# TD 01 : INTÉGRALES

**PSI 1   2024-2025**   **vendredi 6 septembre 2024**

**1.1** **a.** D'abord, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $t \mapsto \cos(x-t)f(t)$ est continue sur $[0;x]$ donc le réel $u(f)(x)$ existe bien (intégrale d'une fonction continue sur un segment). La fonction $u(f)$ est donc bien définie sur $\mathbb{R}$.

De plus, puisque par trigonométrie on a $\cos(x-t) = \cos(x)\cos(t) + \sin(x)\sin(t)$, on peut écrire par linéarité de l'intégrale que $\forall x \in \mathbb{R},\ u(f)(x) = \cos(x)\int_0^x \cos(t)f(t)dt + \sin(x)\int_0^x \sin(t)f(t)dt$ ce qui garantit que $u(f)$ est continue car les fonctions $t \mapsto \cos(t)f(t)$ et $t \mapsto \sin(t)f(t)$ sont continues sur $\mathbb{R}$ ce qui montre que les fonctions $t \mapsto \int_0^x \cos(t)f(t)dt$ et $t \mapsto \int_0^x \sin(t)f(t)dt$ sont aussi continues sur $\mathbb{R}$ (elles sont d'ailleurs même de classe $C^1$, voir **b.**). Enfin la linéarité de $u$ provient de celle de l'intégrale, il suffit de l'écrire.

Par conséquent, $u$ est un endomorphisme de $E$.

**b.** $t \mapsto \int_0^x \cos(t)f(t)dt$ et $t \mapsto \int_0^x \sin(t)f(t)dt$ étant respectivement les primitives s'annulant en $0$ des fonctions $t \mapsto \cos(t)f(t)$ et $t \mapsto \sin(t)f(t)$ par le théorème fondamental de l'intégration, et puisque d'après **a.** on a $\forall x \in \mathbb{R},\ u(f)(x) = \cos(x)\int_0^x \cos(t)f(t)dt + \sin(x)\int_0^x \sin(t)f(t)dt$, la fonction $u(f)$ est, par opérations, de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ avec $u(f)'(x) = f(x) - \sin(x)\int_0^x \cos(t)f(t)dt + \cos(x)\int_0^x \sin(t)f(t)dt$ car $\cos^2(x)+\sin^2(x) = 1$.

Ainsi, $u$ n'est pas surjective car les fonctions continues qui ne sont pas de classe $C^1$ (comme la valeur absolue par exemple) n'auront pas d'antécédent par $u$. On peut aussi constater que $u(f)(0) = 0$ ce qui montre que les fonctions dont la valeur en $0$ n'est pas nulle ne peuvent pas être dans $\mathrm{Im}\,(u)$ non plus.

**c.** Si $f \in \mathrm{Ker}(u)$, $u(f) = 0$ donc $u(f)' = 0$ d'où $f(x) = \sin(x)\int_0^x \cos(t)f(t)dt - \cos(x)\int_0^x \sin(t)f(t)dt$ (1) pour tout réel $x$ d'après le calcul précédent. Ainsi, comme avant, $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ et on peut dériver une fois de plus, ce qui donne $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \cos(x)\int_0^x \cos(t)f(t)dt + \sin(x)\int_0^x \sin(t)f(t)dt = u(f)(x) = 0$ après simplifications. Ainsi, $f$ est constante car $\mathbb{R}$ est un intervalle. Mais comme $f(0) = 0$ par la relation (1) ci-dessus, $f$ est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$ ce qui prouve que $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$. Ainsi, $u$ est injective.

**1.2** **a.** $f$ est définie et dérivable par opérations sur $D = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]2k\pi - \frac{\pi}{2}; 2(k+1)\pi - \frac{\pi}{2}\right[$ (là ou $\sin$ ne vaut pas $-1$). Pour $x \in D$, comme $\frac{1-\sin(x)}{1+\sin(x)} = \frac{2}{1+\sin(x)} - 1$, on a $f'(x) = \left(-\frac{2\cos(x)}{(1+\sin(x))^2}\right) \times \frac{(1+\sin(x))^2}{(1-\sin(x))^2 + (1+\sin(x))^2}$ ce qui donne après simplifications la relation $f'(x) = -\frac{\cos(x)}{1+\sin^2(x)} = (-\mathrm{Arctan}(\sin(x)))'$. Ainsi, la fonction $x \mapsto f(x) + \mathrm{Arctan}(\sin(x))$ est constante sur chaque intervalle du type $I_k = \left]2k\pi - \frac{\pi}{2}; 2(k+1)\pi - \frac{\pi}{2}\right[$.

