DEVOIR MAISON 1 : BEAU GAUSS

PSI 1 2024/2025 **pour le jeudi 05 septembre 2024**

PARTIE 1 : WALLIS

1.1 Première approche

1.1.1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : \theta \mapsto \sin^n(\theta)$ est continue sur le segment $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ donc I_n est bien défini.
On a clairement $I_0 = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = [-\cos(\theta)]_0^{\pi/2} = 1$ et $I_2 = \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos(2\theta)}{2} d\theta = \left[\frac{2\theta - \sin(2\theta)}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$.

1.1.2 Comme f_n est positive, continue et pas identiquement nulle, on sait d'après le cours que $I_n > 0$. De plus, comme $0 \leqslant \sin \leqslant 1$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, on a $f_{n+1} \leqslant f_n$ ce qui donne $I_{n+1} \leqslant I_n$ par croissance de l'intégrale. De plus, $I_n - I_{n+1} = \int_0^{\pi/2} \sin^n(\theta)\big(1-\sin(\theta)\big) d\theta$ et la fonction $\theta \mapsto \sin^n(\theta)\big(1-\sin(\theta)\big)$ est continue, positive et pas identiquement nulle sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ car elle ne s'annule qu'en 0 et $\frac{\pi}{2}$ donc, comme avant, $I_n - I_{n+1} > 0$, ce qui garantit la stricte décroissance de la suite $(I_n)_{n \geqslant 0}$.

1.2 Une première relation et une première limite

1.2.1 Pour $n \in \mathbb{N}$, on décompose $I_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \big(\sin(\theta)\big) \times \big(\sin^{n+1}(\theta)\big) d\theta$. Les deux fonctions $u : \theta \mapsto -\cos(\theta)$ et $v : \theta \mapsto \sin^{n+1}(\theta)$ sont de classe C^1 sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et, par intégration par parties, on parvient à la relation $I_{n+2} = [-\cos(\theta)(\sin(\theta))^{n+1}]_0^{\pi/2} + (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^2(\theta)\sin^n(\theta) d\theta$. Comme $\cos^2(\theta) = 1 - \sin^2(\theta)$, par linéarité de l'intégrale, $I_{n+2} = (n+1)(I_n - I_{n+2})$ donc $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.

1.2.2 D'après 1.1.2 et 1.2.1, $I_{n+2} \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$ donc $\frac{n+1}{n+2} \leqslant \frac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant 1$. Par encadrement, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$.

1.3 Une seconde relation et une seconde limite

1.3.1 Posons $u_n = (n+1)I_n I_{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$. On a $u_{n+1} = (n+2)I_{n+1}I_{n+2} = (n+1)I_{n+1}I_n$ d'après 1.2.1. Ainsi $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante. Comme $u_0 = 1.1.\frac{\pi}{2}$, il vient $\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)I_n I_{n+1} = \frac{\pi}{2}$.

1.3.2 Comme en 1.2.2, pour $n \geqslant 1$, on a $I_{n+1} \leqslant I_n \leqslant I_{n-1}$ donc $\frac{\pi}{2(n+1)} = I_n I_{n+1} \leqslant I_n^2 \leqslant I_n I_{n-1} = \frac{\pi}{2n}$.
Ainsi, comme $I_n \geqslant 0$, $\sqrt{\frac{\pi}{2(n+1)}} \leqslant I_n \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$. Par encadrement, $I_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ car $\sqrt{\frac{\pi}{2(n+1)}} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

1.4 Pour $k \in \mathbb{N}$, $I_{2k} = \frac{2k-1}{2k} I_{2k-2} = \frac{2k-1}{2k} \times \cdots \times \frac{1}{2} I_0$ (par récurrence). Ainsi, en rajoutant les termes pairs qui manquent au numérateur, on trouve $I_{2k} = \frac{(2k)! I_0}{(2k)^2 \cdots 2^2} = \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}.\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2^{2k+1}}\binom{2k}{k}$.
De même, si $k \geqslant 0$, $I_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} I_{2k-1} = \frac{2k}{2k+1} \times \cdots \times \frac{2}{3} I_1$ (par récurrence). Ainsi, en rajoutant les termes pairs qui manquent au dénominateur, on trouve $I_{2k+1} = \frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!}$.

PARTIE 2 : DÉFINITION ET CALCUL DE $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$

2.1 Comme $h : t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, le théorème fondamental de l'intégration nous permet d'affirmer que H est C^1 sur $\mathbb{R}_+$, c'est l'unique primitive de h sur $\mathbb{R}_+$ qui s'annule en 0. Ainsi $H' = h > 0$ donc H est strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$ et H est C^∞ car h l'est.

2.2 Soit $A \geqslant 1$, comme $\forall t \geqslant 1,\ e^{-t^2} \leqslant e^{-t}$ et que $\forall t \in [0;1],\ e^{-t^2} \leqslant 1$, on a par la relation de Chasles la minoration $H(A) = \int_0^1 e^{-t^2}dt + \int_1^A e^{-t^2}dt \leqslant 1 + \int_1^A e^{-t}dt = 1 + [-e^{-t}]_1^A = 1 + \frac{1}{e} - e^{-A} \leqslant 1 + \frac{1}{e}$.

