TD 02 : INTÉGRALES

PSI 1 2024-2025 **vendredi 13 septembre 2024**

2.1 *CCP PSI 2015* Arthur Lacombe

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue telle qu'il existe $C > 0$ et $a \in \mathbb{R}$ qui vérifient : $\forall t \geqslant 0,\ |f(t)| \leqslant Ce^{at}$.

a. Montrer que : $\forall x > a,\ F(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt$ converge.

b. On suppose ici que $a \leqslant 0$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$, montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} xF(x) = 1$.

2.2 *Mines PSI 2017* Adrien Cassagne I

Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\text{th}\,(3x) - \text{th}\,(2x)}{x}dx$.

2.3 *Mines PSI 2018* Colin Baumgard et Marion Lebrun I

Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt$.

a. Montrer que f est bien définie et dérivable sur $I = \mathbb{R}_+^*$. Donner l'expression de $f'(x)$.

b. Donner des équivalents simples de $f(x)$ quand x tend vers 0 et quand x tend vers $+\infty$.

c. Montrer que f est intégrable sur I et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$.

2.4 *ICNA PSI 2018* Quentin Meynieu I

Soit F définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{x^2 + t^2}dt$.

a. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_F$ de F.

b. Calculer $F(1)$. Indication : on pourra poser $u = \dfrac{1}{t}$.

c. En déduire la valeur de $F(x)$ pour $x \in \mathcal{D}_F$.

2.5 *X PSI 2021* Antoine Greil I

Soit une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, de classe C^1 et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ telle que f' est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Montrer que f tend vers 0 en $+\infty$.

2.6 *ENS Cachan PSI 2023* Alban Dujardin II

Soit $a > 0$ et, en cas de convergence, $I(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp\left(-t^2 - \frac{a^2}{t^2}\right)dt$ et $J(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{a}{t^2}\exp\left(-t^2 - \frac{a^2}{t^2}\right)dt$.

On rappelle la valeur de l'intégrale de Gauss : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

a. Montrer l'existence de $I(a)$ et $J(a)$.

b. Montrer que $I(a) = J(a)$.

c. Montrer que $I(a) = \dfrac{e^{-2a}}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(1 + \frac{a}{t^2}\right)\exp\left(-\left(t - \frac{a}{t}\right)^2\right)dt$.

d. En déduire que $I(a) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2a}$.

2.7 *Centrale Maths1 PSI 2023* Elae Terrien

a. Pour tout réel $x \in]-1;+\infty[$, montrer la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^x \ln(t) dt}{t-1}$.

On définit $H :]-1;+\infty[\to \mathbb{R}$ par $H(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x \ln(t) dt}{t-1}$.

b. Montrer que H est décroissante sur $]-1;+\infty[$.

c. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} H(x) = 0$.

d. Donner un équivalent simple de $H(x)$ quand x tend vers -1^+. Indication : considérer $H(x) - H(x+1)$.

e. Donner un équivalent simple de $H(x)$ quand x tend vers $+\infty$. Indication : considérer $H(x) - H(x+1)$.

2.8 *Mines PSI 2023* Maddie Bisch I

a. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge.

b. Montrer que $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt$.

2.9 *Mines PSI 2023* Marius Desvalois II

a. Soit $f : [0;1] \to \mathbb{R}_+$ continue. Montrer que $\displaystyle\left(\int_0^1 f^3\right)^2 \leqslant \int_0^1 f^5 \times \int_0^1 f$. Cas d'égalité ?

b. Soit $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f(0) = 0$ et $\forall x \in [0;1],\ f'(x) \in [0;1]$. Montrer $\displaystyle\int_0^1 f^3 \leqslant \left(\int_0^1 f\right)^2$.

c. Quel est le cas d'égalité dans l'inégalité de la question précédente ?

2.10 *Mines PSI 2021 et Mines PSI 2023* Aloïs Doucet II et Jonathan Filocco II

a. Montrer qu'il existe un unique $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\lambda - \sin(t)}{t} dt$ converge.

Soit $T > 0$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et T-périodique.

b. Montrer qu'il existe un unique $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\lambda - f(t)}{t} dt$ converge.

2.11 *Mines PSI 2021 et Mines PSI 2023* Adèle Robert I et Gabriel Hofman I

On pose $\omega = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{i\sqrt{3}}{2}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{\omega x} dx$.

a. Calculer I_n. En déduire une fonction $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ non nulle telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\int_0^{+\infty} g(t) t^n dt = 0$.

b. Soit $f : [a;b] \to \mathbb{C}$ continue (avec $a < b$ réels) telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\int_a^b f(t) t^n = 0$.

Montrer que $f = 0$. Indication : on admet que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists P \in \mathbb{C}[X],\ \forall t \in [a;b],\ |f(t) - P(t)| \leqslant \varepsilon$.

Question subsidiaire : montrer que si $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ est continue et positive et que $\displaystyle\int_a^b f(t) dt = 0$, alors $f = 0$.