Comme $f$ et $x \mapsto \mathrm{Arctan}(\sin(x))$ sont $2\pi$-périodiques, il suffit de trouver cette constante sur $I_0 = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[$.

Or $f(0) + \mathrm{Arctan}(\sin(0)) = \frac{\pi}{4}$ donc $\forall x \in D,\ f(x) = \frac{\pi}{4} - \mathrm{Arctan}(\sin(x))$.

**1.3** Les solutions réelles de l'équation homogène $(E_0)$ : $y' - y = 0$ sont les fonctions $y_\lambda : x \mapsto \lambda e^x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et elles sont définies sur $[1;+\infty[$ en entier. On effectue une variation de la constante en cherchant les solutions de $(E)$ sous la forme $y : x \mapsto \lambda(x)e^x$ avec $\lambda : [1;+\infty[ \to \mathbb{R}$ dérivable. En remplaçant dans $(E)$, on parvient à $y' - y = \frac{1}{x} \iff \lambda'(x)e^x = \frac{1}{x} \iff \lambda'(x) = \frac{e^{-x}}{x}$. On prend par exemple $\lambda : x \mapsto \int_1^x \frac{e^{-t}}{t}dt$. Ainsi, les solutions de $(E)$ sur $[1;+\infty[$ forment un espace affine et s'écrivent $y_\alpha : x \mapsto \left(\alpha + \int_1^x \frac{e^{-t}}{t}dt\right)e^x$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction $g : t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $[1;+\infty[$ et $\frac{e^{-t}}{t} \underset{+\infty}{=} o(e^{-t})$ donc, par comparaison, $g$ est intégrable sur $[1;+\infty[$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha + \int_1^x \frac{e^{-t}}{t}dt = \alpha + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt$. Pour que $y_\alpha$ soit bornée, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, il faut absolument que $\alpha + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt = 0$, ce qui impose $\alpha = -\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt = \alpha_0$. Seule la fonction $b = y_{\alpha_0} : x \mapsto \left(-\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt + \int_1^x \frac{e^{-t}}{t}dt\right)e^x = -e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt$ (par la relation de Chasles) est éventuellement bornée parmi les solutions de $(E)$.

Comme $\forall x \geqslant 1, |b(x)| = e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt \leqslant e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x}dt = \frac{1}{x} \leqslant 1$ car $\frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{x}$ si $t \geqslant x$, cette fonction $b$ est bien bornée sur $[1;+\infty[$. Conclusion : $(E)$ a une seule solution bornée qui est $b$ et elle tend vers $0$ en $+\infty$.

**1.4** On pose $u = f^2$ et $v : t \mapsto t$ de sorte que $u$ et $v$ sont de classe $C^1$ sur $[0;1]$ par hypothèse. Par conséquent, par intégration par parties, on obtient $\int_0^1 f(t)^2dt = [tf^2(t)]_0^1 - 2\int_0^1 tf'(t)f(t)dt = -2\int_0^1 tf'(t)f(t)dt$ car $f(1) = 0$. Par l'inégalité triangulaire, on a $\int_0^1 f(t)^2dt \leqslant 2\int_0^1 |f'(t)||f(t)|dt$ puis, par celle de Cauchy-Schwarz, on trouve $\int_0^1 f(t)^2dt \leqslant 2\sqrt{\int_0^1 t^2f'^2(t)dt}\sqrt{\int_0^1 f^2(t)dt}$ (1). Il y a maintenant deux cas :

- si $\int_0^1 f(t)^2dt = 0$, on a bien $\int_0^1 f(t)^2dt \leqslant 4\int_0^1 t^2f'(t)^2dt$.
- si $\int_0^1 f(t)^2dt > 0$, en divisant par $\sqrt{\int_0^1 f^2(t)dt}$ dans (1), on a $\sqrt{\int_0^1 f(t)^2dt} \leqslant 2\sqrt{\int_0^1 t^2f'^2(t)dt}$ puis le résultat de l'énoncé résultat en élevant au carré cette inégalité.