2.3 La fonction croissante H est majorée par $1 + \frac{1}{e}$ d'après 2.2 donc elle admet une limite finie en $+\infty$ d'après le théorème de la limite monotone. On note $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \lim\limits_{A \to +\infty} H(A) = \lim\limits_{A \to +\infty} \int_0^A e^{-t^2}dt = I$.

2.4 Quelques inégalités

2.4.1 Soit $b :]-1;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $b(x) = x - \ln(1+x)$. Alors b est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et $b'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$ donc b est décroissante sur $]-1;0]$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$. Or $b(0) = 0$ donc b est positive ce qui donne bien $\forall x > -1,\ \ln(1+x) \leqslant x$. On peut aussi dire que $m : x \mapsto \ln(1+x)$ est concave sur $]-1;+\infty[$ car elle y est deux fois dérivable et que $\forall x > 0,\ m''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \leqslant 0$ donc sa courbe est en dessous de ses tangentes, notamment en 0, d'où $\forall x > -1,\ m(x) = \ln(1+x) \leqslant x = m'(0)(x-0) + m(0)$.

2.4.2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0;\sqrt{n}]$, en posant $x = \frac{t^2}{n} \in [0;1] \subset]-1;+\infty[$, on a d'après 2.4.1, $\ln\left(1 + \frac{t^2}{n}\right) \leqslant \frac{t^2}{n}$. On multiplie par $n > 0$, on passe à l'exponentielle croissante et on inverse pour obtenir $e^{-t^2} \leqslant \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n}$.
Si $t = \sqrt{n}$, l'inégalité $\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leqslant e^{-t^2}$ est claire ($0 \leqslant e^{-n}$). Si $t \in [0;\sqrt{n}[$, avec $x = -\frac{t^2}{n} \in]-1;0] \subset]-1;+\infty[$ et, d'après 2.4.1, $\ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) \leqslant -\frac{t^2}{n}$. On multiplie par $n > 0$, on compose par $\exp$ et $\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leqslant e^{-t^2}$.
On a donc bien l'encadrement : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [0;\sqrt{n}],\ \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leqslant e^{-t^2} \leqslant \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n}$.

2.5 Transformation (pour $n \in \mathbb{N}^*$)

2.5.1 $t \mapsto \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n$ est continue sur $[0;\sqrt{n}]$ et $\varphi_n : \theta \mapsto \sqrt{n}\cos(\theta)$ est de classe C^1 de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ dans $[0;\sqrt{n}]$.
Par le changement de variable $t = \varphi(\theta)$, $\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt = \int_{\pi/2}^0 (1 - \cos^2(\theta))^n(-\sqrt{n}\sin(\theta))d\theta = \sqrt{n}\, I_{2n+1}$.

2.5.2 $t \mapsto \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n}$ est continue sur $[0;\sqrt{n}]$ et $\psi_n : \theta \mapsto \sqrt{n}\ \mathrm{cotan}(\theta)$ est de classe C^1 de $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$ dans $[0;\sqrt{n}]$. Ainsi, par le changement de variable $t = \psi(\theta)$, comme $\mathrm{cotan}'(\theta) = -\frac{1}{\sin^2(\theta)}$, on obtient la relation
$\int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n} dt = \int_{\pi/2}^{\pi/4} \sin^{2n}(\theta) \times \frac{-\sqrt{n}}{\sin^2(\theta)} d\theta = \sqrt{n} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^{2n-2}(\theta) d\theta \leqslant \sqrt{n}\, I_{2n-2}$ car $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right] \subset \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

2.6 La limite d'une suite

2.6.1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on intègre la double inégalité de la question 2.4.2 sur le segment $[0;\sqrt{n}]$ et on a l'encadrement $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n dt \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}dt \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^n}dt$ par croissance de l'intégrale. Grâce aux questions 2.5.1 et 2.5.2, on obtient donc $\sqrt{n}\, I_{2n+1} \leqslant \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}dt = H(\sqrt{n}) \leqslant \sqrt{n}\, I_{2n-2}$.

2.6.2 Or, d'après 1.3.2, on a $I_{2n+1} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2(2n+1)}} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{4n}}$ et $I_{2n-2} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2(2n-2)}} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{4n}}$ aussi. Par conséquent $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\, I_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\, I_{2n-2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Par encadrement, on a donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} H(\sqrt{n}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

2.7 Comme on sait avec 2.3 que $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} H(A)$ existe et vaut I, par caractérisation séquentielle de la limite et composée, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} H(\sqrt{n}) = I$ car $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$. Ainsi, par unicité de la limite, $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

PARTIE 3 : AUTRE MÉTHODE

3.1 Inégalités

3.1.1 On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange à $f = \exp$ de classe C^2 entre u et v à l'ordre 1. Si $(u,v) \in]-\infty;1]^2$, puisque $f'(u) = e^u$ et $\displaystyle\mathop{Max}_{[u,v]} |f''| = Max(e^u, e^v) \leqslant e^1 = e$, $\left|e^v - e^u - e^u(v-u)\right| \leqslant e\,\dfrac{(v-u)^2}{2}$.

