DEVOIR MAISON 1 : BEAU GAUSS

PSI 1 2024/2025 **pour le jeudi 05 septembre 2024**

PARTIE 1 : WALLIS

On pose, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, *le réel* $I_n = \int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^n d\theta$.

1.1 Première approche

1.1.1 Justifier que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie. Calculer I_0, I_1 et I_2.

1.1.2 Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive et strictement décroissante.

1.2 Une première relation et une première limite

1.2.1 Prouver à l'aide d'une intégration par parties que $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$.

1.2.2 Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{I_{n+1}}{I_n}$.

1.3 Une seconde relation et une seconde limite

1.3.1 Montrer que la suite $\big((n+1)I_n I_{n+1}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. Quelle est sa valeur ?

1.3.2 En déduire un équivalent simple de I_n en classant $I_n^2, I_n I_{n+1}$ et $I_n I_{n-1}$.

1.4 Prouver que $\forall k \in \mathbb{N},\ I_{2k} = \frac{\pi}{2^{2k+1}} \dbinom{2k}{k}$. Faire de même pour I_{2k+1}.

PARTIE 2 : DÉFINITION ET CALCUL DE $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$

Soit $A \in \mathbb{R}_+$, *on pose* $H(A) = \int_0^A e^{-t^2} dt$.

2.1 Justifier que H est bien définie, de classe C^∞ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

2.2 Prouver que $\forall A \geqslant 1,\ H(A) \leqslant 1 + [-e^{-t}]_1^A$.

2.3 Justifier alors l'existence de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \lim\limits_{A\to+\infty} \int_0^A e^{-t^2} dt$.

2.4 Quelques inégalités

2.4.1 Établir que $\forall x > -1,\ \ln(1+x) \leqslant x$.

2.4.2 En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [0; \sqrt{n}],\ \left(1 - \dfrac{t^2}{n}\right)^n \leqslant e^{-t^2} \leqslant \dfrac{1}{\left(1 + \dfrac{t^2}{n}\right)^n}$.

2.5 Transformation (pour $n \in \mathbb{N}^*$)

2.5.1 Prouver $\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt = \sqrt{n}\, I_{2n+1}$ à l'aide d'un changement de variable adéquat.

2.5.2 Prouver de même que $\int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n} dt = \int_{\pi/2}^{\pi/4} \sin^{2n}(\theta) \times \frac{-\sqrt{n}}{\sin^2(\theta)} d\theta \leqslant \sqrt{n}\, I_{2n-2}$.

2.6 La limite d'une suite

2.6.1 Prouver que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\sqrt{n}\, I_{2n+1} \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leqslant \sqrt{n}\, I_{2n-2}$.

2.6.2 En déduire la valeur de $\lim_{n \to +\infty} H(\sqrt{n}) = \lim_{n \to +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt$.

2.7 En déduire que $I = \lim_{x \to +\infty} H(x)$ existe et déterminer la valeur de I qu'on note $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

PARTIE 3 : AUTRE MÉTHODE

On définit $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *par* $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \varphi(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} dt$. *On considère aussi les fonctions* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *et* $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *définies par* $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt\right)^2$ et $g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$.

3.1 Inégalités

3.1.1 Montrer que $\forall (u, v) \in]-\infty; 1]^2,\ \left|e^v - e^u - e^u(v-u)\right| \leqslant e\,\frac{(v-u)^2}{2}$.

3.1.2 Établir $\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall h \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right], \forall t \in [0;1],\ \left|e^{-(x+h)(1+t^2)} - e^{-x(1+t^2)} + h(1+t^2)e^{-x(1+t^2)}\right| \leqslant 2eh^2$.

3.2 Renseignements sur φ

3.2.1 Montrer que φ est bien définie.

3.2.2 Soit $x \in \mathbb{R}_+$ et $h \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \setminus \{0\}$ tel que $x + h \geqslant 0$, majorer $\left|\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} + \int_0^1 e^{-x(1+t^2)} dt\right|$ en fonction de h grâce à 3.1.2.

3.2.3 Établir que φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \varphi'(x) = -\int_0^1 e^{-x(1+t^2)} dt$.

3.3 Informations sur f et g

3.3.1 Montrer que f et g sont dérivables et calculer leurs dérivées.

3.3.2 Trouver, pour $x \in \mathbb{R}_+$, un lien entre $g'(x)$ et $\int_0^x e^{-t^2} dt$.

3.3.3 Prouver que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leqslant g(x) \leqslant \frac{\pi}{4} e^{-x^2}$. En déduire la valeur de $\lim_{x \to +\infty} g(x)$.

3.4 L'intégrale de GAUSS

3.4.1 Établir que $f + g$ est constante sur $\mathbb{R}_+$. Que vaut $f + g$ sur $\mathbb{R}_+$?

3.4.2 En déduire l'existence et la valeur de $\lim_{x \to +\infty} \int_0^x e^{-t^2} dt$ qu'on note $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.