac{|z|}{2(1-|z|)}$. En déduire que $\dfrac{|z|}{1-|z|} \geqslant \left|\dfrac{2-z}{1-z}\right|$.

Soit maintenant $z \in W\setminus$ tel que $|z| > 1$ et $P \in \mathcal{P}$ tel que $P(z) = 0$.

f. Montrer qu'on a l'inégalité $\dfrac{|z|}{|z|-1} \geqslant \left|....\right|$.

On pose $A = \left\{z \in W \mid |z| < 1 \text{ et } \dfrac{|z|}{1-|z|} = \left|\dfrac{2-z}{1-z}\right|\right\}$ et $B = \left\{z \in W \mid |z| > 1 \text{ et } \dfrac{|z|}{1-|z|} = \left|\dfrac{2-z}{1-z}\right|\right\}$.

g. Montrer que $z = x + iy \in A \iff f(x,y) = 0$ avec f à déterminer.

Tracer la courbe formée par les (x,y) tels que $z = x + iy \in A$.

h. Montrer que $z = x + iy \in B \iff g(x,y) = 0$ avec g à déterminer.

Tracer la courbe formée par les (x,y) tels que $z = x + iy \in B$.

183 *Centrale Maths2 PSI 2019* Thomas Méot

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 0$ si $x \leqslant 0$ et $f(x) = e^{-1/x}$ si $x > 0$.

On note $g(x) = f(x)f(1-x)$ et $h(x) = \dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$ avec $\alpha = \displaystyle\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t$.

a. Représenter la fonction f sur $[-2;2]$.

b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x > 0,\ f^{(n)}(x) = f(x)\dfrac{P_n(x)}{x^{2n}}$ avec P_n un polynôme.

c. Pour $n \in [\![1;5]\!]$, calculer $P_n(x)$ avec Python.

d. Quelle est la classe de f sur $\mathbb{R}$? f est-elle DSE au voisinage de 0 ?

e. Représenter g et h sur des intervalles bien choisis. Calculer α à la décimale près. Classe de g et h sur $\mathbb{R}$?

f. Déduire de ci-dessus qu'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (|x| \leqslant 1/2 \Longrightarrow \varphi(x) = 1) \ \text{ et } \ (|x| \geqslant 1 \Longrightarrow \varphi(x) = 0).$$

g. Représenter le graphe de φ.

h. Montrer qu'il existe une suite $(M_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ |\varphi^{(n)}(x)| \leqslant M_n$.

184 *Centrale Maths2 PSI 2019* Elaia Mugica

On considère l'équation différentielle $(E)\ :\ (1-x)y'' = y$.
On définit aussi la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et $\forall n \geqslant 2,\ a_n = \dfrac{n-2}{n}a_{n-1} - \dfrac{1}{n(n-1)}a_{n-2}$.

a. justifier qu'il existe une unique fonction f solution de (E) sur $]-\infty;1[$ telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.
b. Tracer le graphe de cette fonction f sur Pyzo.
c. Montrer que le rayon de convergence R de $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ vérifie $R \geqslant 1$.
d. Calculer les valeurs de a_n pour $n \in [\![2;100]\!]$.
e. Tracer le graphe de $g : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Quelle conjecture faire ? La démontrer.
f. Montrer que $\forall x \in [0;1[,\ f(x) \leqslant x$. Calculer $\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)$.

185 *Centrale Maths2 PSI 2019* Léo Simplet

a. Montrer que $\forall m \in \mathbb{N},\ e^{-1} = \sum\limits_{j=0}^{m} \dfrac{(-1)^j}{j!} + \displaystyle\int_0^1 \frac{(-1)^{m+1}(1-t)^m}{m!}e^{-t}dt$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!}$, $T_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{S_{n-k}}{k!}$ et $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n e^{-t}dt$.

b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ T_n = e^{-1}\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}\right) + \dfrac{I_n}{n!}$.
c. Écrire une fonction permettant de calculer $n!$ et I_n.
d. Calculer T_n pour $n \in [\![0;5]\!]$. Faire une conjecture.
e. Exprimer I_{n-1} en fonction de I_n pour $n \in \mathbb{N}^*$. Prouver la conjecture de la question précédente.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et U_n une variable aléatoire discrète sur $[\![0;n]\!]$. On pose $\forall k \in [\![0;n]\!],\ P(U_n = k) = \dfrac{S_{n-k}}{k!}$.

f. Montrer que ce qui précède définit bien une probabilité P.
g. Coder une fonction qui permet de calculer $P(U_3 = k)$. En déduire $E(U_3)$.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et T une variable aléatoire réelle finie, on pose $m_k(T) = E\big(T(T-1)\cdots(T-k+1)\big)$.

h. Montrer que $\forall k \geqslant n+1,\ m_k(U_n) = 0$ et que, si $k \in [\![0;n]\!]$, on a $m_k(U_n) = 1$.

186 *Centrale Maths2 PSI 2019* Tanguy Sommet

Pour $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, on pose $M = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$. On définit $\mathcal{M} = \{M(a,b,c) \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$.

a. Montrer que $M(a,b,c)$ peut s'écrire comme la combinaison linéaire de trois matrices dont la troisième est le carré de l'une des deux premières.
b. Calculer $M(7,3,15) \times M(23,8,12)$ et $M(23,8,12) \times M(7,3,15)$.
c. Quelle est la structure de $\mathcal{M}$? Est-ce que $\mathcal{M}$ est stable par la loi $\times$? $\times$ est-elle commutative dans $\mathcal{M}$?
d. Montrer que : $\exists P \in GL_3(\mathbb{R}),\ \forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ M(a,b,c) = P \begin{pmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 0 & a - \dfrac{b+c}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2}(b-c) \\ 0 & \dfrac{\sqrt{3}}{2}(b-c) & a - \dfrac{b+c}{2} \end{pmatrix} P^{-1}$.
e. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $M(a,b,c)$ soit diagonalisable.

187 *Centrale Maths2 PSI 2019* Julien Tissot

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on dit qu'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifie la propriété $\mathcal{P}_n$ si $\forall k \in [\![1;n]\!],\ P(k) = \dfrac{k}{k+1}$.

a. Calculer tous les P vérifiant $\mathcal{P}_n$ si $n = 1$ et si $n = 2$.

b. Montrer qu'il existe un unique polynôme P vérifiant $\mathcal{P}_n$ si on impose en plus $\deg(P) \leqslant n-1$.

On notera cet unique polynôme P_n dans la suite de l'exercice. On pose $Q_n = (X-1)P_n - X$ et $R_n = (n+1)!P_n$.

c. Tracer les graphes de R_n sur $[-2;8]$ pour $n \in [\![1;6]\!]$.

d. Regarder $P_n(n+1)$ pour $n \in [\![1;6]\!]$. Conjecturer puis montrer cette conjecture.

e. Prouver que R_n est à coefficients entiers.

188 *Centrale Maths2 PSI 2019* Noah Vicens

Soit $n \geqslant 1$, deux familles de réel $(a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ et $(b_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$. On pose $A = [a_0, \dots, a_n]$, $B = [b_0, \dots, b_n]$ et on définit $M(A,B) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ par $\forall (i,j) \in [\![0;n]\!],\ [M(A,B)]_{i,j} = (a_i + b_j)^n$.

a. Écrire une fonction $\mathrm{detM}(A,B)$ qui calcule le déterminant de $M(A,B)$ en prenant en argument A et B.
La tester pour $A = [1,2,3,4,5]$ et $B = [-1,3,1,4,2]$.

b. Écrire une fonction $\mathrm{detV}(A)$ qui calcule $\displaystyle\prod_{0\leqslant i<j\leqslant n} (A[J] - A[i])$.

Calculer $\mathrm{detV}(A)$ et $\mathrm{detV}(B)$ pour $A = [1,2,3,4,5]$ et $B = [-1,3,1,4,2]$.

c. Écrire une fonction $\mathrm{prodB}(n)$ qui calcule $P = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \displaystyle\prod_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$ en fonction de n.

Tester $\mathrm{prodB}(n)$ pour $n = 3,4,5,6$.

d. Calculer $\mathrm{detV}(A) \times \mathrm{detV}(B) \times \mathrm{prodB}(n)$ pour $A = [1,2,3,4,5]$ et $B = [-1,3,1,4,2]$. Conjecturer.

e. Calculer $\mathrm{detV}(A)\times\mathrm{detV}(B)\times\mathrm{prodB}(n)$ pour $A = [2\cos(0), \dots, 2\cos(n)]$ et $B = [1+\sin(1), \dots, 1+\sin(n+1)]$ pour $n = 3,4,5,6$.

f. On suppose qu'il existe $(i_1,i_2) \in [\![0;n]\!]^2$ avec $i_1 \neq i_2$ et $a_{i_1} = a_{i_2}$ ou $b_{i_1} = b_{i_2}$, la conjecture est vérifiée.

On suppose maintenant que $a_0, \dots, a_n$ sont deux à deux distincts et $b_0, \dots, b_n$ aussi.
On définit $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^{n+1}$ par $f(P) = (P(a_0), \dots, P(a_n))$.

g. Montrer que f est un isomorphisme. Écrire sa matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}^{n+1}$.

h. Pour $j \in [\![0;n]\!]$, on pose $Q_j = (X+b_j)^n$. Montrer que $(Q_0, \cdots, Q_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

189 *OdlT 2019/2020 Centrale PSI planche 155 avec Python*

On donne $u_0 \in [0;\pi]$ et on pose $u_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{u_k}{n+1}\right)$.

a. Écrire une fonction Python qui retourne les p premiers termes de la suite en fonction de u_0 ; quelle est la complexité spatiale ? temporelle ?

b. Montrer que $\forall x \in [0;\pi],\ x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x$ et $\forall m \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{n=m+1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} \leqslant \frac{1}{2m^2}$.

c. On pose $v_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$; montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n - \dfrac{\pi^3}{6(n+2)^2} \leqslant u_{n+1} \leqslant v_n$ et en déduire que l'on a aussi l'encadrement $-\dfrac{\pi^3}{6(n+2)^3} \leqslant v_{n+1} - v_n \leqslant 0$.

d. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

e. Écrire un algorithme qui permet de calculer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de u_0 à ε près fixé. Tracer le graphe de f qui, à u_0, associe la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

190 *OdlT 2019/2020 Centrale PSI planche 157 avec Python*

On note $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficient $a_{i,j} = \mathrm{Max}(i,j)$.

a. Écrire un programme qui renvoie A_n et la représenter pour $n \in \{3,4,5\}$.

b. Est-elle inversible ? Calculer A_n^{-1} avec Python pour $n \in \{3,4,5\}$.

c. A_n est-elle diagonalisable ? Donner la dimension de ses sous-espaces propres pour $n \in \{3,4,5\}$ puis conjecturer la dimension de ses sous-espaces dans le cas général et prouver cette conjecture.

On note $M_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficient $m_{i,j} = i + j$.

d. Écrire un programme qui renvoie M_n, donner son rang pour $n \in \{3,4,5\}$, puis conjecturer son rang dans le cas général et prouver cette conjecture.

e. Donner, sans calcul, une valeur propre de M_n et prouver qu'elle en admet au moins deux autres.

f. Trouver ces deux valeurs d'abord grâce aux traces de M_n et M_n^2, puis grâce à $(\mathrm{Ker}(M_n))^\perp$.

191 *OdlT 2019/2020 Centrale PSI planche 160 avec Python*

Le candidat est amené à utiliser les logiciels Pyzo et Scilab pour la recherche et la résolution du problème.

Soit $h > 0$, suffisamment petit, et la suite (t_i) définie par $\forall i \in \mathbb{N},\ t_i = ih$.

L'équation différentielle linéaire $(E)\ :\ y'' + \omega^2 y = 0$ régit le comportement d'un oscillateur harmonique. On note S_E l'ensemble des solutions de l'équation (E).

a. Montrer que S_E est en bijection avec celui des solutions de $(E') : X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} X$.

b. Justifier que les suites (y_i) et (z_i) définies par $\begin{cases} y_{i+1} = y_i + hz_i \\ z_{i+1} = z_i - h\omega^2 y_i \end{cases}$, fournissent une approximation des solutions de (E) et de (E').

c. Écrire avec Pyzo une fonction *Euler* qui affiche la solution obtenue par la méthode d'Euler de l'équation (E) ; on tracera aussi la solution exacte de l'équation (E). Que remarque-t-on après plusieurs périodes ?

d. Réécrire la fonction *Euler* pour les suites $(\overline{y}_i)$ et $(\overline{z}_i)$: $\begin{cases} \overline{y}_{i+1} = \overline{y}_i + h\overline{z}_i \\ \overline{z}_{i+1} = \overline{z}_i - h\omega^2 \overline{y}_{i+1} \end{cases}$

e. Montrer que (y_i) est solution d'une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 et en déduire l'expression de y_i. Conclure sur le caractère borné de la solution.

f. Montrer que $(\overline{y}_i)$ est solution d'une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 et en déduire l'expression de $\overline{y}_i$. Le résultat est-il en accord avec la réécriture de la fonction *Euler* ?

192 *OdlT 2019/2020 Centrale PSI planche 164 avec Python*

a. Justifier que la donnée de $z_1 = 1$ et de la relation $z_{n+1} = z_n + i\dfrac{z_n}{|z_n|}$ définissent une suite dont on calculera les premiers termes avec Python.

Soit g de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, telle que $\forall t > 0$, $g(t+1) - g(t) = \mathrm{Arctan}\,\dfrac{1}{\sqrt{t}}$, $g(1) = 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} g'(t) = 0$.

b. Écrire g' sous forme d'une série de fonctions (on pourra utiliser $g'(t+1) - g'(t)$).

c. En déduire que $g(t) = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \left(\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{p+1}}\right) - \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{p+t}}\right)\right)$.

d. Tracer simultanément le support Γ de l'arc paramétré : $\begin{cases} x(t) = \sqrt{t}\cos g(t) \\ y(t) = \sqrt{t}\sin g(t) \end{cases}$ pour $t > 0$ et le début de polygones $(A_n)_{n \in [\![1;5]\!]}$ des points d'affixe z_n.

e. Émettre une conjecture et la démontrer.

193 *OdlT 2019/2020 Centrale PSI planche 165 avec Python*

Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on note $S(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P(k)}{k!}$.

a. Montrer que $S(P)$ est définie et que S est une forme linéaire sur $\mathbb{R}[X]$.

b. Calculer $\sum_{k=0}^{50} \frac{P(k)}{k!}$ pour $P(X) = X^d$ et $0 \leqslant d \leqslant 10$; commenter.

c. On pose $H_0(X) = 1$ et $H_{n+1}(X) = (X - n)H_n(X)$.

d. Montrer que $(H_n)_{n \in [\![0;n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

e. Calculer $S(H_n)$ puis $S(P)$ pour P quelconque.

194 *Compléments OdlT 2019/2020 Centrale PSI planche 237 avec Python*

On pose $a_{j-1,j} = j - 1$ pour $j \in [\![2; n+1]\!]$, $a_{j+1,j} = n + 1 - j$ pour $j \in [\![1; n]\!]$, $a_{i,j} = 0$ pour $i \notin \{j-1, j+1\}$ et on note A_{n+1} la matrice de coefficients $a_{i,j}$.

a. Écrire un programme Python qui renvoie A_{n+1}.

b. Écrire une procédure qui renvoie le spectre de A_{n+1} pour $2 \leqslant n \leqslant 10$. Que conjecturer ?

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ de matrice A_{n+1} dans la base canonique.

c. Montrer qu'il existe un polynôme Q indépendant de n, tel que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ f(P) = P'Q + nXP$.

d. En déduire les éléments propres de A_{n+1}. Est-elle diagonalisable ?

195 *Compléments OdlT 2019/2020 Centrale PSI planche 239 avec Python*

a. Montrer que $f(x) = \int_x^{2x} \ln \frac{1+t}{1-t} dt$ est définie en 1.

b. Représenter f sur Python et conjecturer son domaine de définition. Démontrer cette conjecture.

c. Étudier la parité et le signe de f.

d. Calculer f', donner son signe et en déduire les variations de f.

e. Montrer que f' admet une limite en 1, la calculer et en déduire que f est dérivable en 1.

196 *Compléments OdlT 2019/2020 Centrale PSI planche 240 avec Python*

On pourra utiliser les modules *import numpy as np, import numpy as integr, import matplotlib pylab as plt.*

a. Montrer que $F(x) = \int_0^1 \frac{1-t}{1-xt^3} dt$ est définie sur $[-1; 1]$ et tracer sa courbe.

b. Montrer que F est continue sur $[-1; 1]$.

c. On note $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{(3k+1)(3k+2)}$. Tracer sur un même graphe, F, S_2, S_5 et S_8.

d. Quelle conjecture émettre ? La démontrer.

e. Étudier la dérivabilité de F.

197 *Compléments OdlT 2019/2020 Centrale PSI planche 241 avec Python*

On donne $P \in \mathbb{C}[X]$ dont aucune racine n'est de module 1.

a. Montrer que $M(P) = \int_0^{2\pi} \ln |P(e^{it})| dt$ existe.

b. Montrer qu'il existe $A \in \mathbb{R}$, $(m_1, \cdots, m_n) \in \mathbb{R}^n$, $(z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, tels que l'on ait la relation suivante : $\forall i \in [\![1; n]\!]$, $|z_i| \neq 1$ et $M(P) = A + \sum_{i=1}^{n} m_i M(X - z_i)$.

c. Écrire une fonction *Mahler(r,t)* qui renvoie $M(X - re^{it})$ et calculer *Mahler(2,50).*

d. Tracer $f(r) =$*Mahler(r,t)* pour différentes valeurs de t espacées de $0,01$. Que peut-on conjecturer ?

e. Tracer la fonction $g(t) =$*Mahler(r,t)* pour $r \in \{0, 2, 3, 5, 10\}$. Que peut-on conjecturer ?

f. Montrer la première conjecture émise.

198 *Compléments OdlT 2019/2020 Centrale PSI planche 242 avec Python*

On pourra effectuer les importations suivantes : *import numpy as np, import matplotlib.pyplot as plt, import numpy.random as rd.*

a. Écrire une fonction d'argument un entier naturel n et qui renvoie une liste de $n+1$ éléments choisis au hasard (équiprobabilité) parmi les entiers de $[\![1;n]\!]$. Justifier que cette liste contient au moins deux fois le même entier.

On appelle indice de répétition d'une liste L, le plus petit entier k tel qu'il existe $j < k$ tel que $L[j] = L[k]$.

b. Écrire une fonction d'argument une liste d'entiers L qui renvoie son indice de répétition.

c. Écrire une fonction d'argument deux entiers m et n qui renvoie la moyenne des indices de répétition de m listes générées selon le procédé de la première question.

d. Tracer cette fonction pour $m = 100$ et pour $10 \leqslant n \leqslant 300$, et la comparer à $\sqrt{n}$ sur ce même intervalle.

e. Quelle conjecture peut-on émettre ?

On note X_n la variable aléatoire qui renvoie l'indice de répétition d'une liste de $n+1$ entiers dont les éléments sont choisis selon la loi uniforme sur l'intervalle $[\![1;n]\!]$.

f. Montrer que $\forall j \in [\![0;n-1]\!],\ P(X_n > j) = \prod_{i=0}^{j}\left(1 - \frac{i}{n}\right)$.

g. Prouver que $\forall x \in \mathbb{R},\ 1 + x \leqslant e^x$ et en déduire que $\forall j \in [\![0;n-1]\!]$, $P(X_n > j) \leqslant e^{\frac{-j^2}{2n}}$.

h. Montrer que $E(X_n) = \sum_{j=0}^{n-1} P(X_n > j)$.

199 *Compléments OdlT 2019/2020 Centrale PSI planche 243 avec Python*

a. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}dt$ converge. Calculer une approximation et comparer à $\frac{\pi}{2}$.

b. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt$ converge et est égale à $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}dt$.

c. Exprimer $\sin^{2n+1}(t)$ comme combinaison linéaire des $\sin(kt)$ pour $k \in \mathbb{N}$.

d. Montrer que $I_m = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^{2m+1} t}{t}dt$ converge et la relier aux intégrales précédentes.

e. Calculer I_m pour m très grand, avec Python.

