CHAPITRE 1 INTÉGRATION

PARTIE 1.1 : FONCTION CONTINUE PAR MORCEAUX

DÉFINITION 1.1 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, *on dit que* $\sigma = (a_0, a_1, \cdots, a_n)$ *est une* **subdivision** *de* $[a;b]$ *si on a les inégalités strictes* $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b$. σ *est dite une* **subdivision régulière** *si :* $\forall k \in [\![0;n]\!],\ a_k = a + k\left(\dfrac{b-a}{n}\right)$.
Soit $f : [a;b] \to \mathbb{K}$, *on dit que* f *est une* **fonction continue par morceaux** *s'il existe une subdivision* σ *de* $[a;b]$ *telle que :* $\forall k \in [\![0;n-1]\!]$, f *est continue sur* $]a_k;a_{k+1}[$ *et* f *admet une limite finie à droite en* a_k *et à gauche en* a_{k+1} *de sorte qu'il existe, pour tout* $k \in [\![0;n-1]\!]$, *une fonction* <u>*continue*</u> $g_k : [a_k;a_{k+1}] \to \mathbb{K}$ *telle que* $\forall x \in]a_k;a_{k+1}[,\ g_k(x) = f(x)$. *On dit alors que* σ *est une* **subdivision adaptée** *à* f.
Soit I *un intervalle réel et* $f : I \to \mathbb{K}$. *On dit que* f *est continue par morceaux sur* I *si elle l'est sur chaque segment inclus dans* I. *On note* $C^0_m(I, \mathbb{K})$ *l'ensemble des fonctions continues par morceaux de* I *dans* $\mathbb{K}$.

<u>*REMARQUE 1.1*</u> *:* • *Si* f *continue par morceaux sur* $[a;b]$, $|f|$ *l'est aussi. Si* g *est aussi continue par morceaux sur* $[a;b]$ *et* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *et* $f^+ = (|f|+f)/2$, $f^- = (|f|-f)/2$, $|f|$, $\sup(f,g)$, $\mathrm{Inf}(f,g)$ *le sont aussi.*
• *Toute fonction* $f : [a;b] \to \mathbb{K}$ *continue par morceaux sur un segment est bornée ce qui nous permet de définir* $||f||_\infty = \underset{t\in[a;b]}{\mathrm{Sup}} |f(t)|$ *; mais elle n'atteint pas forcément ses bornes.*
• *Une fonction continue par morceaux sur un intervalle quelconque peut posséder une infinité de points de discontinuité et peut ne pas être bornée.*

DÉFINITION 1.2 :
Soit $f : [a;b] \to \mathbb{K}$ *continue par morceaux, avec les notations de la définition précédente, on définit l'***intégrale de** f **entre** a **et** b, *notée* $\displaystyle\int_a^b f$, *la quantité* $\displaystyle\int_a^b f = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{[a_k;a_{k+1}]} g_k$.
Si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *et* $f \in C^0_m(\widetilde{[a;b]}, \mathbb{R})$, *on définit* $\displaystyle\int_a^b f = -\int_b^a f$ *si* $a > b$ *et* $\displaystyle\int_a^a f = 0$ *si* $a = b$.

<u>*REMARQUE 1.2*</u> *:* • *La valeur de cette intégrale ne dépend pas de la subdivision adaptée à* f.
• *Cette définition (encore une aire dans le cas réel) généralise l'intégrale de sup. (*$\sigma = (a,b)$ *adaptée).*
• *Si* $f : [a;b] \to \mathbb{C}$ *est continue par morceaux, on a encore* $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b \mathrm{Re}(f) + i\int_a^b \mathrm{Im}(f)$.

THÉORÈME 1.1 :
Soit $a \in I$ **et** $f : I \to \mathbb{K}$ **continue, alors la fonction** $F : I \to \mathbb{K}$ **définie par :** $\forall x \in I,\ F(x) = \displaystyle\int_a^x f$ **est de classe** C^1 **et c'est la primitive de** f **s'annulant en** a **:** $F' = f$ **et** $F(a) = 0$.
Soit $f : \widetilde{[a;b]} \to \mathbb{K}$ **continue et** F **une des primitives de** f **sur** $\widetilde{[a;b]}$ **:** $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$.

