DEVOIR 01 : RÉVISIONS

PSI 1 2024-2025 **mardi 03 septembre 2024**

QCM

1 *Trigonométrie circulaire*

1.1 $\forall x \in \mathbb{R},\ 1 - \cos(x) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$

1.2 $\forall x \in \mathbb{R},\ \tan(\pi + x) = \tan(x)$

1.3 $\forall (p,q) \in \mathbb{R}^2,\ \cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

1.4 $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[,\ \tan(x) = \sqrt{\frac{1}{\cos^2(x)} - 1}$

2 *Développements limités classiques*

2.1 $\sin(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$

2.2 $\ln(1+x) \underset{0}{=} x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n} + o(x^n)$

2.3 $e^x \underset{0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^4)$

2.4 $\sqrt[3]{1+x} \underset{0}{=} 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + o(x^2)$

3 *Dérivabilité : soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *impaire, dérivable avec* $\lim\limits_{t \to -\infty} f(t) = 0$ *et* $x > 0$ *tel que* $f(x) = f(-x) = 0$

3.1 $\exists c \in]0\,;x[,\ f'(c) = f'(-c) = 0$

3.2 $\exists d \in]x\,;+\infty[,\ f'(d) = 0$

3.3 $\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) = -f'(-t)$

3.4 $\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) = f'(-t)$

4 *Croissances comparées : soit* $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$

4.1 $\lim\limits_{x \to 0+} x^\alpha \ln(x) = 0$ **4.2** $\lim\limits_{x \to +\infty} x e^{-\beta x} = 0$ **4.3** $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ **4.4** $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{sh}(x)}{e^x} = 1$

Définition Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et un réel $a \in \mathbb{R}$. Traduire “f est continue en a” avec des quantificateurs.

Énoncé Donner un énoncé complet avec les hypothèses minimales du théorème de ROLLE.

Exercice 1 Montrer que $\forall x \in [-1;1],\ f(x) = \mathrm{Arccos}\,x + \mathrm{Arccos}(-x) = \pi$.

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ -1 < f'(x) < 0$.

a. Que peut-on dire des limites éventuelles de f en $\pm\infty$?

b. Montrer que $g : x \mapsto x - f(x)$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

c. Montrer qu'il existe un unique $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $f(\ell) = \ell$.

Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

d. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \ell| \leqslant |u_0 - \ell| = \alpha$. Indication : $u_{n+1} - \ell = f(u_n) - f(\ell)$.

e. Justifier l'existence de $k = \underset{x \in [\ell-\alpha;\ell+\alpha]}{\mathrm{Max}} |f'(x)|$. Montrer que $k < 1$.

f. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \ell| \leqslant k^n |u_0 - \ell|$. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

DEVOIR 01 NOM : PRÉNOM :

QCM Répondre dans le tableau ci-dessous au QCM : mettre une croix dans la case de la ligne i colonne j revient à déclarer la question $i.j$ vraie. Ne rien mettre revient à la déclarer fausse.

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1					
2					
3					
4					

Définition

Énoncé

Exercice 1

Exercice 2

DEVOIR 01	NOM : COCO	PRÉNOM : SINUS

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1			X		
2	X			X	
3	X	X		X	
4	X		X		

1.1 Faux : par exemple pour $x=0$, c'est $1-\cos(x)=2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$ **1.2** Faux : la relation est vraie mais pas pour tous les réels **1.3** Vrai : du cours **1.4** Faux : $\tan^2(x)=\dfrac{1}{\cos^2(x)}-1$ mais $\tan(x)<0$ si $x\in\left]-\frac{\pi}{2};0\right[$.
2.1 Vrai : classique et $\sin$ est impaire **2.2** Faux : il y a des signes $-$
2.3 Faux : il manque $\frac{x^4}{24}$ **2.4** Vrai : $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{-2}{3}\right)=-\frac{1}{9}$.
3.1 Vrai : c'est Rolle car f est dérivable et $f(0)=f(x)=0$; de plus f' est paire **3.2** Vrai : c'est Rolle généralisé car $f(x)=$ "$f(+\infty)$" $=0$ car f est impaire donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ **3.3** Faux : f est impaire donc $f(t)=-f(-t)$ qu'on dérive donc $f'(t)=f'(-t)$ et f' est paire **3.4** Vrai : voir 3.3.
4.1 Vrai : du cours **4.2** Faux : vrai si $\beta>0$ **4.3** Vrai : $\sin'(0)=1$ **4.4** Faux : $\dfrac{\mathrm{sh}(x)}{e^x}=\dfrac{1-e^{-2x}}{2}\to\dfrac{1}{2}$.