200 *Compléments OdlT 2019/2020 Centrale PSI planche 245 avec Python*

Pour $P \in \mathbb{K}[X]$, on pose $D(P,n) = \begin{vmatrix} P(1) & P(2) & \cdots & P(n) \\ P(2) & P(3) & \cdots & P(n+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P(n) & P(n+1) & \cdots & P(2n-1) \end{vmatrix}$.

a. Écrire une fonction Python qui renvoie $D(P,n)$ et la tester sur $P_1 = 2X - 1$, $P_2 = X^2$, $P_3 = X^3 - 2X + 1$ pour différentes valeurs de n.

b. Que peut-on conjecturer si $n \geqslant \deg(P) + 2$?

c. On pose $\phi(P) = P(X) - P(X-1)$ et $\delta(P) = P'(X)$. Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

d. Écrire une fonction Python pour afficher ϕ, δ.

e. Écrire une fonction qui affiche la matrice F_n de ϕ_n, restriction de ϕ à $\mathbb{R}_n[X]$, dans la base canonique.

f. Étudier la surjectivité, l'injectivité de ϕ_n.

g. Donner son image et son noyau, étudier sa nilpotence.

h. ϕ est-il injectif ? Surjectif ? Donner son image et son noyau.

i. Montrer que $D(P,n) = \begin{vmatrix} P(1) & \phi(P)(2) & \cdots & \phi^n(P)(n) \\ P(2) & \phi(P)(3) & \cdots & \phi^n(P)(n+1) \\ \vdots & & & \vdots \\ P(n) & \phi(P)(n+1) & \cdots & \phi^n(P)(2n-1) \end{vmatrix}$.

j. Prouver la conjecture de la question émise en début d'épreuve.

201 *Compléments OdlT 2019/2020 Centrale PSI planche 246 avec Python*

On note $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ et on pose $\forall (X, Y) \in (\mathbb{R}^3)^2,\ F(X, Y) = {}^tXAY$.

On dit que la famille $U = (U_1, U_2, U_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est A-conjuguée si et seulement si $\forall (i, j) \in [\![1; ,]\!]\ F(U_i, U_j) = \delta_{i,j}$.

a. Montrer que $\forall X \neq 0,\ {}^tXAX > 0$, puis que F est un produit scalaire.

b. Mettre en œuvre le procédé d'orthonormalisation de GRAM-SCHMIDT pour la base canonique.

c. Trouver deux familles A-conjuguées U et V.

d. Comparer $U_1{}^tU_1 + U_2{}^tU_2 + U_3{}^tU_3$ et $V_1{}^tV_1 + V_2{}^tV_2 + V_3{}^tV_3$ et A^{-1}.

e. Montrer que si A est symétrique réelle, il existe une famille $V = (V_1, V_2, V_3)$ A-conjuguée, et un réel a tels que $||V_1||^2 + ||V_2||^2 + ||V_3||^2 = a$.

202 *Compléments OdlT 2019/2020 Centrale PSI planche 247 avec Python*

a. Montrer que $H(x) = \sin(x) \int_0^x f(t) \cos(t) dt - \cos(x) \int_0^x f(t) \sin(t) dt$ où $f(x) = \dfrac{1 - e^{-x}}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et tracer sa courbe représentative sur $[0; 10]$.

b. Montrer que $\forall a \in \mathbb{R}$ il existe une unique fonction g_a solution de $(E)\ :\ y'' + y = f$ avec $g_a(0) = a$ et $g'_a(0) = 0$. Tracer g_a et $g_a - H$ pour $a \in \{1, 2, 5\}$.

c. Même question avec $g_a(0) = 0$ et $g'_a(0) = A$.

d. En observant les courbes, émettre une conjecture sur la solution générale de l'équation différentielle puis la démontrer.

e. Montrer que $F : x \mapsto \int_0^1 \dfrac{e^{-xt}}{1 + t^2} dt$ est l'unique solution de (E) telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 0$.

203 *Compléments OdlT 2019/2020 Centrale PSI planche 248 avec Python*

On dit que γ, arc paramétré de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$, est une ligne de champ de f de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, si et seulement si $\forall t \in \mathbb{R},\ \gamma'(t) = -\nabla f\big(\gamma(t)\big)$ soit, si $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont les coordonnées d'un point de γ, $x'_1(t) = -\delta_1 f\big(x_1(t), x_2(t)\big)$ et $x'_2(t) = -\delta_2 f\big(x_1(t), x_2(t)\big)$.

a. Tracer des lignes de champ de $f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3$ pour $t \in [0; 2]$ et commenter le résultat.

b. Même question pour une autre fonction.

c. Montrer que $f \circ \gamma$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

d. On suppose que γ admet une limite $a \in \mathbb{R}^2$ en $+\infty$. Montrer que a est un point fixe de f.

e. Peut-il être un maximum local ?

204 *Compléments OdlT 2019/2020 Centrale PSI planche 259 avec Python*

Soit une variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{N}$ telle que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(3, p)$ et des variables aléatoires $(X_{n,k})_{n \in \mathbb{N}, k \leqslant 3^n}$ qui suivent la loi de X. On modélise l'extinction d'une population au cours des générations en posant $Z_{n+1}(\omega) = \sum\limits_{k=1}^{Z_n(\omega)} X_{n,k}(\omega)$ avec $Z_0 = 1$.

a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ Z_n(\Omega) \subset [\![0; 3^n]\!]$.

b. Écrire une fonction Python qui renvoie la somme de m variables aléatoires suivant la loi de X.

c. Écrire *Descendant(generation,*p*)* où n =generation, renvoyant Z_n.

d. Écrire *NbrExtinction(generation,* Nb*,* p*)* qui donne le nombre d'extinction ($Z_n = 0$) à une génération fixée pour Nb essais.

e. Faire les essais *NbrExtinction(70, 40,* p*)* pour $p \in [0,3; 0,4]$ et montrer qu'il existe p_0 tel que pour $p < p_0$, l'extinction soit presque sûre.

f. On note $a_n = P(Z_n = 0)$ et G_n la fonction génératrice de Z_n. On admet que $G_{n+1}(x) = G \circ G_n(x)$.

g. Montrer que $a_{n+1} = G(a_n)$ puis que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $[0; 1]$.

PARTIE 7 : 2021

205 *Centrale Maths2 PSI 2021* Mathilde Arnaud

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et $F_n = \left(\omega^{(k-1)(\ell-1)}\right)_{1\leqslant k,\ell\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a. Écrire une fonction qui prend en entrée un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et qui renvoie la matrice F_n.

b. Faire de même pour renvoyer $F_n\overline{F_n}$. Conjecturer la valeur de F_n^{-1}.

c. Écrire une fonction qui prend en entrée un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et qui renvoie F_n^{-1}.

d. Écrire une fonction qui prend en entrée deux entiers n et k et qui renvoie F_n^k.

Utiliser cette fonction pour quelques valeurs de n et k et faire une conjecture.

e. Démontrer la conjecture de la question précédente.

f. Quelles sont les valeurs propres possibles de F_n ?

g. La matrice F_n est-elle diagonalisable ?

206 *Centrale Maths2 PSI 2021* Maxime Brachet

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \mathrm{Arctan}(n+1) - \mathrm{Arctan}(n)$.

a. Tracer avec Python la ligne polygonale formée par les points $M_k = (k, u_k)$ pour $k \in [\![0;50]\!]$.

b. Étudier la monotonie et la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c. Trouver un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$.

d. Soit $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ une suite. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} \varepsilon_n u_n$ converge. On note $S(\varepsilon)$ sa somme. Montrer que $0 \leqslant S(\varepsilon) \leqslant \frac{\pi}{2}$ et que cet encadrement est optimal.

f. Soit $\varepsilon = (0,1,0,1,0,1,\ldots)$. Donner une valeur de $S(\varepsilon)$ à 10^{-5} près.

g. Montrer que $\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, $\exists \varepsilon \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, $x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n u_n$.

h. Écrire un algorithme prenant en argument le couple (x, N) avec $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et $N \in \mathbb{N}$ et qui renvoie les N premiers termes de ε telle que $x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n u_n$.

207 *Centrale Maths2 PSI 2021* Julie Coheleach

Soit $u = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et $M_u = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$. On pose $M = \{M_u \mid u \in \mathbb{R}^3\}$.

a. Montrer que l'on peut écrire la matrice M_u comme une combinaison linéaire de trois matrices dont l'une est le carré d'une autre.

b. Écrire un programme qui renvoie M_u et qui prend en argument une liste $[a,b,c]$.

c. Montrer que M est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ stable par produit. Donner sa dimension.

d. Montrer que $\times$ est commutatif dans M.

e. Montrer que M_u est semblable à $\begin{pmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 0 & a-\dfrac{b+c}{2} & x \\ 0 & -x & a-\dfrac{b+c}{2} \end{pmatrix}$ avec un réel x à déterminer.

208 *Centrale Maths2 PSI 2021* Robin De Truchis

Soit deux réels strictement positifs a et b et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$, $u_1 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1}+a}{u_n+b}$.

a. Pour a et b fixés, afficher le comportement de la suite pour différentes valeurs de u_0, u_1.
b. Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est majorée en exploitant l'expression de u_{n+3}.
c. Montrer de même que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est minorée par un réel strictement positif.
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $\alpha_n = \operatorname{Sup}_{k\geqslant n}(u_k)$ et $\beta_n = \operatorname{Inf}_{k\geqslant n}(u_k)$.
d. Montrer que les deux suites $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ et $(\beta_n)_{n\geqslant 0}$ sont bien définies et qu'elles convergent.
On note α_∞ (resp. β_∞) la limite de la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ (resp. $(\beta_n)_{n\geqslant 0}$) et on suppose que $b > 1$.
e. Montrer que $\alpha_\infty \leqslant \dfrac{\alpha_\infty + a}{\beta_\infty + b}$ et que $\beta_\infty \geqslant \dfrac{\beta_\infty + a}{\alpha_\infty + b}$.
f. En déduire que $\alpha_\infty = \beta_\infty$ et que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge.

209 *Centrale Maths2 PSI 2021* Robin Gondeau

On pourra importer récupérer les fonctions $\cos$, ch, $\sin$ et sh avant de commencer l'exercice avec le code *import numpy as np*, *import matplotlib.pyplot as plt* avec respectivement *np.cos*, *np.cosh*, *np.sin*, *np.sinh.*

Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{ch}(2y) - \cos(2x)}{2}$.

Pour $r > 0$, on pose $g_r : \theta \mapsto f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$.
a. Tracer g_r sur $[-2\pi; 2\pi]$ pour les valeurs $r \in \{1, 2, 5, 10\}$.
b. Conjecturer la périodicité, la parité et les variations de g_r sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.
c. Quelles seraient donc les valeurs en lesquelles g_r atteint son maximum absolu ?
d. Montrer que f admet un minimum en $(0,0)$.
On pose $B_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2+y^2} \leqslant r\}$, $\Omega_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2+y^2} < r\}$ et $C_r = B_r \setminus \Omega_r$.
e. Préciser si B_r, Ω_r et C_r sont des ouverts ou des fermés.
f. Montrer qu'il existe un réel positif $M(r)$ tel que l'on ait $\forall (x,y) \in B_r, f(x,y) \leqslant M(r)$ et qui vérifie en plus la condition $\exists (x_r, y_r) \in B_r,\ f(x_r, y_r) = M(r)$: ce traduit le fait que $M(r)$ est le maximum de f dans $B(r)$.
On définit $F_r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $F_r(x,y) = f(x,y)$ si $(x,y) \in B_r$ et $F_r(x,y) = 0$ sinon.
g. Montrer que $M(r)$ est le maximum de F_r sur $[-r; r]^2$.
h. Écrire une fonction *F(r,x,y)* qui renvoie $F_r(x,y)$.
i. Tracer la fonction $r \mapsto M(r)$ sur l'intervalle $[1; 4]$ avec un pas de 0.01.
j. Afficher en même temps le graphe de la fonction $r \mapsto \operatorname{sh}^2(r)$.
k. Prouver que $\forall t \geqslant 0,\ \sin(t) \leqslant t \leqslant \operatorname{sh}(t)$.
l. Démonter les conjectures faites à la question **b.**.
Questions de cours :
- quand peut-on écrire le gradient d'une fonction de deux variables ?
- quelle est la définition d'une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$?

210 *Centrale Maths2 PSI 2021* Antoine Greil

Soit $f : t \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^k}{k(k+1)(1-t^k)}$.
a. Montrer que l'ensemble de définition de f est $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
b. Écrire une fonction f d'arguments un entier n et un réel $t \in D$ et qui renvoie $S_n(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{t^k}{k(k+1)(1-t^k)}$.
c. Tracer $f(100, t)$ pour $t \in [-2; 2]$.
d. Tracer $f(100, t) + f\left(100, \dfrac{1}{t}\right)$ sur $[-2; 2]$, établir une conjecture.
e. Montrer que f est continue sur D.
f. Trouver une expression de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{u^k}{k(k+1)}$ avec des fonctions usuelles. En déduire une expression de f.

211 *Centrale Maths2 PSI 2021* Paul Jaïs

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, une matrice $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite à diagonale propre si $\chi_A = \prod_{k=1}^{n}(X - a_{k,k})$. On note E_n l'ensemble des matrices réelles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale propre.

On note S_n et A_n les ensembles des matrices respectivement symétriques et antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a. Soit $A \in E_n$, montrer que A est trigonalisable.

b. Écrire une fonction *Polydiag*(A) qui donne les coefficients du polynôme $\prod_{k=1}^{n}(X - a_{k,k})$.

c. On donne 6 matrices à tester, sont-elles à diagonale propre ?

d. Décrire l'ensemble E_2.

e. Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec A et C carrées et à diagonales propres. Montrer que $M \in E_n$.

f. Construire $M \in E_4$ avec exactement 13 coefficients non nuls.

Soit pour les trois prochaines questions une matrice $A \in E_n \cap A_n$.

g. Calculer χ_M. Que vaut M^n ?

h. Montrer que M^2 est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En déduire que $M^2 = 0$.

i. Calculer $\mathrm{Tr}\,(M^2)$ en fonction des coefficients de M. En déduire que $M = 0$.

Soit un sous-espace F de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $F \subset E_n$.

On cherche dans les deux prochaines questions à majorer de manière optimale la dimension de F.

j. Que dire de $\dim(F + A_n)$? En déduire que $\dim(F) \leqslant \dfrac{n(n+1)}{2}$.

k. Donner un sous-espace F de E_n de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

212 *Centrale Maths2 PSI 2021* Pierre-Issa Lacourte

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on lance une pièce n fois. On note $p \in]0;1[$ la probabilité de tomber sur pile et $q = 1 - p$ celle de tomber sur face.

On appelle série un intervalle $[\![a;b]\!] \subset [\![1;n]\!]$ tel que :

- tous les lancers du numéro a au numéro b inclus donnent le même résultat.
- si $a > 1$, le lancer numéro $a - 1$ est différent du lancer numéro a.
- si $b < n$, le lancer numéro $b + 1$ est différent du lancer numéro b.

Pour $k \in [\![1;n]\!]$, on note les évènements :

- $P_k =$ "le lancer numéro k donne pile".
- $F_k =$ "le lancer numéro k donne face".

On définit la variable aléatoire N_n égale au nombre de séries obtenues au cours des n lancers.

On note enfin G_n la fonction génératrice de N_n.

Commencer le code par *import numpy as np*, *import numpy.random as rd*, *import matplotlib.pyplot as plt*

a. Écrire une fonction *lancers(n,p)* qui simule les n lancers. La fonction devra renvoyer une liste de 0 et 1.

b. Écrire une fonction *series(L)* qui prend en argument une liste L de 1 et de 0 et qui renvoie le nombre de séries dans cette liste.

c. Écrire une fonction *moyenne(n,p)* qui renvoie le nombre moyen de séries obtenu lors de 10^5 simulations.

d. Tracer *moyenne(n,p)* en fonction de n pour $n \in [\![1;10]\!]$ et $p \in \{0.1, 0.4, 0.6, 0.8\}$.

e. Donner la loi de probabilité et l'espérance de N_1, N_2 et N_3.

f. Quelles valeurs la variable N_n peut-elle prendre ? Déterminer $P(N_n = 1)$ et $P(N_n = n)$.

g. Montrer, pour $n \geqslant 2$ et $k \in [\![2;n]\!]$, que l'on a :

- $\mathbb{P}((N_n = k) \cap P_n) = p\big[\mathbb{P}(N_{n-1} = k) \cap P_{n-1}) + \mathbb{P}((N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1})\big]$.
- $\mathbb{P}((N_n = k) \cap F_n) = q\big[\mathbb{P}(N_{n-1} = k) \cap F_{n-1}) + \mathbb{P}((N_{n-1} = k-1) \cap P_{n-1})\big]$.

Dans les quatre questions suivantes, on prend $p = 1/2$.

h. Donner une expression de G_n en fonction de G_{n-1}.

i. En déduire une expression de G_n en fonction de n et la valeur de $\mathbb{E}(N_n)$.

j. Calculer la fonction génératrice d'une variable aléatoire X suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(m, r)$.

k. En déduire la loi de $N_n - 1$.

213 *Centrale Maths2 PSI 2021* Yuan Le Guennic

On note A_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficients $a_{i,j} = \mathrm{Max}(i,j)$.
a. Écrire une fonction qui renvoie A_n et la représenter pour $n \in \{3,4,5\}$.
b. Montrer que A_n est inversible. Calculer A_n^{-1} avec Python pour $n \in \{3,4,5\}$.
c. Montrer que A_n est diagonalisable.
d. Donner la dimension des sous-espaces propres de A_n pour $n \in \{3,4,5\}$ puis conjecturer la dimension de ses sous-espaces dans le cas général.
e. Prouver la conjecture émise à la question précédente.
On note M_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficients $m_{i,j} = i + j$.
f. Écrire une fonction qui renvoie M_n et la représenter pour $n \in \{3,4,5\}$.
g. Donner le rang de M_n pour $n \in \{3,4,5\}$, puis conjecturer son rang dans le cas général.
h. Prouver cette conjecture émise à la question précédente.
i. Donner, sans calcul, une valeur propre de M_n et prouver qu'elle en admet au plus deux autres.
j. Calculer des valeurs approchées de ces deux valeurs propres pour $n \in \{3,4,5\}$.
k. Déterminer exactement ces deux valeurs grâce aux traces de M_n et M_n^2.
ℓ. Déterminer exactement ces deux valeurs propres en considérant $(\mathrm{Ker}(M_n))^\perp$.

214 *Centrale Maths2 PSI 2021* Clément Lérou

Soit $f : t \mapsto \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{t^k}{k(k+1)(1-t^k)}$.
a. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.
b. Écrire une fonction *f(n,t)* qui renvoie la somme partielle $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{t^k}{k(k+1)(1-t^k)}$.
c. Représenter graphiquement sur $[-2;2]$ la fonction $t \mapsto f(100,t)$. Conjecturer.
d. Représenter graphiquement sur $[-2;2]$ la fonction $t \mapsto f(100,t) + f\left(100, \dfrac{1}{t}\right)$. Conjecturer.
e. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.
f. Exprimer, pour $t \in]-1;1[$, la quantité $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{t^k}{k(k+1)}$ à l'aide de fonctions usuelles.
g. ???

215 *Centrale Maths2 PSI 2021* Clément Lopez et Guillaume Touly

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ et $E = \mathrm{Vect}(A, B, C)$.
a. Montrer que E est un espace vectoriel. Déterminer sa dimension.
b. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, montrer qu'il existe une unique matrice $M = \begin{pmatrix} a & * & * \\ b & * & * \\ c & * & * \end{pmatrix}$ dans E.
Écrire une fonction *M(a,b,c)* qui renvoie cette matrice. Afficher $M(1,1,1)$.
c. Donner une norme sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Écrire une fonction *Norme(M)* qui calcule cette norme.
d. En déduire une fonction *Test(M)* qui renvoie *True* si et seulement si $M \in E$.
e. Donner les éléments propres de quelques matrices $M(a,b,c)$. Montrer qu'il existe un vecteur $V \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qui soit vecteur propre commun à toutes les matrices M de E.
f. Donner la forme de χ_M si $M \in E$ et $\mathrm{Tr}\,(M) = 0$.
g. Pour $M = M(a,b,c) \in E$ prise au hasard, constater quelles sont les puissances de M qui sont dans E. Émettre une conjecture.
h. Montrer la conjecture émise à la question précédente. Indication : commencer par le cas $\mathrm{Tr}\,(M) = 0$.
i. Peut-on trouver $M \in E$ non nulle telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on ait $M^k \in E$.