<u>*REMARQUE 1.3*</u> *:* • *Soit* $f : I \to \mathbb{K}$ *une fonction de classe* C^1, *alors si* $(a,x) \in I^2,\ f(x) = f(a) + \displaystyle\int_a^x f'(t)dt$.
• *Si* $f : I \to \mathbb{K}$ *continue et* $u, v : J \to I$ *dérivables, alors l'application* $G : J \to \mathbb{K}$ *est dérivable si elle est définie par :* $\forall x \in J,\ G(x) = \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$ *et on a :* $\forall x \in J,\ G'(x) = v'(x)f\big(v(x)\big) - u'(x)f\big(u(x)\big)$.

THÉORÈME 1.2 :
Si $f \in C^0_m(\widetilde{[a;b]}, \mathbb{C})$ **:** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(b-a)}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\Big(a + k\big(\frac{b-a}{n}\big)\Big) = \lim_{n\to+\infty} \frac{(b-a)}{n} \sum_{k=1}^{n} f\Big(a + k\big(\frac{b-a}{n}\big)\Big) = \int_a^b f(t)dt$.

THÉORÈME ÉNORME 1.3 :
Soit $u, v : [\widetilde{a;b]} \to \mathbb{K}$ **de classe** C^1**, alors :** $\displaystyle\int_a^b u'(t)v(t)dt = \big[u(t)v(t)\big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt.$
Si $f : [\widetilde{a;b]} \to \mathbb{K}$ **est de classe** C^{n+1} **:** $\displaystyle f(b) = f(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$
Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ **et** $\varphi : [\widetilde{a;b]} \to \mathbb{R}$ **de classe** C^1 **et** $f : I \to \mathbb{K}$ **continue (avec** $\varphi\big([\widetilde{a;b]}\big) \subset I$**), alors par changement de variable (**$t = \varphi(u)$**) :** $\displaystyle\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt = \int_a^b f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)du.$

THÉORÈME ÉNORME 1.4 :
Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ **(**$\alpha < \beta$**),** $(f, g) \in C_m^0([\alpha;\beta], \mathbb{C})^2$**,** $(a, b, c) \in [\alpha, \beta]^3$**,** $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ **:**

- $\displaystyle\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$ **(linéarité).** • $\displaystyle\int_a^b f = -\int_b^a f$ **et** $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ **(**Chasles**).**
- $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leqslant \left|\int_a^b |f|\right| \leqslant |b-a| \, ||f||_\infty$ **et** $\displaystyle\left|\int_a^b fg\right| \leqslant ||f||_\infty \left|\int_a^b |g|\right|$ **(inégalité de la moyenne).**
- $\displaystyle\left|\int_a^b fg\right| \leqslant \sqrt{\left|\int_a^b |f|^2\right|}\sqrt{\left|\int_a^b |g|^2\right|}$ **(inégalité de** Cauchy-Schwarz**).**

Si f **réelle et** $a < b$**,** $\displaystyle f \geqslant 0 \Longrightarrow \int_a^b f \geqslant 0$ **(positivité) et** $\displaystyle f \leqslant g \Longrightarrow \int_a^b f \leqslant \int_a^b g$ **(croissance).**

PARTIE 1.2 : INTÉGRALES CONVERGENTES

DÉFINITION 1.3 :
• *Soit* $a \in \mathbb{R}$, $a < b$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *et* $f \in C_m^0([a;b[, \mathbb{K})$, *si* $\displaystyle x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ *admet une limite finie en* b^-, *on dit que* $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ **converge** *(divergente sinon) et on définit* $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)dt$ *(idem sur* $]a;b]$*).*
• *Soit* $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$, $f \in C_m^0(]a;b[, \mathbb{K})$, *on dit que* $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ **converge** *(divergente sinon) s'il existe* $c \in]a;b[$ *tel que* $\displaystyle\int_a^c f(t)dt$ <u>*et*</u> $\displaystyle\int_c^b f(t)dt$ *convergent. Dans ce cas, on définit* $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$

