TD 01 : INTÉGRALES

PSI 1 2024-2025 **vendredi 6 septembre 2024**

1.1 *CCP PSI 2015* Marin de Bonnières

Soit $E = C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Si $f \in E$, soit $u(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ u(f)(x) = \int_0^x \cos(x-t)f(t)\mathrm{d}t$.

a. Montrer que u est un endomorphisme de E.

b. u est-elle surjective ?

c. Étudier le noyau de u.

1.2 *Mines PSI 2016* Owain Biddulph III

Soit $f : x \mapsto \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1-\sin(x)}{1+\sin(x)}\right)$.

a. Domaine de définition de f.

b. Donner une expression simplifiée de f.

1.3 *Mines PSI 2016* Matthieu Cadiot I

Montrer que l'équation $(E)\ :\ y' - y = \dfrac{1}{x}$ admet une unique solution bornée sur $[1; +\infty[$.

1.4 *CCP PSI 2016* Rogelio Escalona I

Soit $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f(1) = 0$. Montrer que $\int_0^1 f(t)^2\mathrm{d}t \leqslant 4\int_0^1 t^2 f'(t)^2\mathrm{d}t$.

1.5 *OdlT 2016/2017 Mines PSI planche 105I abordable dès la 1ère année*

Résoudre dans $\mathbb{R}$, $\mathrm{Arctan}(x-1) + \mathrm{Arctan}\,x + \mathrm{Arctan}(x+1) = \dfrac{\pi}{2}$.

1.6 *Mines PSI 2018* Adrien Sarrade I

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \dfrac{1}{n}\left(\prod_{k=1}^{n}(k+n)\right)^{\frac{1}{n}}$.

a. Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge et déterminer sa limite ℓ.

b. Trouver un équivalent de $u_n - \ell$ quand n tend vers $+\infty$.

1.7 *CCP PSI 2018* Mathilde Dutreuilh I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$.

a. Déterminer un équivalent simple de S_n quand n tend vers $+\infty$.

b. Proposer une autre méthode pour trouver cet équivalent.

1.8 *Centrale Maths1 PSI 2019* Carla Chevillard

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(nt)}{\sin(t)}\,dt$.

a. Montrer que J_n est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Calculer J_0, J_1, J_2, J_3.

b. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $J_{n+2} - J_n$ en fonction de n. En déduire une expression de J_n.

c. Soit $f \in C^1([a;b], \mathbb{R})$. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_a^b f(t)\cos(xt)\,dt = 0$.

d. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (J_{n+1} - J_n)$. En déduire la nature de la suite $(J_n)_{n\geqslant 0}$.

1.9 *Mines PSI 2021* Arthur Sureau II

Soit $m \in \mathbb{R}_+$, calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + m\sin^2(t)}$ en posant $u = \tan(t)$.

1.10 *X PSI 2023* Raphaël Déniel II

Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ paire et de classe C^4.

Montrer qu'il existe une fonction $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x^2) = f(x)$.

1.11 *Mines PSI 2023* Clément Gallice I et Chloé Vagner I

Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ continue et strictement positive.

a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe une unique subdivision $(x_0, \cdots, x_n)$ du segment $[a;b]$ qui vérifient les conditions $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $\displaystyle\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)\,dt = \frac{1}{n}\int_a^b f(t)\,dt$.

b. Montrer la convergence de $\displaystyle\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f(x_k)\right)_{n\geqslant 1}$ et calculer sa limite.

1.12 *Mines PSI 2023* Marie-Lys Ruzic I

On pose, pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{|\sin(t)|}{t}\,dt$.

Trouver un équivalent simple de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.