216 *Centrale Maths2 PSI 2021* Alexandre Marque

Soit $n \geqslant 2$, $a = (a_0, \cdots, a_{n-1})$ et $\lambda = (\lambda_0, \cdots, \lambda_{n-1})$ deux n-uplets de complexes.
On cherche à résoudre le problème $\mathsf{FL}(n)$ = " peut-on construire une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que la diagonale de A contienne les termes $a_0, \cdots, a_{n-1}$ et dont les valeurs propres soient $\lambda_0, \cdots, \lambda_{n-1}$ (répétées avec leur ordre de multiplicité)".

a. Montrer que $\mathsf{FL}(2)$ admet une solution si et seulement si $a_0 + a_1 = \lambda_0 + \lambda_1$.

b. Soit un scalaire $\alpha \in \mathbb{C}$, écrire une fonction renvoyant $M(a, \mu, \alpha) = \begin{pmatrix} a_0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-2} & 1 \\ \lambda_0 & \cdots & \cdots & \lambda_{n-2} & \alpha \end{pmatrix}$ où $a = (a_0, \cdots, a_{n-2})$ et $\mu = (\mu_0, \cdots, \mu_{n-2})$. On pose $P_0 = 1$ et, pour $i \in [\![1; n]\!]$, on pose $P_i = \prod_{k=0}^{i-1} (X - a_k)$.

c. Montrer que $(P_0, \cdots, P_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$ puis que $\prod_{i=0}^{n-1} (X - a_i) = P_n - \sum_{k=0}^{n-2} a_k P_k$?????.

d. Écrire une fonction *Polynome(a)* qui renvoie la famille $(P_0, \cdots, P_n)$ où $a = (a_0, \cdots, a_{n-1})$.

217 *Centrale Maths2 PSI 2021* Esteban Poupinet

Soit la fonction $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \cos(\sqrt{x})$. On définit aussi la suite de fonctions $(f_n)_{n \geqslant 0}$ par $f_0(x) = g(x)$, $f_1(x) = g'(x)$ et $\forall n \geqslant 1$, $f_{n+1}(x) = -\dfrac{1}{4x}\big((4n-2) f_n(x) + f_{n-1}(x)\big)$.

a. Créer une liste L qui contient les valeurs de $n!$ pour $n \in [\![0; 20]\!]$.

b. Tracer les fonctions $x \mapsto \dfrac{(2n)! f_n(x)}{n!}$ pour $n \in [\![0; 7]\!]$ sur l'intervalle $[0, 1; 50]$.

c. Montrer que g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$ à l'aide d'une série entière et exprimer de même $g^{(n)}(x)$ sous forme de série entière pour $x \in \mathbb{R}_+$.

d. Tracer les fonctions $x \mapsto \dfrac{(2n)! g^{(n)}(x)}{n!}$ pour $n \in [\![0; 7]\!]$ sur l'intervalle $[0, 1; 50]$.

e. Quelle conjecture peut-on faire sur $\underset{x \in \mathbb{R}_+}{\mathrm{Sup}} \left(|g^{(n)}(x)|\right)$?

f. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $g^{(n)}(x) = f_n(x)$.

218 *Centrale Maths2 PSI 2021* Arthur Riché et Adèle Robert

On note G un graphe non orienté, S l'ensemble de ses sommets (numérotés de 1 à n). Chaque sommet peut être relié aux autres, la probabilité d'une liaison est $p \in]0; 1[$.
On note S_n le nombre de sommets isolés.
On définit la variable aléatoire X_i (pour $i \in [\![1; n]\!]$) qui vaut 1 si le sommet numéro i est isolé et 0 sinon.

a. Écrire une fonction *def M(n,p)* permettant d'illustrer cette situation à l'aide d'une matrice.

b. Écrire une fonction *def NbIsoles(n,p)* qui renvoie le nombre de sommets isolés.

c. Écrire une fonction *Approx(n,p)* qui approche $\mathbb{E}(S_n)$ en effectuant 1000 expériences.

d. Tracer $n \mapsto \ln\left(\dfrac{\mathbb{E}(S_n)}{n}\right)$ pour $p \in \{0.3, 0.5, 0.7\}$ et $n \in [\![1; 10]\!]$.

e. Déterminer $\mathbb{E}(X_i)$ pour $i \in [\![1; n]\!]$ et en déduire la valeur de $\mathbb{E}(S_n)$.

f. Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que $\mathbb{P}(Z = 0) \leqslant \dfrac{\mathbb{V}(Z)}{\mathbb{E}(Z)^2}$ et que $P(Z \geqslant 1) \leqslant \mathbb{E}(Z)$.

g. Calculer $\mathbb{E}(S_n^2)$ et en déduire des majorations de $\mathbb{P}(S_n \geqslant 1)$ et $\mathbb{P}(S_n = 0)$.

On suppose dorénavant que $p = c\dfrac{\ln(n)}{n}$ avec $c > 0$.

h. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(S_n = 0)$ selon la valeur de c.

219 *Centrale Maths2 PSI 2021* Raffi Sarkissian

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}$.
Pour $f \in E$, on définit $\Phi(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $\Phi(f)(x) = \int_0^{+\infty} \operatorname{Arctan}(tx)\dfrac{f(t)}{1+t^2}\,dt$.

a. Montrer que Φ est un endomorphisme de E.
b. Soit $(f_n)_{n\geqslant 0 \in E^{\mathbb{N}}}$ une suite de fonctions qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f.

Montrer que $\Phi(f)$ appartient à E.
c. Si $f \in E$, montrer que $\Phi(f)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
Soit f_0 la fonction constante égale à 1 et $g = \Phi(f_0)$.

d. Tracer g sur $[0;5]$ avec python. Quelle est la limite de g en $+\infty$?

e. Pour $x > 0$, calculer $g(x) + g\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

f. En déduire la valeur de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n+1)^2}$.

220 *Centrale Maths2 PSI 2021* Antonio Treilhou

Soit $(X_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une famille de n^2 variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$. On pose $A = \begin{pmatrix} X_{1,1} & \cdots & X_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n,1} & \cdots & X_{n,n} \end{pmatrix}$. On dit qu'une matrice carrée symétrique est définie positive si elle est bien symétrique et si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

a. Écrire une fonction qui renvoie une matrice A aléatoire avec ces conditions.
b. Écrire une fonction qui teste si une matrice carrée A est symétrique définie positive.
c. Décrire une méthode pour avoir une première idée de la proportion des matrices symétriques définies positives parmi toutes les matrices A construites comme dans l'énoncé.
d. Programmer la méthode évoquée à la question précédente.
e. Pourquoi la méthode de la question **c.** donne une approximation de la proportion cherchée ?
f. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\{0,1\})$ symétrique définie positive, montrer que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXMX \geqslant 0$ et que l'on a la condition d'égalité ${}^tXMX = 0 \Longrightarrow X = 0$.
g. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\{0,1\})$ symétrique définie positive, montrer que $M = I_n$.

221 *Centrale Maths2 PSI 2021* Sylvain Vigouroux

Soit $n \geqslant 2$ boules, dont $p \in [\![0;n]\!]$ sont blanches et $n-p$ sont rouges. Elles sont toutes placées aléatoirement dans des cases (ne contenant qu'une seule boule) numérotées de 1 à n. On considère qu'il y a un changement de couleur au rang $i \in [\![1;n-1]\!]$ si la boule de la case $i+1$ n'a pas la même couleur que celle de la case i.

On note N le nombre total de changements de couleur à l'issue de l'expérience.

a. À l'aide de la fonction *permutation* du module *numpy* qui prend en argument une liste et la renvoie aléatoirement dans le désordre, coder une fonction qui affiche N en fonction des paramètres n et p.
Soit X_i la variable aléatoire qui prend la valeur 1 en cas de changement de couleur au rang i et 0 sinon.
b. Déterminer la loi de X_i.
c. Calculer l'espérance de N en fonction de n et p.
d. Pour $n = 24$, tracer deux courbes du résultat de $\mathbb{E}(N)$ en fonction de p à l'aide de la fonction de la question **a.** et de la formule de la question **c.**.
e. La variable aléatoire N suit-elle la loi binomiale ?

PARTIE 8 : 2022

222 <u>*Centrale Maths2 PSI 2022*</u> Louis Bardinet

Soit $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ de classe C^2 et, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 \big(f(x)\big)^n dx$. On pose $a_1 = -f'(0)$ et $a_2 = -f''(0)$.

Dans les 7 prochaines questions, on prend $a \in \mathbb{R}^*$ et $f : x \mapsto 1 - a\sin(x)$.

a. Écrire une fonction qui prend en argument n et qui revoie I_n.

b. Tracer, pour $n \in [\![1;1000]\!]$, l'ensemble des points $(\ln(I_n), \ln(n))$.

c. En conjecturant que $I_n \underset{+\infty}{\sim} Kn^{\alpha}$, trouver une valeur approchée de α.

d. Montrer que $\exists \varepsilon > 0,\ \forall x \in [0;\varepsilon],\ 0 \leqslant f(x) \leqslant e^{-\frac{a_1 x}{2}}$.

e. Montrer que $\displaystyle\int_\varepsilon^1 \big(f(x)\big)^n dx \underset{+\infty}{=} O\Big(\frac{1}{n}\Big)$.

f. Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $g_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $g_n(x) = f\Big(\dfrac{x}{n}\Big)^n$ si $0 \leqslant x \leqslant n\varepsilon$ et $g_n(x) = 0$ sinon. Montrer que la suite $(g_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction $g : x \mapsto e^{-a_1 x}$.

g. Montrer que $I_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{a_1 n}$.

Dans les 6 prochaines questions, on prend $b \in \mathbb{R}^*$ et $f : x \mapsto 1 - bx^2$.

h. Écrire une fonction qui prend en argument n et qui revoie I_n.

i. Tracer, pour $n \in [\![1;1000]\!]$, l'ensemble des points $(\ln(I_n), \ln(n))$.

j. Montrer que $\exists \varepsilon > 0,\ \forall x \in [0;\varepsilon],\ 0 \leqslant f(x) \leqslant e^{-\frac{a_2 x^2}{4}}$.

k. Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $h_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $h_n(x) = f\Big(\dfrac{x}{\sqrt{n}}\Big)^n$ si $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{n}\,\varepsilon$ et $h_n(x) = 0$ sinon.

Montrer que la suite $(h_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction $h : x \mapsto e^{-\frac{a_2 x^2}{2}}$.

l. Montrer que $I_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n a_2}}$. Comment en déduire la valeur de l'intégrale de Gauss ?

223 <u>*Centrale Maths2 PSI 2022*</u> Naïs Baubry

a. Soit $x \in]-1;+\infty[$, montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n+x}$ converge. On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+x}$.

b. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{100} \frac{(-1)^{n-1}}{n+x}$ est une approximation à $0,01$ près de $f(x)$.

c. Écrire une fonction *approximation(x)* qui renvoie $\displaystyle\sum_{n=1}^{100} \frac{(-1)^{n-1}}{n+x}$.

d. Donner les valeurs de *approximation(0)* et *approximation(2017)*. Tracer le graphe de f sur $[-0,99;10]$ avec un pas de $0,01$. Faire des conjectures.

e. Trouver $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to-1^+} f(x)$.

f. Établir que f est de classe C^1 sur $]-1;+\infty[$.

On admet que f est de classe C^∞ sur $]-1;+\infty[$ et que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall x > -1,\ f^{(k)}(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^{n-1}}{n+x}\right)^{(k)}$.

g. Écrire une fonction *Python* appelée *derivee(k,x)* qui calcule la dérivée k-ième de f en x.

h. Pour $x \in \Big]-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\Big[$, calculer $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \left| f(x) - \sum_{k=1}^{N} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right|$. Qu'en déduire ?

224 *Centrale Maths2 PSI 2022* Lola Belle Wangue et Jimmy Guertin

Deux joueurs font une partie de fléchettes. Le joueur 1 (resp. 2) a une probabilité $p_1 \in]0;1[$ (resp. $p_2 \in]0;1[$) de toucher la cible et il gagne alors la partie.

C'est le joueur 1 qui commence et ensuite ils lancent chacun leur tour (on remarquera que le joueur 1 a les lancers d'indices impairs et le joueur 2 ceux d'indices pairs). Les lancers sont supposés mutuellement indépendants. On note :

- $A_n =$ " le joueur 1 touche la cible au $2n+1$-ième lancer" (et alors il a gagné).
- $B_n =$ " le joueur 2 touche la cible au $2n+2$-ième lancer" (et alors il a gagné).
- $E_n =$ " le joueur 1 gagne la match au $2n+1$-ième lancer".
- $F_n =$ " le joueur 2 gagne la match au $2n+2$-ième lancer".
- $H_n =$ " le jeu ne s'arrête pas au $2n+2$-ième lancer".
- $G_1 =$ " le joueur 1 gagne le match" .
- $G_2 =$ " le joueur 2 gagne le match" .

a. Écrire une fonction *jeu* qui renvoie la durée moyenne d'un match (nombres de lancers avant la victoire d'un des deux joueurs) en effectuant 5000 matchs. Donner la fréquence de gain du joueur 1, du joueur 2, tracer l'histogramme des durées des matchs (avec *plt.hist(liste)*).

b. Exprimer H_n en fonction des $a_0, \cdots, A_n, B_0, \cdots, B_n$.

c. Le jeu s'arrête-t-il presque sûrement ?

d. Calculer $\mathbb{P}(E_n)$ et $\mathbb{P}(F_n)$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

e. Calculer $\mathbb{P}(G_1)$ et $\mathbb{P}(G_2)$.

On pose X la variable aléatoire qui compte le nombre de lancers avant la victoire d'un des deux joueurs.

f. Calculer $\mathbb{P}(X = 2n+1)$ et $\mathbb{P}(X = 2n+2)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

g. Montrer que X admet une espérance et la calculer.

h. Ce dernier résultat est-il en accord avec la simulation numérique de la question **a.** ?

225 *Centrale Maths2 PSI 2022* Noé Chassagne

On s'intéresse aux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{a}{b + cu_n^2}$ avec a, b, c strictement positifs. On commence par étudier le cas $b = c = 1$ et on définit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{a}{1+x^2}$.

a. Afficher les 20 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour différentes valeurs de u_0 et pour $a \in \{1, 2, 4\}$. Conjecturer la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et le rôle de la valeur u_0.

b. Montrer que la fonction f admet un unique point fixe qu'on notera x_a.

c. Montrer que, quel que soit la valeur de u_0, il existe un rang n_0 tel que $u_{n_0} \in [0; x_a]$.

d. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) - x = \dfrac{a - x - x^2}{1+x^2}$ et $f(f(x)) - x = \dfrac{(x^3 + x - a)(ax - 1 - x^2)}{(1+x^2)^2 + a^2}$.

e. Faire le tableau de signe de la quantité $f(f(x)) - x$. Indication : on distinguera selon que $a \leqslant 2$ ou $a > 2$.

f. Montrer la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour tout $a > 0$ et tout $u_0 \in \mathbb{R}$ si $b = c = 1$.

226 *Centrale Maths2 PSI 2022* Olivier Courmont

On note d_n le nombre de diviseurs positifs de n, $D_n = \sum\limits_{k=1}^{n} d_k$ et $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

a. Écrire deux fonctions d'argument n donnant D_n et H_n.

b. En comptant les points à coordonnées entières sous la courbe $\mathcal{H} \ : \ xy = n$ (c'est une hyperbole) et dans $(\mathbb{R}_+^*)^2$, montrer que l'on a $D_n \underset{+\infty}{=} nH_n + O(n)$.

c. En déduire un équivalent de D_n et vérifier cet équivalent avec *Python.*

d. Pour $x \in]-1;1[$, calculer $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} H_n x^n$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} nH_n x^n$.

e. Justifier la convergence simple de $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ sur $]-1;1[$ si $f_n : x \mapsto \frac{x^n}{1-x^n}$.

f. Montrer que $f : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$ est continue sur $]-1;1[$.

g. Trouver la suite $(b_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{x^k}{1-x^k} \underset{0}{=} \sum\limits_{k=1}^{n} b_k x^k + o(x^n)$. On peut vérifier ce développement limité en traçant les deux sommes partielles au voisinage de 0.

h. Trouver un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 1^- en admettant l'égalité (E) : ???.

i. Montrer l'égalité (E).

227 *Centrale Maths2 PSI 2022* Amandine Darrigade

Soit l'équation différentielle $(E) \ : \ t^2(1-t)x''(t) + 2t(2-t)x'(t) + (1+t)x(t) = 0$.

Importer *numpy, scipy.integrale, matplotlib.pyplot.*

a. Donner des intervalles I (on prendra les plus larges possibles) sur lesquels, si $t_0 \in I$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on est sûr d'avoir au moins une solution x de (E) sur I telle que $x(t_0) = \alpha$ et $x'(t_0) = \beta$. Que dire de x ?

b. Proposer avec *Python* une représentation graphique de la solution x de (E) associée à $t_0 = \frac{1}{2}$, $\alpha =$?? et $\beta =$??. On rappelle la commande *np.arange(a,b,h).*

c. Que peut-on dire de la fonction $x : t \mapsto \frac{1}{t^2}$ par rapport à (E) ?

En quoi est-il pertinent de poser $x : t \mapsto \frac{y(t)}{t^2}$ pour résoudre (E).

d. Résoudre (E) sur chaque intervalle donné à la question **a.**.

Indication : on pourra décomposer X^2 dans la base $\big(1, X-1, (X-1)^2\big)$.

e. Existe-t-il une solution de (E) définie sur $\mathbb{R}_+^*$?

228 *Centrale Maths2 PSI 2022* Anna Decrock

Pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)^3}$.

a. Montrer que f est définie, périodique et continue sur $\mathbb{R}$.

b. Majorer le reste d'ordre n donné par $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{\sin((2k+1)x)}{(2k+1)^3}$ et en déduire une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x) - g(x)| \leqslant 10^{-3}$. Représenter graphiquement f.

Une fonction u est dite solution (P) si

- la fonction u à valeurs réelles est définie et continue sur $[0;\pi] \times [0;+\infty[$.
- la fonction u est de classe C^2 sur $[0;\pi]\times]0;+\infty[$.
- $\forall (x,t) \in [0;\pi]\times]0;+\infty[,\ \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.
- $\forall x \in [0;\pi],\ u(x,0) = f(x)$.
- $\forall t \in [0;+\infty[,\ u(\pi,t) = u(0,t) = 0$.

c. Montrer que $u : (x,t) \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)^3} e^{-(2n+1)^2 t}$ est solution de (P). Représenter cette fonction de x à t fixé pour certaines valeurs de t.

229 *Centrale Maths2 PSI 2022* Marius Desvalois et Manon Odelot

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on lance une pièce n fois. On note $p \in]0;1[$ la probabilité de tomber sur pile et $q = 1 - p$ celle de tomber sur face.

On appelle série un intervalle $[\![a;b]\!] \subset [\![1;n]\!]$ tel que :

- tous les lancers du numéro a au numéro b inclus donnent le même résultat.
- si $a > 1$, le lancer numéro $a - 1$ est différent du lancer numéro a.
- si $b < n$, le lancer numéro $b + 1$ est différent du lancer numéro b.

Pour $k \in [\![1;n]\!]$, on note les évènements :

- $P_k =$ "le lancer numéro k donne pile".
- $F_k =$ "le lancer numéro k donne face".

On définit la variable aléatoire N_n égale au nombre de séries obtenues au cours des n lancers.

On note enfin G_n la fonction génératrice de N_n.