<u>*REMARQUE 1.4*</u> *:*

- *Si* $f \in C_m^0([a;b[, \mathbb{K})$, $a' \in]a;b[$ *:* $\displaystyle\int_a^b f$ *converge* $\Longleftrightarrow$ $\displaystyle\int_{a'}^b f$ *converge. Dans ce cas* $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^{a'} f + \int_{a'}^b f.$
- *Si* $I =]a;b[$, *nature et valeur de* $\displaystyle\int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$ *sont indépendantes de* $c \in]a;b[$.
- *La convergence de* $\displaystyle\int_I f$ *équivaut à l'existence de limites finies d'une (donc de toute) "primitive"* F *de* f *aux bornes de* $I =]a;b[$ *(par exemple). Dans ce cas* $\displaystyle\int_I f = [F(x)]_a^b = \lim_{x \to b^-} F(x) - \lim_{x \to a^+} F(x).$
- *Si* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\displaystyle\int_I f$ *CV* $\Longleftrightarrow$ $\displaystyle\left(\int_I \mathrm{Re}(f) \text{ et } \int_I \mathrm{Im}(f) \text{ CV}\right)$. *Dans ce cas :* $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b \mathrm{Re}(f) + i\int_a^b \mathrm{Im}(f).$

DÉFINITION 1.4 :
Deux intégrales sont dites **de même nature** *si elles sont simultanément convergentes (resp. diverg.).*

PROPOSITION 1.5 :
Si f **est continue par morceaux sur** $[\widetilde{a;b[}$ **et si** $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ **converge :** $\displaystyle\lim_{x \to b} \int_x^b f(t)dt = 0.$

THÉORÈME 1.6 :
Si $f_\alpha : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+$ **vérifie** $f_\alpha(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ **:** • $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_\alpha$ **converge** $\Longleftrightarrow \alpha > 1$ • $\displaystyle\int_0^1 f_\alpha$ **converge** $\Longleftrightarrow \alpha < 1$.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ **et** $g_\lambda : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ **par** $\forall x \geqslant 0,\ g_\lambda(x) = e^{-\lambda x}$ **:** $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_\lambda$ **converge** $\Longleftrightarrow \lambda > 0$.

PROPOSITION 1.7 :
Soit $f, g : I \to \mathbb{K}$ **continues par morceaux et** $a = \mathrm{Inf}(I)$ **ou** $-\infty$ **et** $b = \mathrm{Sup}(I)$ **ou** $+\infty$ **:**
- **Si** $\displaystyle\int_a^b f$ **CV et** $\lambda \in \mathbb{K}$**, alors** $\displaystyle\int_a^b (\lambda f)$ **CV et on a la relation** $\displaystyle\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$.
- **Si** $\displaystyle\int_a^b f$ **et** $\displaystyle\int_a^b g$ **CV,** $\displaystyle\int_a^b f+g$ **CV,** $\displaystyle\int_a^b f+g = \int_a^b f + \int_a^b g$ • **Si** $\displaystyle\int_a^b f$ **CV et** $\displaystyle\int_a^b g$ **DV,** $\displaystyle\int_a^b f+g$ **DV.**
- **Si** $\displaystyle\int_a^b f$ **CV et** $c \in I$ **:** $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ **(relation de** CHASLES**).**

THÉORÈME ÉNORME 1.8 :
Soit $f \in C^0(]a;b[, \mathbb{K})$ **et** $\varphi :]\alpha;\beta[\to]a;b[$ **une bijection strictement croissante de classe** C^1 **:**
- **Les intégrales** $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ **et** $\displaystyle\int_\alpha^\beta f\circ\varphi(t)\varphi'(t)dt$ **sont de même nature.**
- **Dans le cas de la convergence :** $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\circ\varphi(t)\varphi'(t)dt$ **(changement de variable).**

<u>*REMARQUE 1.5*</u> *: Si* φ *est une bijection strictement décroissante : les intégrales ont toujours la même nature et* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_\beta^\alpha f\circ\varphi(t)\varphi'(t)dt$ *ce qui s'écrit aussi* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\circ\varphi(t)\big|\varphi'(t)\big|dt$ *car* $\varphi' \leqslant 0$.