Dans tous les cas, on a bien $\int_0^1 f(t)^2dt \leqslant 4\int_0^1 t^2f'(t)^2dt$ si $f$ est de classe $C^1$ sur $[0;1]$ et $f(1) = 0$.

Pour le cas d'égalité, on doit avoir égalité dans Cauchy–Schwarz ce qui donne l'existence d'une constante $\lambda$ telle que $\forall t \in [0;1],\ tf'(t) = \lambda f(t)$ $(E)$ car les deux fonctions $t \mapsto tf'(t)$ et $t \mapsto f(t)$ doivent être colinéaires. De plus, comme $\int_0^1 f(t)^2dt \geqslant 0$, on doit avoir $-2\int_0^1 tf'(t)f(t)dt \geqslant 0$ ce qui impose $\lambda \leqslant 0$. Ainsi, en résolvant l'équation différentielle $(E)$, on a $\forall t \in [0;1],\ f(t) = \alpha t^\lambda$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et les conditions "$f$ de classe $C^1$ et $f(1) = 0$" imposent que $f = 0$. On n'a égalité dans cette inégalité que pour $f$ égale à la fonction nulle.

**1.5** Méthode 1 : Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \mathrm{Arctan}(x-1) + \mathrm{Arctan}\,x + \mathrm{Arctan}(x+1)$. Comme la fonction $\mathrm{Arctan}$, la fonction $f$ est continue et strictement croissante, elle réalise donc d'après le théorème du même nom une bijection continue de $\mathbb{R}$ dans $]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x); \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[= \left]-\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[$. Ainsi, il existe un unique réel $x$ tel que $f(x) = \frac{\pi}{2}$. Comme $f(0) = 0$ et $f(1) = \frac{\pi}{4} + \mathrm{Arctan}(2) > \frac{\pi}{2}$, il vient $x \in ]0;1[$.

$\mathrm{Arctan}(x-1) + \mathrm{Arctan}(x+1) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\,x$ donc $\tan(\mathrm{Arctan}(x-1) + \mathrm{Arctan}(x+1)) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\,x\right)$ donc $\tan(\mathrm{Arctan}(x-1) + \mathrm{Arctan}(x+1)) = \frac{1}{\tan(\mathrm{Arctan}(x))} = \frac{1}{x}$ car $\mathrm{Arctan}(x) \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$. Ainsi, comme $\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$, il vient $\frac{2x}{1-(x^2-1)} = \frac{1}{x} \Longleftrightarrow 2x^2 = 2 - x^2 \Longleftrightarrow x = \sqrt{\frac{2}{3}} \sim 0,82$.

Méthode 2 : On sait que $\mathrm{Arctan}(y)$ est un argument du complexe $1+iy$ si $y \in \mathbb{R}$ car on peut écrire $1+iy = \sqrt{1+y^2}e^{i\theta}$ avec $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ (faire un dessin) et $1+iy = \sqrt{1+y^2}(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ où

$\cos(\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}}$ donc $\tan(\theta) = y$ ce qui montre bien que $\theta = \mathrm{Arctan}(y)$.

On sait aussi que $\arg(zz') \equiv \arg(z)+\arg(z')$ $[2\pi]$ donc, en itérant, $\arg(zz'z'') \equiv \arg(z)+\arg(z')+\arg(z'')$ $[2\pi]$. Ainsi $\mathrm{Arctan}(x-1)+\mathrm{Arctan}\,x+\mathrm{Arctan}(x+1) \equiv \mathrm{Arg}\left((1+i(x-1))(1+ix)(1+i(x+1))\right)$ $[2\pi]$ et l'équation devient $\arg(2-3x^2+(4x-x^3)i) \equiv \frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$ ce qui équivaut à $2-3x^2+(4x-x^3)i \in i\,\mathbb{R}_+^*$ et, à nouveau, on trouve $x = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$ (car si $x = -\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ la partie imaginaire de $2-3x^2+(4x-x^3)i$ est strictement négative).