Commencer le code par *import numpy as np*, *import numpy.random as rd*, *import matplotlib.pyplot as plt*

a. Écrire une fonction *lancers(n,p)* qui simule les n lancers. La fonction devra renvoyer une liste de 0 et 1.

b. Écrire une fonction *series(L)* qui prend en argument une liste L de 1 et de 0 et qui renvoie le nombre de séries dans cette liste.

c. Écrire une fonction *moyenne(n,p)* qui renvoie le nombre moyen de séries obtenu lors de 10^5 simulations.

d. Tracer *moyenne(n,p)* en fonction de n pour $n \in [\![1;10]\!]$ et $p \in \{0.1, 0.5, 0.7, 0.9\}$.

e. Donner la loi de probabilité et l'espérance de N_1, N_2 et N_3.

f. Quelles valeurs la variable N_n peut-elle prendre ? Déterminer $P(N_n = 1)$ et $P(N_n = n)$.

g. Montrer, pour $n \geqslant 2$ et $k \in [\![2;n]\!]$, que l'on a :

- $\mathbb{P}((N_n = k) \cap P_n) = p\big[\mathbb{P}(N_{n-1} = k) \cap P_{n-1}) + \mathbb{P}((N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1})\big]$.
- $\mathbb{P}((N_n = k) \cap F_n) = q\big[\mathbb{P}(N_{n-1} = k) \cap F_{n-1}) + \mathbb{P}((N_{n-1} = k-1) \cap P_{n-1})\big]$.

Dans les quatre questions suivantes, on prend $p = 1/2$.

h. Donner une expression de G_n en fonction de G_{n-1}.

i. En déduire une expression de G_n en fonction de n et la valeur de $\mathbb{E}(N_n)$.

j. Calculer la fonction génératrice d'une variable aléatoire X suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(m,r)$.

k. En déduire la loi de $N_n - 1$.

230 *Centrale Maths2 PSI 2022* Achille Domens et Jade Mirassou

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $H_n = (h_{k,j}^{(n)})_{1 \leqslant k,j \leqslant n} in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall (k,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ h_{k,j}^{(n)} = \dfrac{1}{h+j-1}$.

a. Coder une fonction prenant en argument n et renvoyant H_n.

b. Montrer que $\forall X = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXH_nX = \displaystyle\int_0^1 (x_0 + x_1 t + \cdots + x_{n-1}t^{n-1})^n dt$.

c. Montrer qu'il existe une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients diagonaux strictement positifs et une matrice orthogonale $P \in O(n)$ telles que $H_n = PD{}^tP$.

On définit β_n la plus grande des valeurs propres de H_n.

d. Tracer la courbe correspondant aux 20 premières valeurs $\beta_1, \cdots, \beta_{20}$.

231 *Centrale Maths2 PSI 2022* Léo Ducos-Tourenne

Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{t^2} dt$.

a. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est bijective (on précisera sur quel intervalle).

b. Montrer que pour tout réel x, il existe un unique réel $y(x)$ tel que $\displaystyle\int_x^{y(x)} e^{t^2} dt = 1$.

c. Écrire une fonction prenant en argument x et y et renvoyant $\displaystyle\int_x^y e^{t^2} dt$.

d. Écrire une fonction prenant en argument x et renvoyant $y(x)$ à 10^{-2} près.

e. Tracer la courbe de la fonction y sur l'intervalle $[-10; 10]$.

f. Montrer que y est monotone et dérivable sur $\mathbb{R}$.

232 *Centrale Maths2 PSI 2022* Tony Géreaud

Pour un entier $n \geqslant 2$, on note $A_0, \cdots, A_{n-1}$ les points du plan complexe dont les affixes sont respectivement les n racines de l'unité $1, e^{\frac{2i\pi}{n}}, \cdots, e^{\frac{2i(n-1)\pi}{n}}$.
On note X les ensembles des segments reliant deux points de $\{A_0, \cdots, A_{n-1}\}$ tels que ces segments sont deux à deux disjoints. Par exemple, pour $n = 3$, les ensembles X possibles sont $X = \emptyset$, $X = \{[A_0, A_1]\}$, $X = \{[A_1, A_2]\}$ ou $X = \{[A_0, A_2]\}$.
On note $\mathcal{E}_n$ l'ensemble de tous les X et $M_n = \text{card}(\mathcal{E}_n)$. Par convention, on prendra $M_0 = M_1 = 1$.

a. Déterminer M_4 et M_5 (il est conseillé de faire un dessin).

b. Montrer la formule de récurrence suivante : $\forall n \in \mathbb{N},\ M_{n+1} = M_n + \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} M_i M_{n-i-1}$.

c. Écrire un programme *Python* renvoyant $M_0, \cdots, M_n$. Vérifier, pour $n \leqslant 20$, la majoration $M_n \leqslant 3^n$.
On admet cette majoration que l'on démontrera à la fin.

d. Vérifier que $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} M_n z^n$ converge pour $|z| < \frac{1}{3}$. On note $M(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} M_n z^n$ si $|z| < \frac{1}{3}$.

e. Montrer que $\forall z \in \mathbb{C},\ |z| < \dfrac{1}{3} \Longrightarrow M(z) = 1 + zM(z) + z^2 M(z)^2$.

233 *Centrale Maths2 PSI 2022* Colin Herviou-Laborde

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 64 & 0 & -28 & 17 \\ 12 & -15 & 0 & 38 \\ -4 & 1 & 64 & 17 \\ -3 & 5 & 0 & 32 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ et la suite de matrices $(A_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ définie par $A_1 = A$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ A_{k+1} = A(A_k + a_k I_4)$ où $a_k = -\dfrac{\mathrm{Tr}\ (A_k)}{k}$.

a. Calculer a_1, a_2, a_3 et a_4.

b. Montrer que $P = X^4 + \sum\limits_{k=1}^{4} a_k X^{4-k} = \chi_A$.

c. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les valeurs propres complexes sont (éventuellement répétées avec leur ordre de multiplicité) $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. On définit $\chi_A = \prod\limits_{j=1}^{n}(X - \lambda_j) = X^n + \sum\limits_{k=1}^{n} b_k X^{n-k}$ et $S_k = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j^k$ pour $j \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que $\forall j \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{Tr}\ (A^j) = S_j$.

d. On donne la relation suivante : $\exists r > 0,\ \forall x \in]-r;r[\setminus\{0\},\ x^{n-1}\chi_A'(1/x) = x^n \chi_A(1/x)\Big(\sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{1}{1-\lambda_j x}\Big)$.

Montrer que pour $p \in [\![1;n]\!]$, on a $S_p + b_1 S_{p-1} + \cdots + p b_p = 0$.

e. En déduire un algorithme permettant de calculer les coefficients de χ_A.

f. Justifier la relation admise à la question **d.**.

234 *Centrale Maths2 PSI 2022* Fares Kerautret et Camille Pucheu

On note $\mathcal{B}$ l'ensemble des fonctions bornées de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $q : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue, on dit qu'une fonction $y : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+$ vérifie le problème $\mathcal{P}(q, a, b)$ si $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ y''(t) + (1 + q(t))y(t) = 0$, $y(0) = a$ et $y'(0) = b$.

a. Si $0 < u < v$, écrire une fonction *trace(a,b,u,v,q)* qui affiche le graphe d'une solution de $\mathcal{P}(q, a, b)$.

b. Tester cette fonction avec $q : t \mapsto -\dfrac{t^2}{1+t^2}$, $q : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t}}$ et $q : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ avec différentes valeurs de (a, b) et conjecturer l'appartenance de la solution tracée à $\mathcal{B}$ dans chacun des cas.

c. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue et $z : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \sin(x - t) f(t) dt$. Calculer $z'' + z$.

Soit $q : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue et y une solution de $\mathcal{P}(q, a, b)$ sur $\mathbb{R}_+$.

d. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leqslant |y(x)| \leqslant |a| + |b| + \displaystyle\int_0^x |q(t)|\,|y(t)| dt$.

e. Qu'en déduire sur la fonction y si on suppose q intégrable sur $\mathbb{R}_+$?

235 *Centrale Maths2 PSI 2022* Lucas Lacampagne

a. Écrire une fonction qui renvoie, pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la matrice $\sum\limits_{k=0}^{100} \frac{A^k}{k!}$.

b. Écrire une fonction qui renvoie, pour une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$:

- ??? si $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda\}$
- $\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}[e^{\lambda_1}(A - \lambda_2 I_2) - e^{\lambda_2}(A - \lambda_1 I_2)]$ si $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

c. Tester ces deux précédentes fonctions sur quelques matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Que conjecturer ?

Soit pour la suite $r \in \mathbb{N}^*$, $p \in [\![1; r]\!]$, $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ des complexes distincts, $(m_1, \cdots, m_p) \in (\mathbb{N}^*)^p$ et $\sum\limits_{k=1}^{p} m_k = r$.

d. Montrer que $g : P \mapsto g(P) = (P(\lambda_1), \cdots, P^{(m_1-1)}(\lambda_1), P(\lambda_2), \cdots, P^{(m_2-1)}(\lambda_2), \cdots, P(\lambda_p), \cdots, P^{(m_p-1)}(\lambda_p))$ définit un isomorphisme de $\mathbb{C}_{r-1}[X]$ dans $\mathbb{C}^r$.

e. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer qu'il existe r matrices $S_{k,i}$ telles que $A = \sum\limits_{k=1}^{p} \left(\sum\limits_{i=0}^{m_k-1} P^{(i)}(\lambda_k) S_{k,i} \right)$.

236 *Centrale Maths2 PSI 2022* Louis Lacarrieu

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $F_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $F_n(x) = \int_0^x \frac{e^t}{1+t^n}$.

a. Créer une fonction *F(n,x)* qui calculer $F_n(x)$ et tracer les courbes de F_n pour $n \in [\![1; 4]\!]$ sur $[0; 3]$.

b. Montrer que F_n est une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. On note $G_n = F_n^{-1}$.

c. Créer une fonction *G(n,x)* qui calculer $G_n(x)$ et tracer les courbes de G_n pour $n \in [\![1; 4]\!]$ en les comparant à la courbe de la fonction $x \mapsto \ln(1 - x)$.

d. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x)$.

237 *Centrale Maths2 PSI 2022* Paul Lafon

Soit $n \geqslant 2$, $J = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et, pour $k \in [\![0; n]\!]$, le système $S_{n,k}$: $\left\{ \begin{array}{ccc} 2x_0 & = & x_{n-k} + 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 2x_{k-1} & = & x_{n-1} + 2 \\ 2x_k & = & x_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 2x_{n-1} & = & x_{n-k-1} \end{array} \right.$

Soit $A_{n,k}$ la matrice associée au système $S_{n,k}$.

a. Donner sans justification la forme de J^k pour $k \in [\![0; n]\!]$.

b. Déterminer le spectre de J. En déduire le spectre de J^k.

c. Exprimer $A_{n,k}$ en fonction de I_n et J^k.

d. En déduire que $S_{n,k}$ admet une unique solution qu'on notera $x^{(n,k)} = (x_0^{(n,k)}, \cdots, x_{n-1}^{(n,k)})$.

e. Résoudre avec *Python* le système $S_{n,k}$ pour $n = 6$, $k = 1$ et $k = 4$.

f. Montrer que $x^{(n,k)}$ vérifie $\forall i \in [\![0; n-1]\!]$, $x_i^{(n,k)} = \sum\limits_{j=0}^{+\infty} 2^{-\left\lfloor \frac{nj+i}{k} \right\rfloor}$.

238 *Centrale Maths2 PSI 2022* Thomas Lanne

On pourra utiliser les modules *import numpy as np, import numpy as integr, import matplotlib pylab as plt.*

a. Montrer que $F(x) = \int_0^1 \frac{1-t}{1-xt^3}\,dt$ est définie sur $[-1;1]$ et tracer sa courbe.

b. Montrer que F est continue sur $[-1;1]$.

c. On note $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{(3k+1)(3k+2)}$. Tracer sur un même graphe, F, S_2, S_5 et S_8.

d. Quelle conjecture émettre ? La démontrer.

e. Étudier la dérivabilité de F.

239 *Centrale Maths2 PSI 2022* Peio Lanot

On considère un groupe de $m \geqslant 2$ personnes. À l'instant initial, a personnes votent pour A et $m-a$ pour B. On note X_n le nombre de personnes votant pour A le jour n, de sorte que $X_0 = a$. Chaque jour, une personne au hasard va voir une autre personne et arrive à la convaincre de voter pour le même candidat qu'elle. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0;m]\!]$, on pose $\pi_{n,k} = \mathbb{P}(X_n = k)$.
On pose $V_A =$ “ toutes personnes votent pour A à partir d'un certain rang$''$. Même hose pour V_B.

a. Écrire un code *Python* avec pour variables n, m, a et renvoyant le nombre de personnes votant pour A le jour n selon le protocole expliqué. Que remarque-t-on quand n tend vers $+\infty$?

b. Soit $k \in [\![1;m-1]\!]$ et $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\mathbb{P}_{(X_n=k)}(X_{n+1} = k+1) = \mathbb{P}_{(X_n=k)}(X_{n+1} = k-1) = \frac{k}{m} \times \frac{m-k}{m-1}$ et $\mathbb{P}_{(X_n=k)}(X_{n+1} = k) = 1 - \frac{2k}{m} \times \frac{m-k}{m-1}$.

c. Montrer que $\pi_{n+1,k} = \pi_{n,k}\left(1 - \frac{2k}{m} \times \frac{m-k}{m-1}\right) + \pi_{n,k-1}\frac{k-1}{m} \times \frac{m+1-k}{m-1} + \pi_{n,k+1}\frac{k+1}{m} \times \frac{m-1-k}{m-1}$ pour tout $k \in [\![1;m-1]\!]$ et tout $n \in \mathbb{N}$.

d. Montrer que $\forall k \in [\![1;m-1]\!]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\pi_{n,k} \leqslant \left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^n$.

e. Montrer que $\mathbb{P}(V_A) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = m)$ et $\mathbb{P}(V_B) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = 0)$.

f. Montrer que $\mathbb{P}(V_A) + \mathbb{P}(V_B) = 1$. Est-ce cohérent avec la question **a.** ?

g. Écrire un code *Python* qui s'arrête lorsque toutes les personnes votent pour le même candidat, et qui renvoie 0 si c'est A et 1 si c'est B.

240 *Centrale Maths2 PSI 2022* Joël Lascoumes

Soit $A = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$.

a. Avec *numpy*, afficher $AB^k - B^kA$ et kB^k pour $k \in [\![1;6]\!]$. Faire une conjecture.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente. Quelles sont les valeurs propres de M ? En déduire que $M^n = 0$.

c. Créer une fonction *nilpotent(n)* qui renvoie *False* si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ n'est pas nilpotente et *True* (ainsi que l'indice de nilpotence de M) si c'est le cas.

d. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(C,D) \in (\mathcal{M}_n\,\mathbb{C}))^2$, montrer que $\mathrm{Tr}\,(CD) = \mathrm{Tr}\,(DC)$.

Soit dans toute la suite $n \in \mathbb{N}^*$, deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB - BA = B$.

e. Montrer que B n'est pas inversible.

f. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $AB^k - B^kA$.

g. Montrer que B est nilpotente. Indication : considérer $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $\Phi(M) = AM - MA$.

241 *Centrale Maths2 PSI 2022* Thibault Le Gal

L'objectif est de déterminer les solutions de $x^7 + 0,99x - 2,03 = 0$ (1). On pose $f : x \mapsto x^7 + 0,99x - 2,03$.

a. Représenter le graphe de f avec *Python* sur un intervalle judicieux.

b. Montrer que (1) admet une unique solution réelle notée r et donner un encadrement simple de r.

Avec *Python*, donner un approximation de r à 10^{-5} près.

On pose $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, en notant T_n la tangente au graphe de f en le point $M_n = (u_n, f(u_n))$, on note u_{n+1} l'abscisse du point où la droite T_n croise l'axe (Ox).

c. Donner une relation entre u_n et u_{n+1}. Sous quelles hypothèses cet algorithme fonctionne-t-il bien ?

Soit $g : \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x, p, q) = x^7 + px - q$. Comme avant, il existe un unique réel, noté $\Phi(p, q)$, tel que $F(p, q) = g(\Phi(p, q), p, q) = 0$. Dans la suite, (p, q) appartient à un ouvert V contenant le point $(1, 2)$.

d. Donner les dérivées partielles de F en fonction de $\Phi(p, q)$ et des dérivées partielles de Φ.

e. En déduire une expression des dérivées partielles de Φ en fonction de Φ, p et q.

f. Calculer le développement limité à l'ordre 1 de Φ au voisinage du point $(1, 2)$. En déduire une approximation du réel r de la question **b.**.

242 *Centrale Maths2 PSI 2022* Paul Mayé

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on dit qu'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifie $\mathcal{P}_n$ si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\forall k \in [\![0; n]\!],\ P(k) = \dfrac{k}{k+1}$.

a. Calculer tous les P vérifiant $\mathcal{P}_n$ si $n = 1$ et si $n = 2$.

b. Montrer qu'il existe un unique polynôme P vérifiant $\mathcal{P}_n$ qu'on notera P_n.

Indication : on pourra s'intéresser à $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \mapsto \mathbb{R}^{n+1}$ définie par $\varphi(P) = \big(P(0), \cdots, P(n)\big)$.

On pose $Q_n = (X-1)P_n - X$ et $R_n = (n+1)!P_n$.

c. Tracer les graphes de R_n sur $[-2; 8]$ pour $n \in [\![0; 6]\!]$.

d. Regarder $P_n(n+1)$ pour $n \in [\![0; 6]\!]$. Conjecturer puis montrer cette conjecture.

e. Prouver que R_n est à coefficients entiers.

f. Trouver des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n > n+1$ et $P_n(a_n)$ peut être facilement calculé.

243 *Centrale Maths2 PSI 2022* Margaux Millaret

Soit x un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B} = (x, w_1, w_2)$ une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$. Si $r_{\theta,x}$ est la rotation d'angle θ autour de $D = \mathrm{Vect}(x)$ orienté par x, alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r_{\theta,x}) = R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

On définit $\otimes$ sur $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3)$ par $(a, v) \otimes (b, w) = (ab - (v|w), aw + bv + v \wedge w)$ si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $(v, w) \in (\mathbb{R}^3)^2$.

On définit la fonction N sur $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3)$ par $N(a, v) = a^2 + ||v||^2$ si $(a, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$.

a. Montrer que $\forall v \in \mathbb{R}^3,\ r_{\theta,x}(v) = (1 - \cos\theta)(x|v)x + \cos\theta v + \sin\theta x \wedge v$.

b. Écrire une fonction qui prend en argument x, θ et un vecteur v et qui renvoie les coordonnées de $\rho_{\theta,x}(v)$ dans la base canonique.

c. Montrer que $(1, 0_{\mathbb{R}^3}) \otimes (a, v) = (a, v) \otimes (1, 0_{\mathbb{R}^3}) = (a, v)$.

d. Trouver des réels a, b et des vecteurs v, w tels que $(a, v) \otimes (b, w) \neq (b, w) \otimes (a, v)$.

On admet pour la suite que $\otimes$ est associative et bilinéaire.

e. Montrer que $N\big((a, v) \otimes (b, w)\big) = N(a, v) \times N(b, w)$.

f. Soit $q_{x,\theta} = (\cos(\theta/2), \sin(\theta/2)x)$. Montrer que $\forall v \in \mathbb{R}^3,\ q_{x,\theta} \otimes (0, v) \otimes q_{x,-\theta} = (0, r_{\theta,x}(v))$.

g. Déduire de la question précédente une nouvelle version de la fonction de la question **b.**.

244 *Centrale Maths2 PSI 2022* Florian Picq

Pour tout entier $n in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \mapsto \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x-k}$.

a. Tracer le graphe de f_n sur $[0,1;0,9]$ pour $n \in [\![1;5]\!]$.

b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists! x \in]0;1[,\ f_n(x) = 0$. On note u_n cet unique réel x.

c. Écrire une fonction utilisant le principe de dichotomie pour trouver u_n à 10^{-8} près.

d. Proposer une conjecture sur la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ avec la question précédente.

e. Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge en s'intéressant au signe de $f_{n+1}(u_n)$.

f. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{u_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + u_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + u_n^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3\left(1 - \frac{u_n}{k}\right)}$.

g. En déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et déterminer un équivalent de u_n.