THÉORÈME ÉNORME 1.9 :
Soit $f, g :]a;b[\to \mathbb{K}$ **de classe** C^1**, si** fg **admet des limites finies en** a **et** b **:**
- **Les deux intégrales** $\displaystyle\int_a^b f'(x)g(x)dx$ **et** $\displaystyle\int_a^b f(x)g'(x)dx$ **sont de même nature.**
- **Si convergence,** $\displaystyle\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx = \lim_{x\to b} f(x)g(x) - \lim_{x\to a} f(x)g(x) - \int_a^b fg'$.

PARTIE 1.3 : FONCTIONS INTÉGRABLES

DÉFINITION 1.5 :
Soit $f \in C_m^0(I, \mathbb{K})$, $a = \mathrm{Inf}(I) \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ *et* $b = \mathrm{Sup}(I) \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ *; on dit que* **l'intégrale** $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ **est absolument convergente** *si* $\displaystyle\int_a^b |f(t)|dt$ *converge.* f *est alors dite* **intégrable** *sur* I.

THÉORÈME 1.10 :
Soit $f \in C_m^0(I, \mathbb{K})$**,** $a = \mathrm{Inf}(I) \in \overline{\mathbb{R}}$**,** $b = \mathrm{Sup}(I) \in \overline{\mathbb{R}}$**. Si** $\displaystyle\int_a^b f$ **ACV, alors** $\displaystyle\int_a^b f$ **CV et** $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$**.**

<u>*REMARQUE 1.6*</u> *:* • *Si* $f : I \to \mathbb{R}_+$*, l'intégrabilité de* f *équivaut à la convergence de* $\displaystyle\int_a^b f$.
- *C'est aussi le cas par exemple si* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *et si* f *reste positive au voisinage de* $+\infty$.
- *Si* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, f *intég. sur* $I \Longleftrightarrow (\mathrm{Re}(f)$ *et* $\mathrm{Im}(f)$ *intég sur* $I)$. *Dans ce cas :* $\displaystyle\int_I f = \int_I \mathrm{Re}(f) + \int_I \mathrm{Im}(f)$.

PROPOSITION 1.11 :
Soit $f : I \to \mathbb{K}$ **continue et intégrable sur** I**. Alors :** $\displaystyle\int_I |f| = 0 \Longleftrightarrow f = 0$**.**

THÉORÈME ÉNORME 1.12 :
Théorème de comparaison : soit $(f,g) \in C^0_m(I, \mathbb{K})^2$**.**

- **Si** $|f| \leqslant |g|$ **: (i)** g **intég. sur** $I \Longrightarrow f$ **intég. sur** I **(ii)** f **non intég. sur** $I \Longrightarrow g$ **non intég. sur** I.
- **Si** $I = [\widetilde{a;b}[$ **avec** $b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ **(et** $a \in I$ **donc** $a \in \mathbb{R}$**)**

  (iii) Si $f \underset{b}{=} O(g)$ **(ou** $f \underset{b}{=} o(g)$**) alors :** (g **intégrable sur** I) $\Longrightarrow$ (f **intégrable sur** I).

  (iv) Si $f \underset{b}{\sim} g$ **alors :** (f **intégrable sur** I) $\Longleftrightarrow$ (g **est intégrable sur** I).

<u>REMARQUE 1.7</u> : <u>Relation entre intégrabilité et limite</u> : f *continue par morceaux sur* I

- *Si* $I = [a;b[$ *est un intervalle borné et si* f *est bornée sur* I *(en particulier si* f *admet une limite finie en* b*) alors* f *est intégrable sur* I*. Mais on peut avoir* f *intégrable sur* I *sans que* f *ne soit bornée sur* I.
- *Si* $I = [a;+\infty[$ *n'est pas bornée, il n'y a aucun lien entre l'intégrabilité de* f *sur* I *et le fait que* f *tende vers* 0 *en* $+\infty$.
- *Une implication : si* f *est intégrable sur* $I = [a;+\infty[$ *et si* f *admet une limite* ℓ *en* $+\infty$ *alors* $\ell = 0$.