Définition La fonction f est continue en a si et seulement si $\forall\varepsilon>0,\ \exists\alpha>0,\ |x-a|\leqslant\alpha\Longrightarrow|f(x)-f(a)|\leqslant\varepsilon$.

Énoncé Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f:I\to\mathbb{R}$ une fonction et $a<b$ deux réels de I. Si f est continue sur $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$ et si $f(a)=f(b)$, alors il existe un réel $c\in]a;b[$ tel que $f'(c)=0$.

Exercice 1 $f:[-1;1]\to\mathbb{R}$ est dérivable sur $]-1;1[$ et $f'(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}+(-1)\times\left(-\dfrac{1}{\sqrt{1-(-x)^2}}\right)=0$ donc f est constante sur l'<u>intervalle</u> $]-1;1[$ où elle vaut $f(0)=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}=\pi$ car $0\in]-1;1[$. Comme f est clairement paire et que $f(1)=\pi+0=\pi=f(-1)$, on a $\forall x\in[-1;1],\ \mathrm{Arccos}\,x+\mathrm{Arccos}(-x)=\pi$.

Exercice 2 **a.** Comme $f'<0$ sur l'intervalle $\mathbb{R}$ par hypothèse, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Par le théorème de la limite monotone, f admet une limite finie en $-\infty$ si f est majorée et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ sinon. De même, f admet une limite finie en $+\infty$ si f est minorée et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ sinon.
b. Comme $\forall x\in\mathbb{R},\ g'(x)=1-f'(x)>0$, la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$ donc elle y est injective. De plus, avec la question précédente, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$. Ainsi g est surjective de $\mathbb{R}$ dans $g(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ par le théorème des valeurs intermédiaires car g est continue. Avec ce qui précède ou directement avec le théorème de la bijection continue, g est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
c. Comme $0\in\mathbb{R}$, il existe un unique $\ell\in\mathbb{R}$ tel que $g(\ell)=\ell-f(\ell)=0$, c'est-à-dire $\exists!\ell\in\mathbb{R},\ f(\ell)=\ell$.
d. Soit $n\in\mathbb{N}$. Si $u_n=\ell$, $u_{n+1}=f(\ell)=\ell$ donc $|u_{n+1}-\ell|=|u_n-\ell|$. Sinon, par l'égalité des accroissements $\widetilde{\text{finis}}$, comme $u_{n+1}-\ell=f(u_n)-f(\ell)$ et que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe $c_n\in\widetilde{]u_n;\ell[}$ tel que $u_{n+1}-\ell=f'(c_n)(u_n-\ell)$ donc $|u_{n+1}-\ell|\leqslant|u_n-\ell|$ car $|f'(c_n)|\leqslant1$. Ainsi, $|u_n-\ell|\leqslant|u_{n-1}-\ell|\leqslant\cdots\leqslant|u_0-\ell|$ donc $|u_n-\ell|\leqslant\alpha$ d'où $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\in K=[\ell-\alpha;\ell+\alpha]$.
e. Comme $|f'|$ est continue sur le segment $K=[\ell-\alpha;\ell+\alpha]$, elle y est bornée et y atteint ses bornes donc il existe $a\in K$ tel que $|f'(a)|=\mathrm{Max}_{x\in K}|f'(x)|=k$. Ainsi, k existe et $k=|f'(a)|=\mathrm{Max}_{x\in K}|f'(x)|<1$ par hypothèse.
f. On a bien $|u_0-\ell|=k^0|u_0-\ell|\leqslant k^0|u_0-\ell|$ (initialisation). Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $|u_n-\ell|\leqslant k^n|u_0-\ell|$, alors par l'inégalité des accroissements finis car f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et, $\widetilde{\text{avec}}$ la définition de k, on a $|u_{n+1}-\ell|=|f(u_n)-f(\ell)|\leqslant\mathrm{Sup}_{x\in\widetilde{]u_n;\ell[}}|f'(x)|\times|u_n-\ell|$ et $\mathrm{Sup}_{x\in\widetilde{]u_n;\ell[}}|f'(x)|\leqslant k$ car $\widetilde{]u_n;\ell[}\subset[\ell-\alpha;\ell+\alpha]$. Ainsi, $|u_{n+1}-\ell|\leqslant k\times(k^n|u_0-\ell|)=k^{n+1}|u_0-\ell|$ (hérédité). Par principe de récurrence, $\forall n\in\mathbb{N},\ |u_n-\ell|\leqslant k^n|u_0-\ell|$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}k^n=0$ car $|k|<1$, on obtient par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\ell$.