245 *Centrale Maths2 PSI 2022* Élouan Princelle

a. Tracer dans la même fenêtre le graphe de la fonction $f : t \mapsto e^{-t^2/2}$ et l'histogramme obtenu pour 1000 valeurs de $\frac{X_1 + \cdots + X_{50} - 25}{5}$ si $X_1, \cdots, X_{50}$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

Indication : on pourra utiliser la commande *plt.hist(liste,density=True,bins=nombre de barres).*

Soit $z \in \mathbb{C}$, on définit pour la suite $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par $f(t) = e^{tz}$.

b. Montrer à l'aide d'une formule de Taylor appliquée à f que $\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$ converge et que sa somme vaut e^z.

c. Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, $k \in \mathbb{N}^*$ et $M = Max(|a|,|b|)$, montrer que $|a^k - b^k| \leqslant k\,M^{k-1}|a-b|$.

d. Soit $v \in \mathbb{C}$, montrer que $|e^v - 1 - v| \leqslant |v|^2 e^{|v|}$.

e. Soit $v \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que $|e^{kv} - (1+v)^k| \leqslant \frac{|kv|^2 e^{k|v|}}{k}$.

f. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite complexe qui converge vers $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n = e^z$.

Soit X une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 2 telle que $\mathbb{E}(X) = 0$ et $\mathbb{V}(X) = 1$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la même loi que X. On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction caractéristique $\Phi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de X_n par $\Phi_n(t) = \mathbb{E}(e^{itX_n})$.

g. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 de $\Phi_n(t)$ au voisinage de 0.

246 *Centrale Maths2 PSI 2022* Maxence Rossignol

Les quatre premières questions constituent l'étude d'un exemple.

Soit H l'hyperplan de $\mathbb{R}^4$ d'équation $x+y+3z+t=0$. Soit σ la réflexion par rapport à H.

a. Montrer que $\forall u \in \mathbb{R}^4,\ \sigma(u) = u - 2(u|n)n$ où n est un vecteur unitaire normal à H que l'on déterminera.

b. Donner la matrice P_σ de σ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

c. Montrer avec *Python* que la matrice P_σ est une des matrices de passage permettant de diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$ et en déduire $\mathrm{Sp}(A)$.

d. Trouver toutes les matrices diagonales D semblables à A telles que $\operatorname{rang}(A-D) = i$ pour tout $i \in [\![1;3]\!]$.
Indication : on pourra utiliser la fonction *permutations* qui renvoie la liste des permutations d'une liste.

Les quatre questions qui suivent constituent l'étude du cas général.

Soit H un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ euclidien canonique et σ la réflexion par rapport à H, on admet qu'on a encore $\forall u \in \mathbb{R}^n,\ \sigma(u) = u - 2(u|n)n$ où n est un vecteur unitaire normal à H. On note P_σ la matrice de P_σ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que $A = P_\sigma D P_\sigma^{-1}$ et les endomorphismes f et g canoniquement associés respectivement à A et D.

e. Montrer que $\forall u \in \mathbb{R}^n,\ f(u) - g(u) = 2(u|n)f(n) - 2(u|g(n))n$.

f. Que dire de $\operatorname{rang}(A-D)$?.

g. Combien de matrices diagonales D' sont semblables à A et sont telles qu'il existe une matrice de réflexion $P_{\sigma'}$ dans la base canonique qui vérifie $A = P_{\sigma'} D' P_{\sigma'}^{-1}$.

h. Donner les éléments propres de $f-g$.

247 *Centrale Maths2 PSI 2022* Anatole Rousset

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = (2x^2+3y^2)e^{-(x^2+y^2)}$.

Pour $R>0$, on définit $D_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqslant R^2\}$.

a. Tracer la surface d'équation $z = f(x,y)$ avec *Python*.

b. Montrer l'existence d'un minimum de f sur $\mathbb{R}^2$ et le calculer.

c. Montrer que $\forall a>0,\ \exists R_a>0,\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus D_{R_a},\ f(x,y) \leqslant a$.

d. Montrer que f admet un maximum sur $\mathbb{R}^2$ et le calculer.

248 *Centrale Maths2 PSI 2022* Baptiste Savarit

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $J(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos\big(x\sin(\theta)\big)d\theta$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n(\theta)d\theta$.

On pose aussi l'équation différentielle $(E)\ :\ xy'' + y' + xy = 0$.

a. Tracer le graphe de J pour $x \in [-10;10]$.

b. Montrer que $\forall n \geqslant 2,\ nI_n = (n-1)I_{n-2}$. En déduire une expression simple de I_{2k} pour $k \in \mathbb{N}$.

c. Montrer que J est développable en série entière et déterminer les coefficients de ce développement.

d. Vérifier sur *Python* que les deux expressions de J sont cohérentes.

e. Vérifier que J est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

249 *Centrale Maths2 PSI 2022* Thibault Sourdeval

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\{0,1\}$ et $W = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists P \in \mathcal{P} \setminus \{0\},\ P(z) = 0\}$.

a. Écrire un script *Python* qui positionne dans le plan les z de W correspondant aux polynômes $P \in \mathcal{P} \setminus \{0\}$ tels que $\mathtt{deg}(P) \leqslant 7$. Indication : pour représenter un complexe, *mathplotlib.pyplot(z.real,z.imag,marker "0")*.

b. Montrer que W est stable par les deux applications $z \mapsto \bar{z}$ et $z \mapsto \dfrac{1}{z}$.

Soit $z \in W$ tel que $|z| < 1$ et $P \in \mathcal{P}$ tel que $P(z) = 0$. Posons $Q(z) = P(z) - 1 - \dfrac{z}{2(1-z)}$.

c. Montrer que $|Q(z)| \leqslant \dfrac{|z|}{2(1-|z|)}$. En déduire que $\dfrac{|z|}{1-|z|} \geqslant \left|\dfrac{2-z}{1-z}\right|$.

d. Montrer que $\dfrac{1}{1-|z|} \geqslant \left|\dfrac{2z-1}{z-1}\right|$.

e. Soit $P = 1 + \sum\limits_{k=0}^{m} X^{2k+1}$. Montrer que P admet une unique racine x_m telle que $-1 \leqslant x_m \leqslant 0$.

250 *Centrale Maths2 PSI 2022* Alban Soyez

Pour $x \in]-1;1[$, en cas de convergence, on pose $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{x^k}{1-x^k}$.

On définit la suite de Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $F_0 = F_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

On note β la racine négative de $X^2 - X - 1$.

a. Montrer que f est définie et de classe C^1 sur $]-1;1[$.

b. Écrire une fonction *f(n,x)* qui renvoie $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{x^k}{1-x^k}$.

c. Écrire une fonction *trace(n,x)* qui affiche le graphe de $S_n : x \mapsto \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{x^k}{1-x^k}$ sur $]-1;1[$.

d. Écrire une fonction *Fibo(n)* qui renvoie $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{F_{2k}}$.

e. Conjecturer la valeur de $\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{F_{2n}}\right) - \sqrt{5}\big(f(\beta^2) - f(\beta^4)\big)$.

f. Montrer la conjecture de la question précédente.

251 *Centrale Maths2 PSI 2022* Paul Sterlin

On donne une fonction à exécuter qui renvoie l'indice de l'entier choisi dans la liste L une fois celle-ci triée par ordre croissant. Cette fonction prenait en argument une liste d'entiers quelconque et l'indice dans cette liste de l'élément choisi.

a. Que fait ce code ?

b. Donner le développement en série entière de $-\ln(1-x)$, $\dfrac{1}{(1+x)^2}$ et $\dfrac{1}{(1+x)^3}$.

Soit un entier $p \geqslant 2$ et la suite $(c_n(p))_{n\geqslant 0}$ définie par $c_0(p) = 0$ et $\forall n \geqslant 1,\ c_n(p) = ??? + \sum\limits_{k=1}^{p-1} c_k(p)$.

c. Montrer que $\forall k \geqslant 1,\ c_k(p) \leqslant 2pk$.

d. Que dire de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n(p)$?

252 *Centrale Maths2 PSI 2022* Guillaume Tran-Ruesche

Pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $I(x) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^x}$.

a. Donner le domaine de définition D de I.

b. Tracer le graphe de I sur $]1;30[$. Conjecturer les variations de I et son tableau de variations.

c. Calculer $I(2)$ à l'aide de la méthode des rectangles, et comparer à ce qui a été fait précédemment.

d. Montrer que $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^x}$ est intégrable sur $]1;+\infty[$ si $x \in D$.

e. Montrer que I est de classe C^1 sur D.

f. Déterminer les limites de I aux bornes de D.

g. Montrer que $I(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{kx+1}$.

253 *Centrale Maths2 PSI 2022* Matis Viozelange

Pour $n \geqslant 2$, on définit $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \frac{1}{(1+x)\cdots(n+x)}$ et on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\cdots(n+x)}$.

a. Calculer I_n et $n!\ln(n)I_n$ pour $n \in [\![2;30]\!]$. Quelle conjecture pouvez-vous faire ?

b. Montrer que $(I_n)_{n\geqslant 2}$ converge et donner sa limite.

On admet qu'il existe des réels $a_1, \cdots, a_n$ tels que $\forall x \geqslant 0,\ f_n(x) = \sum\limits_{p=1}^{n} \frac{a_p}{p+x}$.

c. Montrer que $\forall p \in [\![1;n]\!],\ a_p = \frac{(-1)^{p+1}}{(n-1)!}\binom{n-1}{p-1}$.

d. Calculer $\sum\limits_{p=1}^{n} a_p$.

e. Écrire I_n sous forme d'une somme finie.

PARTIE 9 : 2023

254 *Centrale Maths2 PSI 2023* Paul Bats

On s'intéresse aux permutations de la liste $[0, \cdots, n-1]$. f est la permutation générique.

a. Écrire une fonction qui crée une permutation f de la liste $[0, \cdots, n-1]$ (import *numpy.random* as *rd*) où la probabilité que i soit à la place j est uniforme en retirant dans la première liste.

b. 20 personnes échangent 20 cadeaux indiscernables. Malheureusement, il arrive que quelqu'un reçoive son propre cadeau. Estimer avec *python* la probabilité que personne ne reçoive son propre cadeau.

Pour $j \in [\![0; n-1]\!]$, on définit Y_j par $Y_j = 1$ si $f(j) = j$ et $Y_j = 0$ sinon. On note X_n le nombre de $j \in [\![0; n-1]\!]$ tels que $f(j) = j$: f est un dérangement si $X_n = 0$. On note d_n le nombre de dérangements de $[0, \cdots, n-1]$.

c. Déterminer la loi de Y_j. Exprimer X_n en fonction des Y_j.

d. Calculer l'espérance et la variance de X_n. Comparer avec la question **b.**.

e. Montrer que $\forall k \in [\![0; n-1]\!],\ \mathbb{P}(X_n = k) = \dfrac{d_{n-k}}{n!}\dbinom{n}{k}$.

On admet la formule d'inversion de Pascal : si deux familles $(a_0, \cdots, a_{n-1})$ et $(b_0, \cdots, b_{n-1})$ de complexes vérifient $\forall p \in [\![0; n-1]\!],\ b_p = \sum\limits_{k=0}^{p} \dbinom{p}{k} a_k$, alors on a $\forall p \in [\![0; n-1]\!],\ a_p = (-1)^p \sum\limits_{k=0}^{p} (-1)^k \dbinom{p}{k} b_k$.

f. En posant $d_0 = 1$, montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ d_n = n! \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!}$.

g. Montrer la formule d'inversion de Pascal.

255 *Centrale Maths2 PSI 2023* Paul-Antoine Baury-Carpentier

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dit que A vérifie (H) si les valeurs propres de A sont toutes réelles et vérifient $|\lambda_1| > \cdots > |\lambda_n|$. Soit $A = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}$.

a. Vérifier que A vérifie (H). Donner une base de $\mathbb{R}^4$ formée de vecteurs propres de A.

La matrice A est-elle inversible ?

On pose $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et, pour $p \in \mathbb{N}$, $X_{p+1} = \dfrac{AX_p}{||AX_p||}$.

b. Évaluer $X_{10}, X_{20}, X_{40}, X_{50}$. Que remarquez vous ?

c. Proposer un algorithme pour trouver un vecteur propre v_1 associé à la valeur propre λ_1 pour une matrice A quelconque vérifiant (H).

256 *Centrale Maths2 PSI 2023* Bader Ben Amira

Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ telle que $a_1 > 0$ et $\forall k \geqslant 2, a_k \geqslant 0$. On note R le rayon de convergence de $\sum_{k\geqslant 1} a_k x^k$ et $A(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k x^k$ pour $x \in]-R;R[$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel x, on pose $A_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x^k$. On importe *numpy*, *matplot* et *scipy optimize.*

a. Soit $y \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe un unique réel $z \in \mathbb{R}_+$ tel que $A_n(z) = y$. On le note $z = f_n(y)$.

Lors des trois prochaines questions, on pose $a_k = \dfrac{1}{k}$ pour $k \geqslant 1$.

b. Déterminer R et $A(x)$ pour $x \in]-R;R[$.

c. Écrire une fonction qui prend en argument n et x et qui renvoie $A_n(x)$.

d. En utilisant *resol.fsolve*, écrire une fonction qui prend en argument n et y et qui renvoie $f_n(y)$.

e. Pour $n = 100$, conjecturer l'évolution de $f_n(y)$ quand y augmente.

f. Montrer que $(f_n(y))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite $f(y)$.

g. Montrer que $f(y) \in [-R; R]$.

257 *Centrale Maths2 PSI 2023* Arthur Biot

On a un cahier de collection de cartes, avec N emplacements numérotés de 0 à $N-1$. Les différents achats sont indépendants et, à chaque fois, la carte i a une probabilité p_i d'être achetée. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et $i \in [\![0; N-1]\!]$, on note :

- $Y_{i,n}$ le nombre de fois qu'on a obtenu la carte i au cours des n premiers achats.
- $V_n = (Y_{1,n}, \cdots, Y_{N,n})$.
- $Z_{i,n} = 1$ si $Y_{i,n} > 0$ et $Z_{i,n} = 0$ sinon.
- $W_n = \sum_{i=0}^{N-1} Z_{i,n}$.

Une fonction prenant la liste $p = [p_0, \cdots, p_{n-1}]$ est donnée qui renvoie h, une valeur aléatoire pour simuler le numéro de la carte achetée.

a. Écrire une fonction qui simule l'expérience avec n achats et une liste de probabilité p et qui renvoie W_n.

b. Avec la loi des grands nombres et la fonction précédente, estimez l'espérance de W_n dans le cas où l'on prend $N = n = 365$ et $p = \left[\dfrac{1}{365}, \cdots \dfrac{1}{365}\right]$.

c. On revient au cas général. Quelle loi suit $Z_{i,n}$? En déduire l'espérance de W_n. Vérifier le résultat de la question précédente.

d. Calculer la variance de W_n.

258 *Centrale Maths2 PSI 2023* Maddie Bisch

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite récurrence d'ordre p si elle est définie par la donnée des termes $u_0, \cdots, u_{p-1}$ et par la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+p} = a_0 u_n + a_1 u_{n+1} + \cdots + a_{p-1} u_{n+p-1}$ (1). On pose $P = X^p - \sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k$ $(*)$ le polynôme associé à cette relation de récurrence. On définit $D : R^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par $D\big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) = (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. On note E_p l'ensemble des suites réelles d'ordre p.

a. Écrire une fonction qui prend en argument un polynôme P de la forme $(*)$, un entier $k \geqslant p = \mathrm{deg}(P)$, une liste $[u_0, \cdots, u_{k-1}]$ contenant les k premiers termes de la suite et qui indique si la relation (1) est vérifiée.

b. Écrire une fonction qui prend an argument un entier p, une liste $[u_0, \cdots, u_{2p-1}]$ contenant les $2p$ premiers termes d'une suite récurrence $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ordre p et qui renvoie les coefficients du polynôme P associé.

Indication : on pourra résoudre un système de p équations.

c. On donne $u_0 = 2$, $u_1 = 5$, $u_3 = 8$, $u_4 = 11$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ récurrente d'ordre 2. Donner P.

d. On donne $v_0 = 1$, $v_1 = -1$, $v_3 = 1$, $v_4 = -1$, $v_5 = 1$, $v_6 = -1$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ récurrente d'ordre 3. Donner P.

e. Montrer que D est un endomorphisme de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et que E_p est stable par D.

f. Montrer que $u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est récurrente d'ordre p si et seulement s'il existe P de degré p et de la forme $(*)$ tel que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{Ker}\big(P(D)\big)$.

g. Soit $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$, montrer que $\mathrm{Ker}(P(D)) + \mathrm{Ker}(Q(D)) \subset \mathrm{Ker}(PQ(D))$.

259 *Centrale Maths2 PSI 2023* Rebecca Blé

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite u-variante sur un intervalle I si elle est C^∞ sur I et s'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in I,\ f^{(n)}(x) \times u_n \geqslant 0$.

a. Quel est le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!} x^n$?

b. Écrire une fonction *python* qui prend en argument N et x et calcule $S_N^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{N} \left(\dfrac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!} x^n\right)^{(k)}$.

c. Tracer $S_N^{(k)}$ pour plusieurs valeurs de k et s'intéresser au signe de ces fonctions.

d. Existe-t-il une fonction u-variante sur $\mathbb{R}$ avec $\forall n \in \mathbb{N}$' $u_n = 1$?

e. Existe-t-il une fonction u-variante sur $\mathbb{R}$ avec $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = (-1)^n$?

f. Existe-t-il une fonction u-variante sur $\mathbb{R}$ avec $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui vérifie $u_1 = 1, u_2 = -1$ et $u_3 = -1$?

g. Cherchez I sur lequel $\cos$ est u-variante et donner $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ correspondant.

260 *Centrale Maths2 PSI 2023* Mathys Bureau

On range n boules (p blanches et $n-p$ rouges) dans un ordre quelconque on les numérote de 1 à n. Soit X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule numéro i n'a pas la même couleur que la boule numéro $i+1$, 0 sinon.

On note N la variable aléatoire qui compte le nombre de changements de couleur entre boules consécutives.

a. Écrire une fonction *python* qui modélise l'expérience et renvoie N grâce à la fonction *rd.permutation.*

b. Déterminer la loi de X_i. En déduire la valeur de $\mathbb{E}(N)$.

c. Calculer, pour $n = 24$ et différentes valeurs de p, une valeur approchée de $\mathbb{E}(N)$ avec *python* et comparer avec la valeur théorique calculée en **b.**.

d. La variable aléatoire N suit-elle une loi binomiale ?

e. Calculer $\mathbb{V}(N)$.

f. Soit $k \geqslant 2$ et $m \geqslant 2$, montrer que les deux ensembles $A_{k,m} = \{(a_1, \cdots, a_k) \in (\mathbb{N}^*)^k \mid a_1 + \cdots + a_k = m\}$ et $B_{k,m} = \{(b_1, \cdots, b_{k-1}) \in [\![0; m-1]\!]^{k-1} \mid b_1 < \cdots < b_{k-1}\}$ sont en bijection.

261 *Centrale Maths2 PSI 2023* Antoine Campos et Gabriel Hofman

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n(x) = \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n du$ en cas de convergence.

a. Donner l'ensemble de définition D_n de J_n.

b. Calculer $J_n(x)$ sous forme de produit pour $x \in D_n$.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, soit $u_k : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $u_k(t) = t^{x-1}\left(1 - \frac{t}{k}\right)^k$ si $t \in]0;k]$ et $u_k(t) = 0$ sinon.

c. Trouver la fonction u telle que $(u_k)_{k\geqslant 1}$ converge simplement vers u sur $\mathbb{R}_+^*$.

d. Tracer u_2, u_5 et u_{10} avec *python* pour différentes valeurs de x.

e. Calculer, pour $x > 0$, $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^n u_n(t)dt$.

f. Montrer que $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!\,n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$.

g. Montrer que $\forall x > 0,\ \Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$.

h. En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

i. Tracer la fonction Γ avec *python*.

j. Montrer que Γ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $\Gamma^{(n)}(x)$.

k. Montrer qu'il existe $c \in]0;1[$ tel que $\Gamma'(c) = 0$.