PROPOSITION 1.13 :
Soit $a \in \mathbb{R}$**,** $f \in C^0_m([a;+\infty[, \mathbb{C})$ **et** $\alpha \in \mathbb{R}$**, alors on a les résultats suivants :**

- **si** $\exists k \neq 0,\ f(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{k}{t^\alpha}$ **:** $\big(f$ **intégrable sur** $[a;+\infty[\big) \Longleftrightarrow (\alpha > 1)$.
- **si** $\alpha > 1$**,** $f(t) \underset{+\infty}{=} O\big(1/t^\alpha\big)$ **(en part. si** $\lim\limits_{t\to+\infty} t^\alpha f(t) = 0$**) :** f **intégrable sur** $[a;+\infty[$.
- **si** $\alpha \leqslant 1$**,** $\exists k > 0$**,** $|f(t)| \geqslant \dfrac{k}{t^\alpha}$ **"en"** $+\infty$ **(en part. si** $\lim\limits_{t\to+\infty} t^\alpha f(t) = +\infty$**) :** f **non intég. sur** $[a;+\infty[$.

Soit $a > 0$**,** $f \in C^0_m(]0;a], \mathbb{C})$ **et** $\alpha \in \mathbb{R}$**, alors :**

- **si** $\exists k \neq 0,\ f(t) \underset{0^+}{\sim} \dfrac{k}{t^\alpha}$ **:** $\big(f$ **intégrable sur** $]0;a]\big) \Longleftrightarrow (\alpha < 1)$.
- **si** $\alpha < 1$ **et** $f(t) \underset{0^+}{=} O\big(1/t^\alpha\big)$ **(en part. si** $\lim\limits_{t\to0^+} t^\alpha f(t) = 0$**) :** f **intégrable sur** $]0;a]$.
- **si** $\alpha \geqslant 1$**,** $\exists k > 0$**,** $|f(t)| \geqslant \dfrac{k}{t^\alpha}$ **"en"** 0 **(en part. si** $\lim\limits_{t\to0^+} t^\alpha f(t) = +\infty$**) :** f **non intég. sur** $]0;a]$.

DÉFINITION 1.6 :
On note $L^1(I, \mathbb{K})$ *(resp.* $L^2(I, \mathbb{K})$*) l'ensemble des fonctions continues par morceaux et intégrables (de carré intégrable) sur* I *à valeurs dans* $\mathbb{K}$.

PROPOSITION 1.14 :

- $L^1(I, \mathbb{K})$ **est un sous-espace de** $C^0_m(I, \mathbb{K})$ **où** $f \mapsto \displaystyle\int_I f$ **est une forme linéaire ; c'est-à-dire que si** $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ **et** $(f,g) \in L^1(I, \mathbb{K})^2$ **alors** $\alpha f + \beta g \in L^1(I, \mathbb{K})$ **et** $\displaystyle\int_I (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_I f + \beta \int_I g$.
- **Soit** $f \in C^0_m(I, \mathbb{K})$ **et** $c \in I$**. Alors** f **est intégrable sur** I **si et seulement si** f **est intégrable sur** $I \cap]-\infty\,;c]$ **et sur** $I \cap [c\,;+\infty[$**. Dans ce cas, on a** $\displaystyle\int_I f = \int_{I\cap]-\infty\,;c]} f + \int_{I\cap[c\,;+\infty[} f$ **(CHASLES).**

<u>REMARQUE 1.8</u> : • *Soit* $f : I = [a;b[\to \mathbb{K}$ *continue par morceaux et* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *croissante telle que* $u_0 \in I$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = b$*. Alors :* f *est intégrable sur* $I \iff \displaystyle\sum_{n\geqslant0} \int_{u_n}^{u_{n+1}} |f|$ *converge.*

- *Si* $(f,g) \in L^2(I, \mathbb{K})^2$ *alors* $f \times g \in L^1(I, \mathbb{K})$. • $L^2(I, \mathbb{K})$ *est un sous-espace vectoriel de* $C^0_m(I, \mathbb{K})$.
- *Inégalité de* CAUCHY-SCHWARZ *:* $(f,g) \in L^2(I, \mathbb{K}) \Longrightarrow \left|\displaystyle\int_I fg\right| \leqslant \sqrt{\int_I |f|^2}\sqrt{\int_I |g|^2}$.
- *Comparaison série-intégrale. Soit* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *une fonction continue par morceaux, positive et décroissante. La série* $\displaystyle\sum_{n\geqslant0} f(n)$ *converge si et seulement si* f *est intégrable sur* $\mathbb{R}_+$.