DEVOIR MAISON 2 : CENTRALE 1 PSI 2011

PSI 1 2024/2025 **pour le jeudi 19 septembre 2024**

PARTIE 1 : LA FONCTION GAMMA

On définit la fonction $\Gamma : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ *d'*EULER *par* $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$.

1.1 Montrer que la fonction $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est intégrable sur $]0;+\infty[$ si, et seulement si, $x > 0$.

1.2 À l'aide d'une intégration par parties, exprimer, pour $x > 0$, $\Gamma(x+1)$ en fonction de x et de $\Gamma(x)$.

1.3 Calculer $\Gamma(n)$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

PARTIE 2 : LA FORMULE DE STIRLING

Pour tout entier $k \geqslant 2$, *on pose* $u_k = \ln(k) - \int_{k-1}^{k} \ln(t)\mathrm{d}t$.

Pour tout entier $k \geqslant 2$, *on note* $w_k = \frac{1}{2}\int_{k-1}^{k} \frac{(t-k+1)(k-t)}{t^2}\mathrm{d}t$ *et* $W_n = \sum_{k=2}^{n} w_k$ *pour* $n \geqslant 2$.

2.1 À l'aide de deux intégrations par parties, montrer que $\int_{k-1}^{k} \frac{(t-k+1)(k-t)}{t^2}\mathrm{d}t = \ln k - \ln(k-1) - 2u_k$.

2.2 Développement asymptotique

2.2.1 Montrer que, pour $k \geqslant 2$, on a $0 \leqslant w_k \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)$. En déduire que $\sum_{n\geqslant 2} w_n$ est convergente.

On note $S = \sum_{n=2}^{+\infty} w_n$.

2.2.2 Montrer qu'il existe un nombre réel a tel que $\ln(n!) \underset{+\infty}{=} n\ln(n) - n + \frac{\ln(n)}{2} - a + o(1)$.

2.3 En utilisant encore une intégration par parties, montrer que $\left|w_k - \frac{1}{12}\int_{k-1}^{k}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}\right| \leqslant \frac{1}{6}\int_{k-1}^{k}\frac{\mathrm{d}t}{t^3}$.

2.4 En déduire que $\left|S - W_n - \frac{1}{12n}\right| \leqslant \frac{1}{12n^2}$ puis que $\ln(n!) \underset{+\infty}{=} n\ln(n) - n + \frac{\ln(n)}{2} - a + \frac{1}{12n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

On admet que $a = -\frac{1}{2}\ln(2\pi)$, *donc que* $\ln(n!) \underset{+\infty}{=} n\ln(n) - n + \frac{\ln(n)}{2} + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \frac{1}{12n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

PARTIE 3 : L'IDENTITÉ D'EULER

*Dans cette partie, nous allons établir l'identité d'*EULER *suivante :*

$$\forall x > 0,\ \Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} \qquad (E).$$

On définit pour tout réel $x > 0$ *les suites* $(I_n(x))_{n\geqslant 1}$ *et* $(J_n(x))_{n\geqslant 0}$ *par*

$$I_n(x) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J_n(x) = \int_0^1 (1-t)^n t^{x-1}\mathrm{d}t.$$

3.1 Justifier l'existence, pour $x > 0$, des deux intégrales $I_n(x)$ et $J_n(x)$.

3.2 Montrer que, pour tout $x > -1$, on a $\ln(1+x) \leqslant x$. En déduire qu'il existe une constante C, indépendante de n, telle que $\forall x \in [0;n]$, $e^x \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1} \leqslant C$.

3.3 Montrer $0 \leqslant e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leqslant e\frac{x^2}{n}e^{-x}$ pour $x \in [0;n]$. Indication : étudier $\theta : x \mapsto \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^x + e\frac{x^2}{n} - 1$.

3.4 Montrer que, pour tout $x > 0$ fixé, $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n(x) = \Gamma(x)$.

3.5 Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 0$, $J_{n+1}(x) = \frac{n+1}{x} J_n(x+1)$.

3.6 En déduire que pour tout $x > 0$, $J_n(x) = \dfrac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)(x+n)}$.

3.7 Établir l'identité d'Euler (E).

PARTIE 4 : UNE AUTRE IDENTITÉ D'EULER

Dans toute la suite, on définit une fonction h *sur* $\mathbb{R}$ *par* $h(u) = u - \lfloor u \rfloor - \frac{1}{2}$ *où la notation* $\lfloor u \rfloor$ *désigne la partie entière de* u*. On pose, pour* $n \in \mathbb{N}$ *et* $x > 0$, $a_n = \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{h(u)}{x+u} du$.

4.1 Dessiner soigneusement le graphe de l'application h sur l'intervalle $[-1;1]$.

4.2 Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ converge.

4.3 En déduire la convergence, pour $x > 0$, de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{u+x} du$.

Nous allons maintenant établir une autre formule importante due à Euler*, valable pour tout* $x > 0$ *:*

$$\ln\big(\Gamma(x+1)\big) = \left(x + \frac{1}{2}\right)\ln(x) - x + \ln(\sqrt{2\pi}) - \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{x+u} du \qquad (R).$$

On fixe donc $x > 0$ *et pour tout entier naturel* n*, on définit* $F_n(x)$ *par*

$$F_n(x) = \ln\left(\frac{n!n^{x+1}}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n+1)}\right).$$

4.4 Montrer que pour tout entier naturel i, on a $\displaystyle\int_{x+i}^{x+i+1} \ln(t)dt = \ln(x+i) - \int_i^{i+1} \frac{u-i-1}{u+x} du$.

4.5 En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout réel $x > 0$, on a la relation $F_n(x) = G_n(x) - \displaystyle\int_0^{n+1} \frac{h(u)}{u+x} du$ où on a défini $G_n(x) = \ln(n!) + (x+1)\ln(n) - \left(x + n + \frac{3}{2}\right)\ln(x+n+1) + n + 1 + \left(x + \frac{1}{2}\right)\ln(x)$.

4.6 La relation (R)

4.6.1 En utilisant la formule de Stirling, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)\ln(x) - x + \ln(\sqrt{2\pi})$.

4.6.2 En déduire que $\ln\big(\Gamma(x+1)\big) = \left(x + \frac{1}{2}\right)\ln(x) - x + \ln(\sqrt{2\pi}) - \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{x+u} du$.

4.7 L'application $u \mapsto \dfrac{h(u)}{u+x}$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}^+$?