262 *Centrale Maths2 PSI 2023* Rémi Darrieumerle

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $A_n = \left(\dfrac{\binom{n}{i}}{n-i+j+1}\right)_{0\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$. Pour $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ et $Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$, on pose aussi $(X|Y) = \sum\limits_{0\leqslant i,j\leqslant n+1} \dfrac{x_i y_j}{n-i+j+1}\binom{n}{i}$.

a. Écrire une fonction *mat* qui prend en argument un entier n et qui renvoie A_n. On utiliser les commandes *import scipy.special as sp ; sp.binom(n,i)*. Afficher A_2.

b. Pour $n \in \{0, 8\}$, afficher les valeurs propres de A_n. En déduire que A_n est diagonalisable.

c. Écrire une fonction *prodscal* qui renvoie $(x|y)$. Afficher *prodscal([1,2,3],[4,5,6],2)*.

d. Pour $n \in \{1, 2\}$, que dire des vecteurs propres de A_n ?

Soit l'application u définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $u_n(P)(x) = \int_0^1 (x+t)^n P(t)dt$.

e. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

f. Montrer que A_n est la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

g. Montrer que u est symétrique si on munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire défini par $(P|Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$.

263 *Centrale Maths2 PSI 2023* Hugo Delval

On veut faire se faire une collection Panini de n cartes. On achète les cartes une par une. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note Z_k le nombre de cartes différentes obtenues après k achats.

a. Écrire une fonction *collect(n,k)* qui renvoie le nombre de cartes différentes obtenues après k achats si n est le nombre total de cartes.

b. En utilisant cette fonction, tracer $E(Z_k)$ pour k allant de 1 à 300.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé et $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_k = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(Z_k = i)X^{n-i}$.

c. Montrer que $P_{k+1} = P_k - \dfrac{X-1}{n}P_k'$.

d. Exprimer $\mathbb{E}(Z_k)$ en fonction de $P_k'(1)$.

264 *Centrale Maths2 PSI 2023* Raphaël Déniel et Tom Graciet

Soit une marche aléatoire d'une puce dans $\mathbb{Z}^2$. Elle se trouve en $(0,0)$ à l'instant 0 et le pas (x_n, y_n) suit la loi uniforme à valeurs dans $\{(1,0),(-1,0),(0,1),(0,-1)\}$. On note (X_n, Y_n) la position après le pas n de sorte que $(X_{n+1}, Y_{n+1}) = (X_n, Y_n) + (x_n, y_n)$. On note $u_n = x_n + y_n$, $v_n = x_n - y_n$, $U_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$, $V_n = \sum\limits_{k=1}^{n} v_k$.

Soit O_n la variable aléatoire qui vaut 1 si la puce est à l'origine à l'instant n et 0 sinon.

a. Écrire une fonction *position(n)* permettant de calculer la position de de la puce à l'instant n sous forme d'un tableau à deux valeurs.

b. Écrire une fonction permettant de de calculer $\mathbb{E}(X_n)$, $\mathbb{E}(|X_n|)$, $\mathbb{E}(X_n^2)$ et $\mathbb{P}(O_n)$ pour $n \in \{50, 51, 100\}$ en faisant 10^3 expériences. Faire des conjectures.

c. Trouver une relation entre U_n, X_n et Y_n. Faire de même avec V_n, X_n et Y_n.

d. Montrer que $U_n(\Omega) = [\![-n;n]\!]$ et $V_n(\Omega) = [\![-n;n]\!]$.

d. Montrer que $\dfrac{n+U_n}{2}$ et $\dfrac{n+V_n}{2}$ suivent une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

f. En déduire les valeurs de $\mathbb{E}(U_n)$, $\mathbb{E}(V_n)$, $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{E}(X_n^2)$.

g. Montrer que u_n et v_n sont indépendants.

265 *Centrale Maths2 PSI 2023* Armand Dépée

Pour $n \geqslant 0$, on définit $f_n(x) = \prod\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{x+k}$. Puis $F(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ et $G(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

a. Montrer que F et G sont bien définies sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Représenter avec Python les premières sommes partielles des deux séries sur un intervalle bien choisi.

c. Représenter aussi $\dfrac{F}{G}$ et conjecturer.

d. Montrer qu'il existe une famille de réels $(\alpha_{i,n})_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n \\ n \in \mathbb{N}}}$ telle que $\forall x > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} \dfrac{\alpha_{i,n}}{x+i}$.

e. En considérant un équivalent de $f_n(x)$ en $-i$, déterminer $\alpha_{i,n}$.

f. Prouver la conjecture faire à la question **c.**.

g. Trouver un équivalent de F en 0 et un équivalent de F en $+\infty$.

266 *Centrale Maths2 PSI 2023* Marius Desvalois

Soit A une partie de $\mathbb{N}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = 1$ si $n \in A$ et $u_n = 0$ sinon. On pose $\mathcal{A}$ l'ensemble de toutes les parties A de $\mathbb{N}$ telles que $\lim\limits_{x\to 1^-} (1-x) f_A(x)$ existe si $f_A(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. On pose $A = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$.

a. Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n x^n$ vérifie $R \geqslant 1$.

Pour $A \in \mathcal{A}$, on pose $\mathbb{P}(A) = \lim\limits_{x\to 1^-} (1-x) f_A(x)$.

b. Montrer que $\emptyset$ et $\mathbb{N}$ sont dans $\mathcal{A}$ et calculer $\mathbb{P}(\emptyset)$ et $\mathbb{P}(\mathbb{N})$.

c. Soit $(A, B) \in \mathcal{A}^2$ tel que $A \subset B$, montrer que $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$.

d. Soit $A \in \mathcal{A}$, montrer que $\mathbb{P}(A) \in [0;1]$.

e. Soit $(A, B) \in \mathcal{A}^2$ tel que $A \cap B = \emptyset$, montrer que $A \cup B \in \mathcal{A}$ et calculer $\mathbb{P}(A \cup B)$ avec $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(B)$.

f. Soit $A \in \mathbb{R}$, montrer que $\overline{A} \in \mathcal{A}$ et calculer $\mathbb{P}(\overline{A})$ en fonction de $\mathbb{P}(A)$.

g. Montrer que $2\mathbb{N} \in \mathbb{A}$ et $3\mathbb{N}+5 \in \mathcal{A}$ et calculer $\mathbb{P}(2\mathbb{N})$ et $\mathbb{P}(3\mathbb{N}+5)$.

h. Montrer qu'il existe $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ incompatible telle que $\mathbb{P}\Big(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \neq \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$. Conclure sur $\mathbb{P}$.

i. Écrire un code *python* qui calcule $f_A(x)$ partiellement et faire une conjecture sur $\mathbb{P}(A)$.

j. Trouver un équivalent de f_A en 1^- par comparaison série-intégrale. Conclure quant à la conjecture.

267 <u>*Centrale Maths2 PSI 2023*</u> Alban Dujardin

Soit $n \geqslant 2$ et n personnes $P_1, \cdots, P_n$. Pour $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ avec $i \neq j$, les deux personnes P_i et P_j sont liées avec une probabilité $p \in]0;1[$. Pour $i \in [\![1;n]\!]$, on définit la variable aléatoire X_i qui vaut 1 si la personne P_i est isolée et 0 sinon. On note aussi S_n le nombre de personnes isolées.

a. Écrire une fonction qui renvoie une matrice représentant la situation avec en entrée (n, p).

b. Écrire une fonction qui renvoie le nombre de personnes isolées.

c. Écrire une fonction qui renvoie l'espérance de S_n avec 10000 expériences.

d. Tracer, pour $n \in [\![2;10]\!]$, la famille $\left(\ln\left(\dfrac{\mathbb{E}(S_n)}{n}\right)\right)_{2\leqslant n\leqslant 10}$ pour $p \in \{0,3;0,5;0,7\}$.

e. Conjecturer la valeur de $\mathbb{E}(S_n)$ en fonction de n et p.

f. Calculer $\mathbb{E}(X_1)$ et $\mathbb{E}(S_n)$.

g. Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, montrer que $\mathbb{P}(Y \geqslant 1) \leqslant \mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{P}(Y = 0) \leqslant \dfrac{V(Y)}{\mathbb{E}(Y)^2}$.

h. En déduire que $\mathbb{P}(S_n = 0) \geqslant \mathrm{Min}(1 - \mathbb{E}(S_n), 0)$ et $\mathbb{P}(S_n = 0) \leqslant \mathrm{Max}\left(1, \dfrac{\mathbb{E}(S_n^2)}{\mathbb{E}(S_n)^2} - 1\right)$.

i. Évaluer $\mathbb{E}(S_n^2)$ pour $p = c\dfrac{\ln(n)}{n}$ avec $c > 0$.

268 <u>*Centrale Maths2 PSI 2023*</u> Juan Dupierris

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement positive vérifie la relation E_λ si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{+\infty}{=} 1 - \dfrac{\lambda}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n\geqslant 2}$ définies par $v_n = \dfrac{1}{n^\beta}$ et $y_n = \dfrac{1}{n\ln(n)^2}$.

a. Utiliser un programme *Python* pour conjecturer une valeur de λ telle que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie la relation E_λ en traçant les termes de la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ pour différentes valeurs de β.

b. Démontrer la conjecture émise à la question précédente.

c. Étudier la convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 2} y_n$.

d. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation E_λ avec $\lambda < 0$, alors $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge.

e. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation E_λ avec $\lambda < 1$, alors $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge.

f. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation E_λ avec $\lambda > 1$, alors $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

g. Montrer qu'on ne peut pas conclure si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation E_λ avec $\lambda = 1$.

269 <u>*Centrale Maths2 PSI 2023*</u> Olivier Farje

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n : x \mapsto \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{x^k}{k}$.

a. Montrer que $\forall y \in \mathbb{R}_+,\ \exists! x \in \mathbb{R}_+,\ P_n(x) = y$. On notera $x = g_n(y)$.

b. Écrire une fonction *Python* qui prend en argument n et x et qui renvoie $P_n(x)$.

c. Écrire une fonction *Python* qui prend en argument n et y et qui renvoie $g_n(y)$. Indication : utiliser *solve*.

d. Tracer les valeurs $(g_n(y))_{1\leqslant n\leqslant 50}$ pur différentes valeurs de y.

e. Montrer que pour tout réel $y \geqslant 0$, la suite $(g_n(y))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

270 *Centrale Maths2 PSI 2023* Jonathan Filocco

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour $k \in [\![0;n]\!]$, on pose le polynôme $P_k = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}} \frac{nX - j}{k - j} = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}} \frac{X - \frac{j}{n}}{\frac{k}{n} - \frac{j}{n}}$ et on définit l'application $f_k : E \to \mathbb{R}$ par $f_k(P) = P\left(\frac{k}{n}\right)$.

a. Tracer les graphes de $P_0, \cdots, P_5$ avec $n = 5$ sur *Python.*

b. Montrer que $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de E et en déduire que $(f_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.

c. Soit $\varphi : P \in E \to \int_0^1 P(t)dt$. Montrer que $\exists!(\alpha_0, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\forall P \in E$, $\int_0^1 P(t)dt = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k P\left(\frac{k}{n}\right)$.

d. On prend $n = 4$, calculer, via *Python*, les constantes $\alpha_0, \cdots, \alpha_4$.

e. On prend $n = 4$. Soit $(P, Q) \in (\mathbb{R}_2[X])^2$ et le produit scalaire donné par $< P, Q >= \int_0^1 P(t)Q(t)dt$ sur $\mathbb{R}_2[X]$ (admis). Réécrire $< P, Q >$ avec les $\left(P\left(\frac{k}{4}\right)Q\left(\frac{k}{4}\right)\right)_{0 \leqslant k \leqslant 4}$.

f. On revient au cas général. Soit, pour $k \in [\![0;n]\!]$, le polynôme $L_k = \left((X - X^2)^k\right)^{(k)}$. Montrer que $(L_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base orthogonale de E. Indication : on pourra d'abord montrer que L_k est orthogonale à $\mathbb{R}_{k-1}[X]$.

271 *Centrale Maths2 PSI 2023* Clément Gallice

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on dit qu'une matrice $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est à diagonale dominante si $\forall j \in [\![1;n]\!]$, $|m_{j,j}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |m_{i,j}|$. On note D_n l'ensemble de toutes les matrices à diagonale dominante de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a. Écrire une fonction *Python* qui prend en argument une matrice M et sa taille et qui indique si $M \in D_n$.

b. Donner un exemple de matrice orthogonale dans D_n.

c. L'ensemble D_n est-il stable par le produit matriciel ?

d. Soit $M \in D_n$ et $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, montrer que $MX \neq 0$. Qu'en déduire sur M ?

e. Écrire une fonction *Python* qui renvoie $r = \mathrm{Inf}\left(|m_{j,j}| - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |m_{i,j}|\right)$ pour une matrice M de taille n.

f. Justifier que D_n est un ouvert. Trouver $r > 0$ tel que $B(M, r) \subset D_n$ si $M \in D_n$.

272 *Centrale Maths2 PSI 2023* Antoine Jeanselme

On dit qu'une matrice $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ est stochastique si $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, $m_{i,j} \geqslant 0$ et si $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = 1$. On dit qu'elle est doublement stochastique si sa transposée est aussi stochastique.

Soit j le complexe de module 1 et d'argument $\frac{2\pi}{3}$. Soit $(x_{1,n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(x_{1,n})_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre p. On définit la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $z = 0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = j^{x_{1,n} + x_{2,n}} z_n$. On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $Z_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(z_n = 1) \\ \mathbb{P}(z_n = j) \\ \mathbb{P}(z_n = j^2) \end{pmatrix}$.

a. Programmer *stocha* (resp. *stocha2*) qui vérifie si M est stochastique (resp. doublement stochastique).

b. L'ensemble des matrices stochastiques (resp. doublement stochastiques) est-il stable par produit ?

c. Montrer que 1 est valeur propre d'une matrice stochastique.

d. Déterminer une matrice A telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $Z_{n+1} = AZ_n$. Que dire de A ?

e. Exprimer A en fonction de I_3 et J et en déduire A^n. Montrer que A^n est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0_{1,2} \\ 0_{2,1} & M_n \end{pmatrix}$ (par blocs) où $M_n \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ s'écrit sous forme de somme.

f. Quel lien pouvez-vous faire entre $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$?

273 *Centrale Maths2 PSI 2023* Fares Keraudret

On dispose de p boules blanches et $n-p$ boules rouges et de n cases numérotées de 1 à n dans lesquelles on place aléatoirement une boule dans chaque case. On appelle N le nombre de changements de couleurs. Par exemple, si $n=7$, $p=3$ et qu'on choisit BRRBRRB, alors $N=4$.

Soit aussi, pour $i \in [\![1;n-1]\!]$, la variable aléatoire X_i qui vaut 1 s'il y a un changement de couleur entre les cases i et $i+1$ et 0 sinon.

a. Coder une fonction qui modélise l'expérience et renvoie N.

b. Écrire une fonction pour calculer une approximation de $\mathbb{E}(N)$.

c. Tracer, pour différentes valeurs de n, le graphe de $\mathbb{E}(N)$ en fonction de p.

d. Déterminer la loi de X_i.

e. Trouver la loi de X_iX_j.

f. Trouver une relation entre N et les X_i et calculer $\mathbb{E}(N)$. Vérifier avec la question **b.**.

g. Calculer $\mathbb{V}(N)$.

274 *Centrale Maths2 PSI 2023* Esteban Maurer et Antoine Vallade

On pourra importer récupérer les fonctions $\cos$, ch, $\sin$ et sh avant de commencer l'exercice avec le code *import numpy as np*, *import matplotlib.pyplot as plt* avec respectivement *np.cos*, *np.cosh*, *np.sin*, *np.sinh*.

Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{ch}(2y) - \cos(2x)}{2}$.

Pour $r > 0$, on pose $g_r : \theta \mapsto f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$.

a. Tracer g_r sur $[-2\pi; 2\pi]$ pour les valeurs $r \in \{1,2,5,10\}$.

b. Conjecturer la périodicité, la parité et les variations de g_r sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

c. Quelles seraient donc les valeurs en lesquelles g_r atteint son maximum absolu ?

d. Montrer que f admet un minimum en $(0,0)$.

On pose $B_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2+y^2} \leqslant r\}$, $\Omega_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2+y^2} < r\}$ et $C_r = B_r \setminus \Omega_r$.

e. Préciser si B_r, Ω_r et C_r sont des ouverts ou des fermés.

f. Montrer qu'il existe un réel positif $M(r)$ tel que l'on ait $\forall (x,y) \in B_r, f(x,y) \leqslant M(r)$ et qui vérifie en plus la condition $\exists (x_r,y_r) \in B_r,\ f(x_r,y_r) = M(r)$: ce traduit le fait que $M(r)$ est le maximum de f dans $B(r)$.

On définit $F_r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $F_r(x,y) = f(x,y)$ si $(x,y) \in B_r$ et $F_r(x,y) = 0$ sinon.

g. Montrer que $M(r)$ est le maximum de F_r sur $[-r;r]^2$.

h. Écrire une fonction *F(r,x,y)* qui renvoie $F_r(x,y)$.

i. Tracer la fonction $r \mapsto M(r)$ sur l'intervalle $[1;4]$ avec un pas de 0.01.

j. Afficher en même temps le graphe de la fonction $r \mapsto \operatorname{sh}^2(r)$.

k. Prouver que $\forall t \geqslant 0,\ \sin(t) \leqslant t \leqslant \operatorname{sh}(t)$.

l. Démonter les conjectures faites à la question **b.**.

275 *Centrale Maths2 PSI 2023* Sacha Meslier

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $I_n = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^n}$, et $s_n = \sum_{k=1}^{n} I_k$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{I_k}{k}$.

a. Écrire une fonction *Python* calculant I_n. Donner $I_0, \cdots, I_9$.

b. Justifier que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

c. Déterminer la valeur de $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

d. Représenter les points $A_n = (n, s_n)$ et $B_n = (n, S_n)$ pour $n \in [\![1;100]\!]$. Quelles conjectures sur les limites éventuelles des suites $(s_n)_{n\geqslant 1}$ et $(S_n)_{n\geqslant 1}$?

e. Montrer les conjectures émises à la question précédente.

276 *Centrale Maths2 PSI 2023* Antoine Notelle-Maire

On dispose de n boules, p blanches et $n-p$ rouges avec $n \geqslant 2$ et $0 \leqslant p \leqslant n$. On place aléatoirement les boules dans une suite de n cases numérotées de 1 à n et on note N le nombre de fois où les cases i et $i+1$ ont des boules de couleurs différentes. Pour $i \in [\![1;n-1]\!]$, on note X_i la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si les cases i et $i+1$ ont des boules de couleurs différentes et 0 sinon.

a. Écrire une fonction *Python* de paramètre n et p qui modélise l'expérience et qui renvoie N. Indication : on pourra utiliser la fonction *np.random.permutation* sur une liste.

b. Pour $n = 24$, relier les points $[p, \mathbb{E}(N)]$ pour $p \in [\![1;10]\!]$. Justifier le programme.

c. Pour $i \in [\![1;n-1]\!]$,, déterminer la loi de X_i.

d. Pour $(i,j) \in [\![1;n-1]\!]^2$ avec $i \neq j$, déterminer la loi de X_iX_j.

e. Calculer $\mathbb{E}(N)$. Comparer avec les résultats de la question **a.**.

f. Calculer $\mathbb{V}(N)$.