**1.6** **a.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n$ est bien défini et strictement positif. Ainsi $v_n = \ln(u_n) = \ln\left(\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\right)$ donc $v_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1+\dfrac{k}{n}\right)$. Comme la fonction $f : t \mapsto \ln(1+t)$ est continue sur le segment $[0;1]$, par le théorème sur les sommes de Riemann, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \int_0^1 f = [(1+x)\ln(1+x)-x]_0^1 = 2\ln(2)-1$. Par conséquent, par continuité de $\exp$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{v_n} = e^{2\ln(2)-1} = \dfrac{4}{e} = \ell$.

**b.** On peut écrire $u_n = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{(2n)!}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\dfrac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}$. Or on connaît l'équivalent de Stirling $n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\,\dfrac{n^n}{e^n}$.
Ainsi $\dfrac{(2n)!}{n^n n!} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{4\pi n}(2n)^{2n}e^n}{\sqrt{2\pi n}n^n n^n e^{2n}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{(\sqrt{2})4^n}{e^n} = \sqrt{2}\left(\dfrac{4}{e}\right)^n$. On en déduit que $u_n \underset{+\infty}{=} \left(\sqrt{2}\left(\dfrac{4}{e}\right)^n + o\left(\left(\dfrac{4}{e}\right)^n\right)\right)^{\frac{1}{n}}$ d'où $u_n \underset{+\infty}{=} e^{\frac{1}{n}\ln\left(\sqrt{2}\left(\frac{4}{e}\right)^n+o\left(\left(\frac{4}{e}\right)^n\right)\right)} \underset{+\infty}{=} e^{\ln(\frac{4}{e})+\frac{1}{n}\ln(\sqrt{2}+o(1))} \underset{+\infty}{=} \dfrac{4}{e}\times e^{\frac{1}{2n}(\ln(2)+o(1))} \underset{+\infty}{=} \dfrac{4}{e}\left(1+\dfrac{\ln(2)}{2n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$ en effectuant un développement limité à l'ordre 1 de $\exp$ en 0.
On retrouve l'équivalent $u_n \underset{+\infty}{\sim} \ell = \dfrac{4}{e}$ de la question **a.**. Mais on a beaucoup mieux, $u_n - \ell \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2\ln(2)}{en}$.

**1.7** **a.** Comme $f : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on pense à une comparaison série/intégrale. Pour $n \geqslant 1$ et $k \in [\![n+1;2n]\!]$, on a $\int_k^{k+1} f(t)dt \leqslant f(k) = \dfrac{1}{\sqrt{k}} \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)dt$. On somme ces inégalités pour $k \in [\![n+1;2n]\!]$ pour avoir l'inégalité $[2\sqrt{t}]_{n+1}^{2n+1} = \int_{n+1}^{2n+1}\dfrac{dt}{\sqrt{t}} \leqslant S_n \leqslant \int_n^{2n}\dfrac{dt}{\sqrt{t}} = [2\sqrt{t}]_n^{2n}$. Or $[2\sqrt{t}]_n^{2n} = 2(\sqrt{2}-1)\sqrt{n}$ et $[2\sqrt{t}]_{n+1}^{2n+1} = 2\sqrt{2n+1}-2\sqrt{n+1} = 2\sqrt{n}\left(\sqrt{2+\dfrac{1}{n}}-\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}\right) \underset{+\infty}{\sim} 2(\sqrt{2}-1)\sqrt{n}$.
Ainsi, on arrive à l'équivalent $S_n \underset{+\infty}{\sim} 2(\sqrt{2}-1)\sqrt{n}$ par encadrement.

**b.** On peut aussi écrire $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{n+k}} = \sqrt{n}\times\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}$ et, comme $f : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t}}$ est continue sur le segment $[0;1]$, par le théorème sur les sommes de Riemann, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{S_n}{\sqrt{n}} = \int_0^1 f = [2\sqrt{1+t}]_0^1 = 2\sqrt{2}-2$.
On retrouve bien l'équivalent de la question **a.** : $S_n \underset{+\infty}{\sim} 2(\sqrt{2}-1)\sqrt{n}$.