3.1.2 Avec 3.1.1, si $x \in \mathbb{R}_+$, $h \in \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$, $t \in [0;1]$, $u = -x(1+t^2) \in]-\infty;1]$ et $v = -(x+h)(1+t^2) \in]-\infty;1]$, comme $v-u = -h(1+t^2)$: $\left|e^{-(x+h)(1+t^2)} - e^{-x(1+t^2)} + h(1+t^2)e^{-x(1+t^2)}\right| \leqslant e\,\dfrac{h^2(1+t^2)}{2}$. Mais comme $1+t^2 \leqslant 2$, on obtient bien $\left|e^{-(x+h)(1+t^2)} - e^{-x(1+t^2)} + h(1+t^2)e^{-x(1+t^2)}\right| \leqslant 2eh^2$.

3.2 Renseignements sur φ

3.2.1 Pour $x \geqslant 0$, la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}$ est continue sur le segment $[0;1]$ donc $\varphi(x)$ est bien défini.

3.2.2 Si $x \in \mathbb{R}_+$ et $h \in \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right] \setminus \{0\}$ tel que $x+h \geqslant 0$, par linéarité de l'intégrale et inégalité de la moyenne, on a $\left|\dfrac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} + \displaystyle\int_0^1 e^{-x(1+t^2)}dt\right| \leqslant \displaystyle\int_0^1 \left|\dfrac{e^{-(x+h)(1+t^2)} - e^{-x(1+t^2)} + h(1+t^2)e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\right| dt$. Grâce à la question 3.1.2, on a donc $\left|\dfrac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} + \displaystyle\int_0^1 e^{-x(1+t^2)}dt\right| \leqslant \displaystyle\int_0^1 2eh^2 dt = 2eh^2$.

3.2.3 Comme $\displaystyle\lim_{h\to 0} 2eh^2 = 0$, en faisant tendre h vers 0^+ dans l'inégalité de la question précédente, on prouve par encadrement la dérivabilité de φ en $x \in \mathbb{R}_+$ et $\displaystyle\lim_{h\to 0^+} \frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} = \varphi'(x) = -\int_0^1 e^{-x(1+t^2)}dt$.

3.3 Informations sur f et g

3.3.1 Comme $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, $w : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2}\,dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ par le théorème fondamental de l'intégration. $f = w^2$ est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x \geqslant 0,\ f'(x) = 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$. Comme $g(x) = \varphi(x^2)$, par composée, g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $g'(x) = 2x\varphi'(x^2) = -2x\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\,dt$.

3.3.2 Si $x > 0$, $g'(x) = -2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-x^2t^2}\,dt$ et on pose $t = \psi(u) = \dfrac{u}{x}$ avec ψ de classe C^1 de $[0;x]$ dans $[0;1]$ ce qui, par changement de variable, donne $g'(x) = -2e^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2}\,du = -2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ (variables muettes). Comme $g'(0) = 0$, cette relation est universellement vraie sur $\mathbb{R}_+$.

3.3.3 Soit $x \geqslant 0$, comme $\dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \geqslant 0$, il est clair que $g(x) \geqslant 0$. De plus, puisque $e^{-x^2t^2} \leqslant 1$, on a $g(x) = e^{-x^2}\int_0^1 \dfrac{e^{-x^2t^2}}{1+t^2}\,dt \leqslant \int_0^1 \dfrac{e^{-x^2}\,dt}{1+t^2} = \dfrac{\pi e^{-x^2}}{4}$. Par encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\pi e^{-x^2}}{4} = 0$.

3.4 L'intégrale de Gauss

3.4.1 Pour $x \in \mathbb{R}_+$, $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x) = 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt - 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ d'après 3.3.1 et 3.3.2 donc $f+g$ est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$. Comme $f(0) = 0$ et $g(0) = \int_0^1 \dfrac{dt}{1+t^2} = \mathrm{Arctan}(1) = \dfrac{\pi}{4}$, on a donc $\forall x \geqslant 0,\ f(x) + g(x) = f(0) + g(0) = \dfrac{\pi}{4}$.

3.4.2 D'après la question 3.3.3, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ or $f(x) = \dfrac{\pi}{4} - g(x)$ donc, par soustraction : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{\pi}{4}$. Ainsi, comme $\int_0^x e^{-t^2}\,dt = \sqrt{f(x)}$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\dfrac{\pi}{4}} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.

Cette intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$, dite de Gauss, est célèbre, et sa valeur est donc $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. Ainsi, par parité, on a $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$, et avec le changement de variable $u = \sqrt{2}t$, on a $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2}\,dt = \sqrt{2\pi}$ et enfin $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,du = 1$. Cette dernière intégrale permet de définir la loi normale standard $\mathcal{N}(0,1)$ (ou loi gaussienne ou loi de Laplace-Gauss ou loi normale centrée réduite), c'est une loi à densité sur $\mathbb{R}$ et une variable aléatoire X suit cette loi si $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ a < b \Longrightarrow \mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b \dfrac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,du$. Cette loi est essentielle en probabilités grâce au théorème central limite.