277 *Centrale Maths2 PSI 2023* Paul Picard

Soit E l'ensemble des matrices $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui vérifient toutes les conditions suivantes : $\forall (i,j) \in [\![1;3]\!]^2$, $\sum_{k=1}^{3} m_{i,k} = \sum_{k=1}^{3} m_{k,j} = m_{3,1} + m_{2,2} + m_{1,3} = \mathrm{Tr}\,(M)$.

a. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

b. Montrer que $\varphi : E \to \mathbb{R}^3$ définie par $\varphi(M) = (m_{1,1}, m_{2,1}, m_{3,2})$ est un isomorphisme.

c. Conjecturer une valeur $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que λ est valeur propre de toute matrice de M.

d. Montrer la conjecture émise à la question précédente.

278 *Centrale Maths2 PSI 2023* Maxence Prieur

Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $N(x,y) = \int_0^1 |x - yt|\,dt$.

a. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

b. Tracer la courbe de $f : \left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = N(x,1)$.

c. Calculer $N(x,1)$ pour $x \in \mathbb{R}$. On pourra distinguer selon les valeurs de x.

d. Tracer le courbe de $g : [-1;1] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = N(x, \sqrt{1-x^2})$.

279 *Centrale Maths2 PSI 2023* Nathan Roy

À l'étape $n = 0$, on dispose d'une urne avec 1 boule blanche et 1 boule blanche.

À l'étape $n \in \mathbb{N}^*$, on tire une boule dans l'urne :

- si elle est blanche, on la remet dans l'urne et on rajoute 1 boule blanche et 1 boule noire dans l'urne.
- si elle est noire, on la remet dans l'urne et on rajoute 2 boules noires dans l'urne.

On note X_n le nombre de boules blanches à l'étape n.

Soit la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, $\dfrac{1}{(1-z)^{\frac{3}{2}}}$.

a. Calculer a_n pour $n \in \mathbb{N}$ et en donner un équivalent quand n tend vers $+\infty$.

b. Écrire un programme de paramètre n et qui renvoie le nombre de boules blanches aux étapes $i \in [\![0;n]\!]$.

c. Répéter cette expérience 100 fois pour $n = 30$ et tracer la moyenne du nombre de boules blanches aux étapes $i \in [\![0;30]\!]$. Tracer aussi le carré de cette moyenne et faire une conjecture.

Pour $(n,r,s) \in \mathbb{N}^3$, on note $p_{n,r,s}$ la probabilité qu'il y ait r boules blanches et s boules noires dans l'urne à l'étape n. On définit $H(z,u,v) = \sum\limits_{(n,r,s)\in\mathbb{N}^3} p_{n,r,s} u^r v^s z^n$ dont on suppose l'existence si $|z| < 1$.

d. Que vaut $p_{n,r,s}$ si $r + s \neq 2n + 2$?

e. Que vaut $\dfrac{\partial H}{\partial u}(0,u,v)$?

f. Montrer que $\forall |z| < 1$, $\dfrac{\partial H}{\partial u}(z,1,1) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}(X_n) z^n$.

g. Montrer que $p_{n+1,r,s} = \dfrac{r-1}{2n+2} p_{n,r-1,s-1} + \dfrac{s-2}{2n+2} p_{n,r,s-2}$.

280 *Centrale Maths2 PSI 2023* Marie-Lys Ruzic

On s'intéresse aux solutions de l'équation différentielle (E) : $y'' = \dfrac{y}{1+x}$. Avant de commencer, on écrit *import numpy as np, import scipy.integrate as integr, import matplotlib.pyplot as plt.*

a. Pour $a \in \mathbb{R}$, montrer que (E) admet une unique solution f_a sur $]-1;+\infty[$ vérifiant $f_a(0) = 1$ et $f_a'(0) = a$.

b. Tracer la courbe représentative de f_0 sur $[-0,8;10]$.

On peut considérer que l'équation se met sous forme matricielle avec $X'(t) = f(X(t),t)$ avec $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$.

On peut s'aider du programme suivant :

```
def f(x,t):
   return np.array[... , ...]
U=np.arange(0,10.01,0.01)
T=np.arange(0,-0.801,-0.01)
X=integr.odeint(f,np.array[... , ...],U)
```

à compléter.

c. On pose $I_A = \displaystyle\int_0^A \frac{dt}{f_0(t)^2}$. Calculer numériquement de manière approchée I_{10}, I_{100}, I_{1000}. Que peut-on conjecturer sur $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{f_0(t)^2}$.

d. Étudier les variations de f_0^2 sur $]-1;+\infty[$. En déduire que $\forall t \in]-1;+\infty[$, $f_0(t) \geqslant 1$.

e. Donner la position relative de la courbe représentative de f_0 sur $]-1;+\infty[$ par rapport à sa tangente au point $(a, f_0(a))$ avec $a \in]-1;+\infty[$.

f. Montrer que la conjecture de la question **c.** est vraie.

281 *Centrale Maths2 PSI 2023* Elae Terrien

Pour $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$, on définit le résultant des polynômes P et Q, noté $\mathrm{Res}(P, Q)$, par la relation $\mathrm{Res}(P, Q) = \det(S(P, Q))$ avec $S(P, Q) = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & a_0 & \ddots & & \vdots & b_1 & b_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & a_0 & 0 & \vdots & \vdots & & b_0 \\ a_n & \vdots & & \vdots & a_0 & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_n & & \vdots & \vdots & b_m & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & 0 & b_m & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_n & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n & 0 & \cdots & 0 & b_m \end{pmatrix}$.

a. Écrire une fonction *Python* qui calcule le résultant de deux polynômes de degré 2.

b. Évaluer $\mathrm{Res}(X^2 - 2X + 1, X^2 + 1)$ et $\mathrm{Res}\big((X - 2)(X - 1), (X - 3)(X - 1)\big)$.

c. Conjecturer une condition nécessaire et suffisante de nullité de $\mathrm{Res}(P, Q)$.

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n, $Q \in \mathbb{C}[X]$ de degré m et l'application $\varphi : \mathbb{C}_{m-1}[X] \times \mathbb{C}_{n-1}[X] \to \mathbb{C}_{n+m-1}[X]$ définie par la relation $\varphi(U, V) = PU + QV$.

d. Montrer que φ est bien définie et qu'elle est linéaire.

e. Montrer que φ est injective si et seulement si P et Q n'ont aucune racine commune.

f. Montrer que $\mathcal{B} = \big((1, 0), \cdots, (X^{m-1}, 0), (0, 1), \cdots, (0, X^{n-1})\big)$ est une base de $\mathbb{C}_{m-1}[X] \times \mathbb{C}_{n-1}[X]$.

g. Montrer que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\varphi) = S(P, Q)$ où $\mathcal{B}' = (1, X, \cdots, X^{n+m-1})$.

h. Conclure quant à la conjecture émise en **c.**.

Pour $P \in \mathbb{C}[X]$, on définit le discriminant de P, noté $\mathrm{Dis}(P)$, par $\mathrm{Dis}(P) = \mathrm{Res}(P, P')$.

i. Montrer que P admet une racine au moins double si et seulement si $\mathrm{Dis}(P) = 0$.

j. Calculer $\mathrm{Dis}(P)$ pour $P = aX^2 + bX + c$.

282 *Centrale Maths2 PSI 2023* Chloé Vagner

Un ascenseur monte à partir du rez-de-chaussée, transporte n personnes et dessert p étages. Les personnes ont une probabilité uniforme de descendre à un étage, ceci de manière indépendante les unes des autres.
On note X le nombre d'arrêts de l'ascenseur. Pour $i \in [\![1; p]\!]$, on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si l'ascenseur s'arrête à l'étage i et 0 sinon.
On note $S_{a,b}$ le nombre de surjections d'un ensemble à a éléments dans un ensemble à b éléments.

a. Modéliser informatiquement la variable aléatoire X. Indication : utiliser *rd.randint(a,b,n)*.

b. Quelle loi suit la variable X_i pour $i \in [\![1; p]\!]$.

c. $X_1, \cdots, X_p$ sont-ils indépendants ?

d. Donner X en fonction de $X_1, \cdots, X_p$ et en déduire $\mathbb{E}(X)$.

e. Déterminer la limite de $\mathbb{E}(X)$ lorsque p tend vers $+\infty$.

f. Calculer $\mathbb{E}(X)$ numériquement grâce à 1000 expériences pour $n = 10$ et $p \in [\![3; 20]\!]$. Comparer avec la valeur théorique.

g. Exprimer la loi de X en fonction des entiers $S_{a,b}$.

h. En déduire une expression de $\mathbb{E}(X)$ avec des coefficients binomiaux.

PARTIE 10 : 2024

283 <u>*Centrale Maths2 PSI 2024*</u> Amélia Arangoits

Soit la fonction I définie par $I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^x}$.

a. Déterminer le domaine de définition D de I.

b. Écrire une fonction *I(x)* qui renvoie la valeur de $I(x)$.

c. Conjecturer les variations de I.

d. Calculer une valeur approchée de $I(2)$ avec la méthode des rectangles.

e. Montrer que $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^x}$ est intégrable sur $]1; +\infty[$ pour tout $x \in D$.

f. Montrer que I est de classe C^1 sur D.

g. Calculer les limites de I aux bornes de D.

284 <u>*Centrale Maths2 PSI 2024*</u> Yasmine Azzaoui et Jonathan Filocco

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $f : P \mapsto (X-a)(X-b)P' - nXP$.

a. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

b. Déterminer la matrice M de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

c. Écrire une fonction *matrice(n,a,b)* qui renvoie la matrice M.

d. Coder une fonction *propre(n,a,b)* qui renvoie les valeurs propres et les vecteurs propres de f.

e. Déterminer les éléments propres de f pour $n = 2, a = 1, b = 0$ et pour $n = 2, a = 1, b = -1$.

f. On impose ici $a \neq b$, déterminer les éléments propres de f. Est-ce que f est diagonalisable ?

Dans la suite de l'exercice, on prend $a = b$.

g. Déterminer les éléments propres de f. Est-ce que f est diagonalisable ?

h. Montrer l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} * & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & * \end{pmatrix}$.

i. Montrer que $(\mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]}, f, \cdots, f^n)$ est une base du commutant de f.

285 <u>*Centrale Maths2 PSI 2024*</u> Edward Bauduin

Un élève doit aller chercher sa convocation à l'IOGS. Il peut emprunter le chemin A avec une probabilité $p \in]0; 1[$ ou le chemin B avec une probabilité $1-p$. La durée de marche pour le chemin A (resp. B) suit une loi de Poisson de paramètre $a > 0$ (resp. $b > 0$). Soit T le temps mis par l'élève pour aller chercher sa convocation.

a. Justifier que $T(\Omega) = \mathbb{N}$.

b. Écrire une fonction *Python* qui prend pour paramètres p, a, b et qui renvoie le temps mis par l'élève pour aller chercher sa convocation.

c. Écrire un programme *Python* renvoyant la moyenne du temps mis par l'élève pour aller chercher sa convocation pour $N = 500$ simulations et $p \in \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right\}$ et $a = 5$, $b = 10$.

d. Expliquer pourquoi cette moyenne diminue avec p.

e. Donner une approximation de $\mathbb{E}(T)$ selon les valeurs de p. Quel théorème du cours vous l'assure ?

f. Déterminer la loi de T.

g. Donner la fonction génératrice de T, puis $\mathbb{E}(T)$ et $\mathbb{V}(T)$.

286 *Centrale Maths2 PSI 2024* Jules Campistron

Soit la famille des polynômes de HILBERT définis par $H_0 = 1$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ H_k = \dfrac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(X-j)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $L \in \mathbb{C}_n[X]$.

a. Écrire une fonction *hilbert(k)* qui calcule le polynôme H_k.

b. Comparer deux polynômes compliqués (???????????).

c. Montrer que $\exists(\alpha_0,\cdots,\alpha_n) \in \mathbb{C}^{n+1},\ L = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k H_k$.

On pose $U = \begin{pmatrix} L(0) \\ \vdots \\ L(n) \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$. Soit $T_n : C_n[X] \to \mathbb{C}_n[X]$ défini par $T_n(P) = P(X+1)$.

d. Donner la matrice M de T_n dans la base canonique de $\mathbb{C}_n[X]$.

e. Montrer que $U = M^T V$.

f. Expliciter les $\alpha_0,\cdots,\alpha_n$ en fonction de $L(0),\cdots,L(n)$.

g. Montrer que si $P \in C[X]$ vérifie $L(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$, alors il existe une famille $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ à support fini d'entiers relatifs telle que $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k H_k$.

287 *Centrale Maths2 PSI 2024* Tristan Cheyrou

Soit $f :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ à laquelle on associe, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto f\left(\dfrac{x}{n}\right)$.

a. Écrire un script *Python* pour afficher les premiers termes de $(f_n)_{n\geqslant 1}$ pour $f : x \mapsto \sqrt{x}$, $f : x \mapsto e^x$, $f : x \mapsto \ln(x)$ ou $f : x \mapsto \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Que peut-on conjecturer sur la convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $\mathbb{R}_+$?

On suppose pour les trois prochaines questions que f admet une limite finie en 0.

b. Montrer que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. Soit $a > 0$ et $I_a =]0;a]$, montrer que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur I_a.

d. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$.

On suppose dorénavant que $f : [0;+\infty[\to \mathbb{R}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$.

e. Écrire une fonction *Python* pour tracer les premières sommes partielles $S_n : x \mapsto \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ pour les fonctions $f : x \mapsto \cos(x)$, $f : x \mapsto \sin(x)$ ou $f : x \mapsto 1-\cos(x)$.

f. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\sum_{k\geqslant 1} f_k(x)$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

288 *Centrale Maths2 PSI 2024* Armand Coiffe et Clément Reiner

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = (2x^2+3y^2)e^{-(x^2+y^2)}$.

Pour $R > 0$, on définit $D_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqslant R^2\}$.

a. Tracer la surface d'équation $z = f(x,y)$ avec *Python* pour $(x,y) \in [-2;2]^2$.

b. Montrer l'existence d'un minimum de f sur $\mathbb{R}^2$ et le calculer.

c. Montrer que $\forall a > 0,\ \exists R_a > 0,\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus D_{R_a},\ f(x,y) \leqslant a$.

d. Montrer que f admet un maximum sur $\mathbb{R}^2$ et le calculer.

e. Montrer qu'il n'existe pas d'extremum local sur $\mathbb{R}^2 \setminus D_{R_a}$ pour un a à déterminer.

f. Tracer avec *Python* les lignes de niveaux $\Gamma_c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = c\}$ pour tous les réels c tels que $c \in \{0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.75, 0.8\}$.

289 *Centrale Maths2 PSI 2024* Axel Corbière

a. Justifier que $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$ converge si $u_n = \dfrac{1}{64^n}\left(\dfrac{1}{6n+1} + \dfrac{3}{2(6n+2)} + \dfrac{1}{4(6n+3)} - \dfrac{1}{8(6n+5)}\right)$.

b. Donner une valeur approchée de sa somme $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.

c. Donner une valeur approchée de $2I$ avec $I = \displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1 - x + x^2}{1 - x^2}\,dx$ après avoir justifié l'existence de I.

d. Conjecturer une relation entre S et I.

e. Déterminer les valeurs exactes de $I_1 = \displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{1 - x + x^2}\,dx$, $I_2 = \displaystyle\int_0^{1/2} \frac{x}{1 - x + x^2}\,dx$ et $I_3 = \displaystyle\int_0^{1/2} \frac{x}{1 - x^2}\,dx$.

f. Trouver $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{Z}^3$ et $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que $\alpha I_1 + \beta I_2 + \gamma I_3 = \dfrac{\pi}{a\sqrt{b}}$.

g. Développer $(1 - x^2)(1 - x + x^2)(1 + x + x^2)$ et en déduire un polynôme P tel que $\dfrac{\pi}{a\sqrt{b}} = \displaystyle\int_0^{1/2} \frac{P(x)}{1 - x^6}\,dx$.

290 *Centrale Maths2 PSI 2024* Mathéo Demongeot-Marais

Pour $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on note $s_{n,m}$ le nombre de surjections de $[\![1; n]\!]$ dans $[\![1; m]\!]$.

Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on note R_m le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{s_{n,m}}{n!} z^n$ et $S_m : z \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} s_{n,m} z^n$ sa fonction somme associée.

a. Donner $s_{n,1}$, $s_{n,n}$ et $s_{n,m}$ pour $n < m$.

b. Majorer $s_{n,m}$ et en déduire que $R_m = +\infty$.

c. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall m \in \mathbb{N}^*,\ s_{n,m+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k} s_{n-k,m}$.

d. En déduire que $\forall z \in \mathbb{C},\ \forall m \in \mathbb{N}^*,\ S_m(z) = (e^z - 1)^m$.

e. Avec *Python*, calculer $s_{n,m}$ pour $n = 10$ et $m \in [\![1; 10]\!]$.

291 *Centrale Maths2 PSI 2024* Armand Dépée

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0; 1]$, on note $P_n(x) = x \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 - \dfrac{x}{k}\right)$.

a. Réaliser une fonction *P(n,x)* qui renvoie la valeur de $P_n(x)$.

b. Tracer *P(n,x)* sur l'intervalle $[0; 1]$ pour n allant de 1 à 10, le tout sur le même graphique. Que peut-on conjecturer pour la suite de fonctions $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

c. Réaliser la fonction *Max(n)* qui renvoie avec une précision de 10^{-3} l'abscisse x_n qui correspond au maximum de $x \mapsto P(n, x)$. En calculant $x_n \ln(n)$ pour $n = 10^k$ et $k \in [\![1; 5]\!]$, que peut-on conjecturer ?

d. Montrer que la fonction P_n admet sur $[0; 1]$ son maximum en un unique réel x.

e. En utilisant $\ln(P_n(x))$, montrer que $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \leqslant \dfrac{1}{x_n} \leqslant \dfrac{1}{1 - x_n} \sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{k}$.

f. En déduire un équivalent de x_n quand n tend vers $+\infty$.

g. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall u \in [0; 1[,\ |2\ln(1 - u)| \leqslant Cu^2$.

h. En déduire un équivalent de $P_n(x_n)$ quand n tend vers $+\infty$.

i. Conclure quant à la conjecture de la question **b**.

292 *Centrale Maths2 PSI 2024* Olivier Farje

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 et de $2n \geqslant 2$ boules numérotées de 1 à $2n$. Soit $r \in [\![0;2n]\!]$, initialement les boules numérotées de 1 à r sont dans l'urne U_1 et celles numérotées de $r+1$ à $2n$ sont dans l'urne U_2. On réalise successivement des tirages de la manière suivante :

- on choisit au hasard un entier i entre 1 et $2n$.
- si i correspond au numéro d'une boule de l'urne U_1, on la retire et on la met dans l'urne U_2.
- si i correspond au numéro d'une boule de l'urne U_2, on la retire et on la met dans l'urne U_1.

Pour $p \in \mathbb{N}$, on note X_p le nombre de boules dans l'urne U_1 après p lancers. On convient que $X_0 = r$. On note G_p la fonction génératrice de X_p.

a. Écrire une fonction *jeu(n,r,p)* qui modélise l'expérience et qui renvoie le nombre de boules dans l'urne U_1 après p opérations. Indication : on pourra utiliser *L.remove(i)*.

b. En déduire une valeur approchée de l'espérance de X_p pour $n = 9$ et $r = 4$.

c. Tracer un graphe donnant l'espérance de X_p selon la valeur de p, pour différentes valeurs de r. Conjecturer.

d. Déterminer $\mathbb{E}(X_1)$ en fonction de n et r. Cela marche-t-il pour les valeurs limites de r ?

e. Soit $p \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![1;2n-1]\!]$, montrer que $\mathbb{P}(X_{p+1} = k) = \dfrac{2nk+1}{2n}\mathbb{P}(X_p = k-1) + \dfrac{k+1}{2n}\mathbb{P}(X_p = k+1)$.

f. Montrer que $\forall s \in \mathbb{R},\ G_{p+1}(s) = sG_p(s) + \dfrac{1}{2n}G'_p(s)$.

293 *Centrale Maths2 PSI 2024* Thomas Favant

On dit qu'une famille $(v_1, \cdots, v_{n+1}) \in (\mathbb{R}^n)^{n+1}$ de $(n+1)$ vecteurs de $\mathbb{R}^n$ euclidien canonique est équinégative lorsque $\forall (i,j) \in [\![1;n+1]\!]^2,\ ||v_i|| = ||v_j||$ et $(v_i|v_j) = -1$.

a. Trouver (v_1, v_2, v_3) équinégative dans $\mathbb{R}^2$. Indication : utiliser le centre d'un triangle équilatéral.