**1.8** **a.** Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : \left]0;\frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ par $f_n(t) = \dfrac{\sin(nt)}{\sin(t)}$. Alors $f_n$ est continue sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$ par théorèmes généraux et elle se prolonge par continuité en 0 en posant $f_n(0) = n$ car $\sin(u) \underset{0}{\sim} u$. Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}$, $J_n$ est bien définie en tant qu'intégrale de fonction continue sur un segment. $J_0 = \int_0^{\pi/2} 0 = 0$ et $J_1 = \int_0^{\pi/2} 1 = \frac{\pi}{2}$.
Comme $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$ et $\sin(3t) = -4\sin^3(t)+3\sin(t)$, $J_2 = \int_0^{\pi/2} 2\cos(t)dt = [2\sin(t)]_0^{\pi/2} = 2$ et $J_3 = \int_0^{\pi/2}(3-4\sin^2(t))dt = \int_0^{\pi/2}(2\cos(2t)+1)dt = \Big[\sin(2t)+t\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$.

**b.** Pour $n \in \mathbb{N}$, par linéarité de l'intégrale, on obtient $J_{n+2}-J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((n+2)t)-\sin(nt)}{\sin(t)}$ or on sait que $\sin(a)-\sin(b) = 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$ donc $J_{n+2}-J_n = \int_0^{\pi/2} 2\cos((n+1)t)dt = 2\left[\frac{\sin((n+1)t)}{n+1}\right]_0^{\pi/2}$ d'où $J_{n+2}-J_n = 0$ si $n$ est impair et $J_{n+2}-J_n = \frac{2(-1)^p}{2p+1}$ si $n = 2p$ est pair.

- Comme $J_1 = J_3 = \frac{\pi}{2}$, par une récurrence immédiate, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ J_{2n+1} = \frac{\pi}{2}$.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, par télescopage, $J_{2n} = J_0 + \sum\limits_{k=0}^{n-1}(J_{2k+2}-J_{2k}) = \sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{2(-1)^k}{2k+1}$.

**c.** Pour $x > 0$, on effectue une intégration par parties en posant $u : t \mapsto \frac{\sin(xt)}{x}$ et $v = f$ qui sont de classe $C^1$ sur le segment $[a;b]$ et on trouve $\int_a^b f(t)\cos(xt)dt = \left[\frac{\sin(xt)f(t)}{x}\right]_a^b - \frac{1}{x}\int_a^b f'(t)\sin(xt)dt$. Or on peut majorer $\left|\left[\frac{\sin(xt)f(t)}{x}\right]_a^b\right| = \left|\frac{\sin(bx)f(b)-\sin(ax)f(a)}{x}\right| \leqslant \frac{2||f||_{\infty,[a;b]}}{x}$ pour la partie "toute intégrée" et $\left|\frac{1}{x}\int_a^b f'(t)\sin(xt)dt\right| \leqslant \frac{1}{x}\int_a^b |f'(t)|dt \leqslant \frac{(b-a)||f'||_{\infty,[a;b]}}{x}$ par inégalité triangulaire sur les intégrales car $f$ et $f'$ sont continues sur le segment $[a;b]$ donc elles y sont bornées. Ainsi, par inégalité triangulaire, on arrive à $\left|\int_a^b f(t)\cos(xt)dt\right| \leqslant \frac{2||f||_{\infty,[a;b]}+(b-a)||f'||_{\infty,[a;b]}}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par encadrement, la majoration précédente permet de conclure que $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^b f(t)\cos(xt)dt = 0$.

**d.** Toujours par linéarité de l'intégrale et avec la formule $\sin(a)-\sin(b) = 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$, on trouve $J_{n+1}-J_n = \int_0^{\pi/2}\frac{2\sin(t/2)\cos(((2n+1)t)/2)}{\sin(t)}dt$. Or $\sin(t) = 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)$ donc, en simplifiant, $J_{n+1}-J_n = \int_0^{\pi/2}\frac{1}{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}\cos\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)dt$. D'après le lemme de Riemann-Lebesgue vu en **c.**, comme $f : t \mapsto \frac{1}{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}$ est de classe $C^1$ sur le segment $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n+1}{2} = +\infty$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}(J_{n+1}-J_n) = 0$.

La suite $(J_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ est constante donc elle tend vers $\frac{\pi}{2}$. Comme $J_{2n} = J_{2n+1}-(J_{2n+1}-J_{2n})$, ce qui précède montre aussi que $\lim\limits_{n\to+\infty}J_{2n} = \frac{\pi}{2}$. Comme on a les indices pairs et les indices impairs, $(J_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers $\frac{\pi}{2}$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{2(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{2}$, ce qui s'écrit aussi $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

**1.9** La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{1+m\sin^2(t)}$ est continue sur le segment $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ donc $I = \int_0^{\pi/2}\frac{dt}{1+m\sin^2(t)}$ existe. Soit maintenant $f$ définie sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ et, puisque $\sin^2(t) = \frac{\tan^2(t)}{1+\tan^2(t)}$, on en déduit que, pour $t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$, on a $f(t) = \frac{1}{1+m\sin^2(t)} = \frac{1}{1+m\frac{\tan^2(t)}{1+\tan^2(t)}} = \frac{1+\tan^2(t)}{1+(m+1)\tan^2(t)}$. Or $\varphi : t \mapsto \tan(t)$ est une bijection strictement croissante et $C^1$ de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et $\varphi'(t) = 1+\tan^2(t)$, donc par changement de variable, $I = \int_0^{+\infty}\frac{du}{1+(m+1)u^2} = \left[\frac{1}{\sqrt{m+1}}\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{m+1}\,u\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{m+1}}$. Il y avait d'autres questions.

**1.10** D'après l'énoncé, on pose $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $g(y) = f(\sqrt{y})$ pour $y \geqslant 0$. Comme $t \mapsto \sqrt{t}$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et que $f$ est de classe $C^4$ sur $\mathbb{R}_+^*$, par composition, $g$ est de classe $C^4$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par la formule de TAYLOR-YOUNG, comme $f$ est de classe $C^4$ et paire donc que $f'(0)=0$ et $f'''(0)=0$, on a $f(x) \underset{0}{=} f(0)+\dfrac{f''(0)}{2}x^2+\dfrac{f^{(4)}(0)}{24}x^4+o(x^4)$. En composant par $\sqrt{y}$, on obtient le développement limité d'ordre 2 en $0$ pour $g$, à savoir $g(y)=f(\sqrt{y}) \underset{0}{=} f(0)+\dfrac{f''(0)}{2}y+\dfrac{f^{(4)}(0)}{24}y^2+o(y^2)$.

Aspect $C^1$ : comme $g$ admet un développement limité d'ordre 1 en $0$, $g$ est dérivable en $0$ et $g'(0)=\dfrac{f''(0)}{2}$. Pour $y>0$, on a $g'(y)=\dfrac{f'(\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}$. Or, $f'$ étant de classe $C^3$ avec $f'(0)=0$ car $f$ est paire, on a le développement limité à l'ordre 1 suivant de $f'$ en $0$, à savoir $f'(x) \underset{0}{=} f''(0)x+o(x)$. En posant $x=\sqrt{y}$, on obtient $f'(\sqrt{y}) \underset{0}{=} f''(0)\sqrt{y}+o(\sqrt{y})$ qui justifie que $g'(y) \underset{0}{=} \dfrac{f''(0)}{2}+o(1)$ donc que $\lim\limits_{y\to 0^+} g'(y)=g'(0)$ et $g'$ est continue en $0$. Avec ce qui précède, on a bien établi l'aspect $C^1$ de $g$ sur $\mathbb{R}_+$.

Aspect $C^2$ : pour $y>0$, comme $g'(y)=\dfrac{f'(\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}$, on a $\dfrac{g'(y)-g'(0)}{y-0}=\dfrac{f'(\sqrt{y})-f''(0)\sqrt{y}}{2y\sqrt{y}}$. Comme $f'$ est de classe $C^3$ et paire sur $\mathbb{R}$, elle admet un développement limité en $0$ à l'ordre 3 par TAYLOR-YOUNG qui s'écrit, comme $f'(0)=f'''(0)=0$, $f'(x) \underset{0}{=} f''(0)x+\dfrac{f^{(4)}(0)}{6}x^3+o(x^3)$ donc, en composant par $\sqrt{y}$, on obtient $f'(\sqrt{y}) \underset{0}{=} f''(0)\sqrt{y}+\dfrac{f^{(4)}(0)}{6}y\sqrt{y}+o(y\sqrt{y})$. Ceci montre que $\dfrac{g'(y)-g'(0)}{y-0} \underset{0}{=} \dfrac{f^{(4)}(0)}{12}+o(1)$ donc que $g$ est deux fois dérivable en $0$ avec $g''(0)=\lim\limits_{y\to 0^+}\dfrac{g'(y)-g'(0)}{y-0}=\dfrac{f^{(4)}(0)}{12}$. Montrons que $g''$ est continue en $0$.

Après calculs, on a $\forall y>0,\ g''(y)=\dfrac{\sqrt{y}\,f''(\sqrt{y})-f'(\sqrt{y})}{4y\sqrt{y}}$. Or $f'(\sqrt{y}) \underset{0}{=} f''(0)\sqrt{y}+\dfrac{f^{(4)}(0)}{6}y\sqrt{y}+o(y\sqrt{y})$ et, comme $f''$ est de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}$, on a par TAYLOR-YOUNG $f''(x) \underset{0}{=} f''(0)+\dfrac{f^{(4)}(0)}{2}x^2+o(x^2)$ donc, en composant par $\sqrt{y}$, cela donne $f''(\sqrt{y}) \underset{0}{=} f''(0)+\dfrac{f^{(4)}(0)}{2}y+o(y)$. En reportant dans l'expression de $g''(y)$, $g''(y)=\dfrac{1}{4y\sqrt{y}}\Big[\sqrt{y}\Big(f''(0)+\dfrac{f^{(4)}(0)}{2}y+o(y)\Big)-\Big(f''(0)\sqrt{y}+\dfrac{f^{(4)}(0)}{6}y\sqrt{y}+o(y\sqrt{y})\Big)\Big] \underset{0}{=} \dfrac{f^{(4)}(0)}{12}+o(1)$. Ceci montre que $\lim\limits_{y\to 0^+} g''(y)=g''(0)=\dfrac{f^{(4)}(0)}{12}$ donc que $g$ est de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}_+$ avec ce qui précède. Par le théorème de prolongement $C^1$ (ici de $g'$ en $0$), le calcul préalable de $g''(0)$ n'était pas nécessaire.

**1.11** **a.** Comme $f$ est continue, positive et non nulle sur $[a;b]$, d'après la contraposée d'un théorème du cours, il vient $A=\displaystyle\int_a^b f(x)dx>0$. Comme $f$ est continue sur $[a;b]$, d'après le théorème fondamental de l'intégration, $F:[a;b]\to\mathbb{R}$ définie par $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est la primitive de $f$ qui s'annule en $a$ sur $[a;b]$. $F$ est donc de classe $C^1$, strictement croissante car $f>0$ donc $F$ réalise une bijection de l'intervalle $[a;b]$ dans $[0;A]$.
Pour $n\in\mathbb{N}^*$, les conditions imposées à $x_0,x_1,\cdots,x_n$ reviennent à $\forall k\in[\![1;n]\!], F(x_k)-F(x_{k-1})=\dfrac{A}{n}$ donc, puisque $x_0=a$ est imposé donc $F(x_0)=0$, les conditions imposées se résument à $\forall k\in[\![0;n]\!],\ F(x_k)=\dfrac{kA}{n}$. Ceci montre l'existence et l'unicité de la subdivision demandée et qu'on a $\forall k\in[\![0;n]\!],\ x_k=F^{-1}\Big(\dfrac{kA}{n}\Big)$.

**b.** Pour $n\geqslant 1$, $u_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f\Big(F^{-1}\big(\frac{kA}{n}\big)\Big)=\frac{1}{A}\times\Big[\frac{A}{n}\sum_{k=0}^{n} g\Big(\frac{kA}{n}\Big)\Big]=\frac{g(0)}{n}+\frac{1}{A}\times\Big[\frac{A}{n}\sum_{k=1}^{n} g\Big(\frac{kA}{n}\Big)\Big]$ en définissant $g:[0;A]\to\mathbb{R}$ par $g(x)=f\circ F^{-1}(x)$. Comme $g$ est continue sur le segment $[0;A]$ par composition puisque $F^{-1}$ est continue de $[0;A]$ dans $[a;b]$, le théorème sur les sommes de RIEMANN montre que l'on a

$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{A}\int_0^A g(x)dx = \frac{1}{A}\int_0^A f\circ F^{-1}(x)dx$. On peut effectuer le changement de variable $x = F(t)$ car $F$ est de classe $C^1$, bijective et strictement croissante de $[a;b]$ dans $[0;A]$ et on obtient la nouvelle expression $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{A}\int_a^b \big(f\circ F^{-1}\circ F(t)\big)\times f(t)dt = \frac{1}{A}\int_a^b f(t)^2 dt$ car $F'(t) = f(t)$. Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{\int_a^b (f(x))^2dx}{\int_a^b f(x)dx}$.

**1.12** Soit $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+$ définie par $g(t) = \frac{|\sin(t)|}{t}$. La fonction $g$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations et se prolonge par continuité en $0$ en posant $g(0) = 1$ car $|\sin(t)| \underset{t\to0^+}{\sim} \sin(t) \underset{t\to0^+}{\sim} t$. Comme $g$ est maintenant continue sur le segment $[0;x]$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $f$ est bien définie sur $\mathbb{R}_+$, c'est même d'après le théorème fondamental de l'intégration la primitive de $g$ qui s'annule en $0$. Comme la fonction $g$ s'annule en tous les multiples de $\pi$, on va considérer $f(n\pi)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Par la relation de Chasles, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f(n\pi) = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} g(t)dt$. Pour $k \in [\![0;n-1]\!]$, on pose dans $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} g(t)dt$ le changement de variable affine $t = u + k\pi = \varphi_k$ avec $\varphi_k$ de classe $C^1$ sur $[0;\pi]$ pour avoir $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} g(t)dt = \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{u+k\pi}du$ car $\sin$ est positif sur $[0;\pi]$. On somme ces inégalités pour obtenir l'encadrement $\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^\pi \frac{\sin(u)}{\pi+k\pi}du \leqslant f(n\pi) = \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^\pi \frac{\sin(u)}{u+k\pi}du \leqslant \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{u}du + \sum_{k=1}^{n-1}\int_0^\pi \frac{\sin(u)}{k\pi}du$. En posant $H_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, il est classique que $H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$. De plus, $\int_0^\pi \sin(u)du = \big[-\cos(u)\big]_0^\pi = 2$ donc $\frac{2H_n}{\pi} \leqslant f(n\pi) \leqslant I + \frac{2H_{n-1}}{\pi}$ en posant $I = \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{u}du$. Comme $\frac{2H_n}{\pi} \underset{+\infty}{\sim} I + \frac{2H_{n-1}}{\pi} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2\ln(n)}{\pi}$ car $\ln(n-1) = \ln(n) + \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$, par encadrement, on a $f(n\pi) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2\ln(n)}{\pi}$.

De plus, par définition de la partie entière, pour $x \in \mathbb{R}_+$, en posant $n_x = \left\lfloor \frac{x}{\pi} \right\rfloor$, on a $n_x \leqslant \frac{x}{\pi} < n_x + 1$ donc $n_x\pi \leqslant x < (n_x+1)\pi$. Comme la fonction $f$ est croissante car $f' = g \geqslant 0$ sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$, on en déduit que $f(n_x\pi) \leqslant f(x) \leqslant f((n_x+1)\pi)$. D'après ce qui précède, on a $f(n_x\pi) \underset{+\infty}{\sim} f((n_x+1)\pi) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2\ln(n_x)}{\pi}$ car $\lim_{x\to+\infty} n_x = +\infty$ puisque $n_x > \frac{x}{\pi} - 1$ donc, par encadrement, $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2\ln(n_x)}{\pi}$. Mais $\frac{x}{\pi} - 1 < n_x \leqslant \frac{x}{\pi}$ donc, par croissance de la fonction $\ln$, $\ln\left(\frac{x}{\pi} - 1\right) \leqslant \ln(n_x) \leqslant \ln\left(\frac{x}{\pi}\right)$ donc $\ln(n_x) \underset{+\infty}{\sim} \ln\left(\frac{x}{\pi}\right) = \ln(x) - \ln(\pi) \underset{+\infty}{\sim} \ln(x)$.

Par conséquent, $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2\ln(x)}{\pi}$.