Pour une famille $(v_1, \cdots, v_{n+1}) \in (\mathbb{R}^n)^{n+1}$, on note $M \in \mathcal{M}_{n,n+1}(\mathbb{R})$ la matrice des coordonnées de ces vecteurs dans la base canonique (celles du vecteur v_j se trouvent dans la colonne j) et $\Psi(M) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que $[\Psi(M)]_{i,j} = (v_i|v_j)$.

b. Écrire une fonction *psi(M)* qui renvoie la matrice $\Psi(M)$.

c. Tester la fonction *psi(M)* sur une matrice $M \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$. Trouver les éléments propres de $\Psi(M)$.

d. En vous aidant de la matrice M, construire une famille équinégative (v_1, v_2, v_3, v_4) de $\mathbb{R}^3$.

294 *Centrale Maths2 PSI 2024* Émile Gauvrit

Soit $A = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 13 & 7 & 4 \\ 7 & 13 & 4 \\ 4 & 4 & 10 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a. Montrer que $(E)\ :\ Ax = b$ admet une unique solution x_0 que vous déterminez.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $u_0 \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \alpha(b - Au_n)$.

b. Écrire une fonction prenant en argument u_0, α, n et qui renvoie $[u_0, \cdots, u_n]$.

c. Afficher l'évolution de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ pour différentes valeurs de α avec $u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Faire cette étude pour d'autres valeurs de u_0.

d. La matrice A est-elle diagonalisable ? Quelles sont ses valeurs propres ?

e. Si la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge, déterminer sa limite.

f. Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty}(I_3 - \alpha A)^n = 0$.

g. En déduire pour quelles valeurs de α la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge pour toute valeur de u_0.

295 *Centrale Maths2 PSI 2024* Lucie Girard

Un jeune homme a un paquet de chewing-gums dans chacune de ses poches (droite et gauche), contenant chacun N chewing-gums. Quand l'envie lui prend de mâcher, il prend au hasard un paquet dans l'une de ses deux poches et en retire un chewing-gum. On note X la variable aléatoire qui, lorsque le jeune homme choisit une boîte vide, donne le nombre de chewing-gums restants dans l'autre boîte.

a. Écrire une fonction qui modélise l'expérience, de paramètre N, et qui renvoie la valeur de X.

b. Calculer la moyenne des résultats sur une centaine d'expériences pour $N = 10$.

c. Tracer le graphe donnant X pour $N \in [\![1;10]\!]$.

On suppose que l'expérience s'arrête dès que le jeune homme s'aperçoit qu'une des deux boîtes est vide. On modélise l'univers Ω comme l'ensemble des $\omega = (\omega_1, \cdots, \omega_k)$ où k peut varier en fonction de la durée de l'expérience et où les ω_i valent G ou D selon qu'on prend le paquet dans la poche Gauche ou Droite.

d. Donner les évènements (sous la forme ω) et leurs probabilités dans les cas suivants :

- le jeune homme prend toujours dans sa poche gauche.
- le jeune homme prend une fois dans sa poche gauche, puis une fois dans sa poche droite, etc....
- le jeune homme prend N fois dans sa poche gauche, puis toujours dans sa poche droite.

e. Déterminer la loi de X.

f. Trouver, pour $k \in [\![1; N-1]\!]$, une relation entre $\mathbb{P}(X = k)$ et $\mathbb{P}(X = k+1)$.

g. En déduire la valeur de $\mathbb{E}(X)$.

Soit Y la variable aléatoire qui donne le nombre de chewing-gums restant dans l'autre boîte quand l'une des deux boîtes est vide pour la première fois.

h. Donner la loi et l'espérance de Y.

296 *Centrale Maths2 PSI 2024* Valentine Girard

Pour un réel, on pose $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x}{n^2 + x^2}$ et $G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{e^t - 1} dt$.

a. Écrire une fonction *S(N,x)* qui calcule la somme partielle $S_N(x) = \sum_{k=1}^{N} \dfrac{x}{k^2 + x^2}$.

b. Déterminer le domaine de définition D et la parité de F.

c. La fonction F est-elle continue sur D ? Et de classe C^1 ?

d. Écrire une fonction *F(x)* qui calcule $F(x)$ à 10^{-3} près. Indication : trouver une condition sur N pour que la somme partielle $S_N(x)$ approche $F(x)$ à 10^{-3} près.

e. Tracer F sur $[-2; 2]$.

f. Déterminer le domaine de définition D' de G.

g. Montrer que G est de classe C^∞ sur D'.

h. Écrire une fonction *G(x)* qui calcule $G(x)$.

i. Tracer F et G sur $[-2; 2]$ sur le même graphe. Que peut-on conjecturer ?

j. Montrer la conjecture de la question précédente.

297 *Centrale Maths2 PSI 2024* Lou Goiffon

On lance n boules dans N urnes numérotées de 1 à N. Chaque boule a une probabilité $\frac{1}{N}$ de tomber dans l'urne $k \in [\![1;N]\!]$. Pour $i \in [\![1;n]\!]$, on note T_i la variable aléatoire qui compte le nombre d'urnes non vides après avoir lancé la i-ème boule.

a. Écrire une fonction *remplir(n,N)* qui modélise tous ces lancers et qui renvoie une liste dont le k-ième élément donne le nombre de boules tombées dans l'urne k.

b. Écrire une fonction *nonvide(n,N)* qui renvoie le nombre d'urnes non vides après le lancer des n boules. Que remarquez-vous pour n très grand et $N = 10$.

c. Donner les valeurs prises par T_n selon que $n \leqslant N$ ou $n > N$.

d. Déterminer les lois de T_1, T_2.

e. Donner les valeurs de $\mathbb{P}(T_n = 1)$, $\mathbb{P}(T_n = 2)$ et $\mathbb{P}(T_n = n)$ selon que $n \leqslant N$ ou $n > N$.

On suppose dans la suite que $n \geqslant 2$.

f. Montrer que $\mathbb{P}(T_{n+1} = k) = \frac{k}{N}\mathbb{P}(T_n = k) + \frac{N-k+1}{N}\mathbb{P}(T_n = k-1)$.

On définit $G_n : t \mapsto \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T_n = k)t^k$ la fonction génératrice associée à T_n.

g. Montrer que $G_{n+1}(t) = \frac{t-t^2}{N}G_n'(t) + tG_n(t)$.

Soit, pour $k \in [\![1;N]\!]$, la variable X_k qui vaut 1 si l'urne numéro k est vide à la fin des n lancers et 0 sinon.

h. Donner la loi de X_k.

i. Calculer de deux manières la valeur de $\mathbb{E}(T_n)$: avec la question **g.** ou la question **h.**.

298 *Centrale Maths2 PSI 2024* Nathan Jung et Maxime Plottu

On note d_n le nombre de diviseurs positifs de n, $D_n = \sum\limits_{k=1}^{n} d_k$ et $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]-1;1[$, on pose $f_n(x) = \frac{x^n}{1-x^n}$.

a. Écrire deux fonctions d'argument n donnant D_n et H_n.

b. En comptant les points de $(\mathbb{N}^*)^2$ sous la courbe $\mathcal{H}$: $xy = n$, montrer que $D_n \underset{+\infty}{=} nH_n + O(n)$.

c. En déduire un équivalent de D_n et vérifier cet équivalent avec *Python*.

d. Pour $x \in]-1;1[$, calculer $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} H_n x^n$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} nH_n x^n$.

e. Montrer que $\sum\limits_{n \geqslant 1} f_n$ converge simplement (vers f) sur $]-1;1[$ et que la fonction f est continue sur $]-1;1[$.

299 *Centrale Maths2 PSI 2024* Mathis Laruelle

Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi, ayant la même espérance μ et la même variance σ^2. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les variables $M_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ et $V_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k - M_n)^2$.

a. Déterminer les espérances de M_n et V_n.

b. Écrire un programme pour calculer, pour $n \geqslant 2$, M_n et $\frac{nV_n}{n-1}$ en fonction de n et $\lambda > 0$ sachant que les X_k suivent la loi de Poisson de paramètre λ.

c. Trouver des réels a, b, c, d tel que $X^3 = a + bX + cX(X-1) + dX(X-1)(X-2)$. En déduire $\mathbb{E}(X_1^3)$.

d. Faire de même pour calculer $\mathbb{E}(X_1^4)$.

300 <u>*Centrale Maths2 PSI 2024*</u> Guillaume Leduc

Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$.

a. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est bijective (on précisera sur quel intervalle).

b. Montrer que pour tout réel x, il existe un unique réel $y(x)$ tel que $\int_x^{y(x)} e^{t^2} dt = 1$.

c. Écrire une fonction prenant en argument x et y et renvoyant $\int_x^y e^{t^2} dt$.

d. Écrire une fonction prenant en argument x et renvoyant $y(x)$ à 10^{-2} près.

e. Tracer la courbe de la fonction y sur l'intervalle $[-10; 10]$.

f. Montrer que y est monotone et dérivable sur $\mathbb{R}$.

301 <u>*Centrale Maths2 PSI 2024*</u> Martin Mayot

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admettant n valeurs propres distinctes notées $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ et $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ un polynôme tel que $\forall i \in [\![1; n]\!],\ f(\lambda_i) = P(\lambda_i)$. On définit alors $f(A)$ par $f(A) = P(A)$.

a. Montrer que cette définition de $f(A)$ ne dépend par du polynôme P vérifiant ces conditions.

Pour $N \in \mathbb{N}$, on pose $S_N(A) = \sum_{k=0}^{N} \frac{A^k}{k!}$ et $E(A) = \lim_{N \to +\infty} S_N(A)$.

b. Écrire une fonction *Test(A)* qui détermine si une matrice est à valeurs propres simples ou non.

c. Écrire une fonction *eval(P,A)* qui renvoie $P(A)$.

d. Écrire une fonction *partiel(N,A)* qui renvoie $S_N(A)$.

e. Écrire une fonction *exp(A)* qui vérifie d'abord si A est à valeurs propres simples et qui renvoie $f(A)$ si $f = \exp$ si c'est le cas.

f. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que $\forall i \in [\![1; n]\!],\ P(\lambda_i) = f(\lambda_i)$.

Pour $j \in [\![1; n]\!]$, on pose $\Pi_j = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \frac{X - \lambda_i}{\lambda_j - \lambda_i}$.

g. Montrer que $\Pi_j(A)$ est une matrice de projecteur.

h. Identifier les éléments propres du projecteur $\Pi_j(A)$.

302 <u>*Centrale Maths2 PSI 2024*</u> Antoine Métayer

Soit $A = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$ (matrices à trouver telles que $AB - BA = B$).

a. Calculer $AB^k - B^kA$ et kB^k pour $k \in [\![0; 6]\!]$. Conjecturer.

b. Si une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente d'indice p, quelles sont les valeurs propres possibles de B ? En déduire que l'on a $B^n = 0$.

c. Écrire un programme *nilpotente(M)* qui renvoie *False* si M n'est pas nilpotente et *True,p* si elle est nilpotente avec p son indice de nilpotence.

d. Montrer que $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2,\ \mathrm{Tr}\,(AB) = \mathrm{Tr}\,(BA)$.

On suppose dans la suite que $AB - BA = B$ avec $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$.

e. Montrer que B n'est pas inversible.

f. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N},\ AB^k - B^kA = kB^k$.

g. En déduire que B est nilpotente. Indication : considérer $\varphi : M \mapsto AM - MA$.

303 *Centrale Maths2 PSI 2024* Romane Mioque

Soit la fonction f définie par $f : x \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)$ en notant $f_k(x) = \dfrac{x^k}{1-x^k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Soit aussi la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, et enfin β la racine négative de $X^2 - X - 1$.

a. Justifier que f est bien définie et de classe C^1 sur $]-1;1[$.

b. Écrire une fonction *partiel(n,x)* en coût linéaire par rapport à n qui renvoie $\sum_{k=1}^{n} f_k(x)$.

c. Écrire une fonction *Python* qui renvoie la valeur approchée de $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{F_{2k}}$.

d. Exprimer F_n en fonction de n et de β.

304 *Centrale Maths2 PSI 2024* Mathias Pisch

Dans un espace euclidien E, on dit qu'une famille $\mathcal{F} = (v_1, \cdots, v_n)$ de vecteurs de E est équinégative si elle vérifie $\forall((i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ ||v_i|| = ||v_j||$ et $(v_i|v_j) = -1$ si $i \neq j$.

a. Trouver une famille équinégative $\mathcal{F}_3 = (v_1, v_2, v_3)$ de trois vecteurs dans l'espace $\mathbb{R}^2$ euclidien canonique. Indication : on pourra s'aider d'un triangle équilatéral.

Pour $M \in \mathcal{M}_{n,n+1}(\mathbb{R})$, en notant $v_1, \cdots, v_{n+1}$ les $n+1$ vecteurs de $\mathbb{R}^n$ qui composent les colonnes de M, on définit $\Psi(M) = A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n+1} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ avec $a_{i,j} = (v_i|v_j)$.

b. Coder la fonction Ψ.

Soit $M = \sqrt{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

c. Calculer $\Psi(M)$.

d. Déterminer les valeurs propres de $\Psi(M)$.

e. Trouver une famille équinégative $\mathcal{F}_4 = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ de $\mathbb{R}^3$.

305 *Centrale Maths2 PSI 2024* Eva Rojo

On dit qu'un polynôme $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ est auto-inverse s'il existe $\alpha \in \mathbb{C}^*$ tel que $\forall k \in [\![0;d]\!],\ a_k = \alpha\ \overline{a_{d-k}}$.

a. Écrire une fonction *Python* qui prend en argument un polynôme P et qui renvoie *True* s'il est auto-inverse. Indication : utiliser *conjugate*.

b. Pour $d \in \{5, 10, 100\}$, vérifier si $S_d = \sum_{k=0}^{2d} (k-d)X^k$ est auto-inverse. Que vaut le module des racines de ces trois polynômes. Indication : utiliser *roots*.

c. Si $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ est auto-inverse pour $\alpha \in \mathbb{C}^*$, montrer que $P(0) \neq 0$ et $|\alpha| = 1$.

d. Pour $P \in \mathbb{C}[X]$, montrer que P est auto-inverse $\iff \left(\exists\alpha \in \mathbb{U},\ \forall x \in \mathbb{C}^*,\ P(x) = \alpha\, x^{-d} P\left(\frac{1}{x}\right)\right)$.

e. Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ de degré n et $\alpha \in \mathbb{U}$, on pose $R = X^{-n}Q(X) + \alpha X^{n-d}\overline{Q}\left(\dfrac{1}{X}\right)$. Montrer que R est auto-inverse et donner son degré.

306 *Centrale Maths2 PSI 2024* Adrien Saugnac

Soit la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$.

a. Tracer le graphe de f sur $]0;1[$, puis sur $]1;3[$ à l'aide de *Python*. Proposer des conjectures.

b. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.

c. Montrer que $\forall x \in]1;2[,\ x\ln(2) \leqslant f(x) \leqslant x^2\ln(2)$.

d. En déduire que f est prolongeable par continuité en 1.

On note toujours f la fonction ainsi prolongée à $\mathbb{R}_+^*$.

e. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

f. Où se trouve le graphe de f par rapport à ses tangentes ?

g. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

307 *Centrale Maths2 PSI 2024* Arya Tabrizi

a. Écrire une fonction qui prend en argument $p = (p_1, \cdots, p_m) \in (\mathbb{R}_+)^m$ tel que $p_1 + \cdots + p_m = 1$ et qui renvoie le spectre de $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant m} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ définie par $a_{i,j} = p_i(1-p_i)$ si $i = j$ et $a_{i,j} = -p_ip_j$ sinon.

b. Conjecturer si $A \in S_m^+(\mathbb{R})$, si $A \in S_m^{++}(\mathbb{R})$, sur rang (A) selon le nombre de p_k qui sont nuls.

Pour $p = (p_1, \cdots, p_m) \in (\mathbb{R}_+)^m$ tel que $p_1 + \cdots + p_m = 1$, soit U une variable aléatoire dont l'univers image est $U(\Omega) = \{1, \cdots, m\}$ et qui vérifie $\forall i \in [\![1;m]\!],\ \mathbb{P}(U = i) = p_i$ et les variables aléatoires $X_1, \cdots, X_m$ telles que $X_i = 1$ si $U = i$ et $X_i = 0$ sinon.

c. Déterminer la loi de X_i pour $i \in [\![1;m]\!]$. Quelle est son espérance, sa variance ?

d. Pour $(i,j) \in [\![1;m]\!]^2$ tel que $i \neq j$, calculer $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$.

e. Soit $Y_1, \cdots, Y_m$ des variables aléatoires ayant des espérances finies et $M = \big(\mathrm{Cov}(X_i, X_j)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant m} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$. Montrer que $M \in S_m^+(\mathbb{R})$.

f. Faire le lien avec les questions **a.** et **b.** et expliquer ainsi l'appartenance de A à $S_m^+(\mathbb{R})$ ou à $S_m^{++}(\mathbb{R})$.

g. Soit $G \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ et $r \in [\![0;m]\!]$, montrer que $(G \in S_m^+(\mathbb{R})$ et rang $(G) = r) \iff (\exists P \in \mathcal{M}_{r,m}(\mathbb{R}),\ G = P^TP)$.

308 *Centrale Maths2 PSI 2024* Guilhem Thébault

On définit la fonction J par $J(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(x\sin(\theta))d\theta$ si $x \in \mathbb{R}$ et on s'intéresse à ces zéros, les réels en lesquels elle s'annule. On définit aussi la fonction $F : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ par $F(x) = \sqrt{x}\,J(x)$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note aussi $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n(\theta)d\theta$.

On considère l'équation différentielle $(E)\ :\ xy'' + y' + xy = 0$.

a. Tracer le graphe de J sur l'intervalle $[-10;10]$.

b. Montrer que $\forall n \geqslant 2,\ nI_n = (n-1)I_{n-2}$.

c. En déduire la valeur de I_n en fonction de n.

d. Montrer que J est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et donner les coefficients de son développement.

e. Tracer le graphe de J à l'aide des 100 premiers termes du développement.

f. Tracer le graphe de la solution de (E) qui vérifie $y(0) = \frac{\pi}{2}$ et $y'(0) = 0$.

g. Vérifier que J est solution de (E).

h. Trouver une équation différentielle vérifiée par F sur $\mathbb{R}_+^*$.

i. On note $G(x) = \sin(x)$. Montrer que $F''(x)G(x) - F(x)G''(x) = -\dfrac{4F(x)G(x)}{x^2}$.

309 *Centrale Maths2 PSI 2024* Antoine Vergnenègre

Soit deux réels strictement positifs a et b et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$, $u_1 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1} + a}{u_n + b}$.

a. Pour a et b fixés, afficher le comportement de la suite pour différentes valeurs de u_0, u_1.

b. Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 3}$ est majorée en exploitant l'expression de u_{n+3} en fonction de u_n et u_{n+1}.

Indication : étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x+a}{x+b}$.

c. Montrer de même que la suite $(u_n)_{n\geqslant 5}$ est minorée par un réel strictement positif.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $\alpha_n = \operatorname*{Sup}_{k\geqslant n}(u_k)$ et $\beta_n = \operatorname*{Inf}_{k\geqslant n}(u_k)$.

d. Montrer que les deux suites $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ et $(\beta_n)_{n\geqslant 0}$ sont bien définies et qu'elles convergent.

On note α_∞ (resp. β_∞) la limite de la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ (resp. $(\beta_n)_{n\geqslant 0}$) et on suppose que $b > 1$.

e. Montrer que $\alpha_\infty \leqslant \dfrac{\alpha_\infty + a}{\beta_\infty + b}$ et que $\beta_\infty \geqslant \dfrac{\beta_\infty + a}{\alpha_\infty + b}$.

f. En déduire que $\alpha_\infty = \beta_\infty$ et que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge.