CHAPITRE 2
ALGÈBRE LINÉAIRE

⊙ La notion d'espace vectoriel naît conceptuellement de la géométrie affine avec l'introduction des coordonnées dans un repère du plan ou de l'espace usuel. Vers 1636, DESCARTES et FERMAT donnèrent les bases de la géométrie analytique en associant la résolution d'une équation à deux inconnues à la détermination graphique d'une courbe du plan.

Afin de parvenir à une résolution géométrique sans utiliser la notion de coordonnées, BOLZANO introduisit en 1804 des opérations sur les points, droites et plans, lesquelles sont les précurseurs des vecteurs. Ce travail trouve un écho dans la conception des coordonnées barycentriques par MÖBIUS en 1827. L'étape fondatrice de la définition des vecteurs fut la définition par BELLAVITIS du bipoint, qui est un segment orienté (une extrémité est une origine et l'autre un but). La relation d'équipollence, qui rend équivalents deux bipoints lorsqu'ils déterminent un parallélogramme, achève ainsi de définir les vecteurs.

La notion de vecteur est reprise avec la présentation des nombres complexes par ARGAND et HAMILTON, puis celle des quaternions par ce dernier, comme des éléments des espaces respectifs $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^4$. Le traitement par combinaison linéaire se retrouve dans les systèmes d'équations linéaires, définis par LAGUERRE dès 1867.

En 1857, CAYLEY introduisit la notation matricielle, qui permit d'harmoniser les notations et de simplifier l'écriture des applications linéaires. Il ébaucha également les opérations sur ces objets.

Vers la même époque, GRASSMANN reprit le calcul barycentrique initié par MÖBIUS en envisageant des ensembles d'objets abstraits munis d'opérations. Son travail dépassait le cadre des espaces vectoriels car, en définissant aussi la multiplication, il aboutissait à la notion d'algèbre. Néanmoins, il étudie les concepts de dimension et d'indépendance linéaire, et le produit scalaire apparu en 1844. La primauté de ces découvertes est disputée à CAUCHY avec la publication de "Sur les clefs algébriques" dans les "Comptes Rendus".

PEANO, axiomatisant rigoureusement les concepts existants, notamment la construction des ensembles usuels, a été un des premiers à donner une définition contemporaine du concept d'espace vectoriel vers 1888.

Un développement important de ce concept est dû à la construction des espaces de fonctions par LEBESGUE, formalisée au XXe siècle par HILBERT et BANACH, lors de sa thèse de doctorat en 1920.

C'est à cette époque que l'interaction entre l'analyse fonctionnelle naissante et l'algèbre se fait sentir, notamment avec l'introduction de concepts clés tels que les espaces de fonctions p-intégrables ou encore les espaces de HILBERT, et qu'apparaissent les premières études sur les espaces vectoriels de dimension infinie.

Bien que le calcul matriciel proprement dit n'apparaisse qu'au début du XIXe siècle, les matrices, en tant que tableaux de nombres, ont une longue histoire d'applications à la résolution d'équations linéaires. Le texte chinois "Les Neuf Chapitres sur l'art mathématique", écrit vers le IIe siècle av. J.-C., est le premier exemple connu de l'utilisation de tableaux pour résoudre des systèmes d'équations, introduisant même le concept de déterminant. En 1545, CARDANO fait connaître cette méthode en Europe en publiant son "Ars Magna". Le mathématicien japonais SEKI KOWA utilise indépendamment les mêmes techniques pour résoudre des systèmes d'équations en 1683. Entre 1700 et 1710, LEIBNIZ montre comment utiliser les tableaux pour noter des données ou des solutions. En 1750, CRAMER publie la règle qui porte son nom.

En 1850, le terme de matrix (traduit par matrice - racine latine mater) est forgé par SYLVESTER, qui le voit comme un objet donnant naissance à la famille de déterminants actuellement appelés mineurs.

En 1854, CAYLEY publie un traité sur les transformations géométriques utilisant les matrices de façon beaucoup plus générale que tout ce qui a été fait avant lui. Il définit les opérations usuelles du calcul matriciel (addition, multiplication et division) et montre les propriétés d'associativité et de distributivité de la multiplication. Jusque là, l'utilisation des matrices s'était essentiellement limité au calcul des déterminants ; cette approche abstraite est révolutionnaire. En 1858, CAYLEY publie son "A Memoir on the Theory of Matrices", dans lequel il énonce et démontre le théorème de CAYLEY-HAMILTON pour les matrices 2×2.

Après CAUCHY, HAMILTON généralise le théorème aux matrices 4×4 et, en 1898, FROBENIUS le démontre en dimension quelconque en étudiant les formes bilinéaires. À la fin du XIXe siècle, JORDAN établit la méthode d'élimination de GAUSS-JORDAN (généralisant la méthode de GAUSS pour les matrices échelonnées).

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera le corps commutatif $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

TABLE DES MATIÈRES

PROGRAMME

Dans toute cette partie, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Le programme est organisé autour de trois objectifs :

- *consolider les acquis de la classe de première année ;*
- *introduire de nouveaux concepts préliminaires à la réduction des endomorphismes : somme de plusieurs sous-espaces vectoriels, somme directe, sous-espaces stables, matrices par blocs, trace, polynômes d'endomorphismes et de matrices carrées, polynômes interpolateurs de* LAGRANGE *;*
- *passer du point de vue vectoriel au point de vue matriciel et inversement.*

Le programme valorise les interprétations géométriques et préconise l'illustration des notions et résultats par de nombreuses figures.

1 : Produit d'espaces vectoriels, somme de sous-espaces vectoriels

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels ; dimension dans le cas où ces espaces sont de dimension finie.	
Somme, somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels.	
En dimension finie, base adaptée à un sous-espace vectoriel, à une décomposition $E = \bigoplus E_i$.	Décomposition en somme directe obtenue par partition d'une base.
Si $F_1, \dots, F_p$ sont des sous-espaces de dimension finie, $$\dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$$ avec égalité si et seulement si la somme est directe.	

2 : Matrices par blocs et sous-espaces stables

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Matrices définies par blocs, opérations par blocs de tailles compatibles (combinaison linéaire, produit, transposition).	
Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.	
Sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme, endomorphisme induit.	Traduction matricielle de la stabilité d'un sous-espace vectoriel par un endomorphisme et interprétation en termes d'endomorphismes d'une matrice triangulaire ou diagonale par blocs.
Si u et v commutent alors le noyau de u est stable par v.	

3 : Trace

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Trace d'une matrice carrée.	Notation $\mathrm{tr}(A)$.
Linéarité, trace d'une transposée.	
Relation $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.	
Invariance de la trace par similitude. Trace d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie.	

4 : Polynômes d'endomorphismes et de matrices carrées

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Polynôme d'un endomorphisme, d'une matrice carrée.	Relation $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$.
Polynôme annulateur.	Application au calcul de l'inverse et des puissances.
Deux polynômes de l'endomorphisme u commutent.	Le noyau de $P(u)$ est stable par u.
Adaptation de ces résultats aux matrices carrées.	

5 : Interpolation de LAGRANGE

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Base de $\mathbb{K}_n[X]$ constituée des polynômes interpolateurs de LAGRANGE en $n+1$ points distincts de $\mathbb{K}$.	Expression d'un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ dans cette base. La somme des polynômes interpolateurs de LAGRANGE en $n+1$ points est le polynôme constant égal à 1.
Déterminant de VANDERMONDE.	Lien avec le problème d'interpolation de LAGRANGE.

PARTIE 2.1 : RÉVISIONS

2.1.1 : Structures de groupe, d'anneaux, de corps

DÉFINITION 2.1 :
Soit une ensemble G *non vide muni d'une* **loi de composition interne** *notée* $* : G^2 \to G$ *(on notera* $x * y$ *le "produit" de* x *par* y*), alors on dit que* $(G, *)$ *est un* **groupe** *si :*

- *il existe un élément neutre* e *dans* G*, c'est-à-dire que* $\forall x \in G,\ e * x = x * e = x$.
- *la loi* $*$ *est associative, c'est-à-dire que* $\forall (x, y, z) \in G^3,\ x * (y * z) = (x * y) * z$.
- *tout élément de* G *admet un symétrique, c'est-à-dire que* $\forall x \in G,\ \exists y \in G, x * y = y * x = e$.

Si la loi $*$ *est commutative dans* G*, c'est-à-dire si* $\forall (x, y) \in G^2,\ x * y = y * x$*, on dit que* $(G, *)$ *est un* **groupe abélien** *ou un groupe commutatif.*

REMARQUE 2.1 : • *Le neutre et le symétrique d'un élément* x *de* G *sont uniques et on note* $y = x^{-1}$.

• *Si la loi est multiplicative (resp. additive), on dira plutôt inverse (resp. opposé) au lieu de symétrique.*

EXEMPLE 2.1 : • $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$ sont des groupes additifs.

• $(\mathbb{Q}^*, \times)$, $(\mathbb{R}^*, \times)$, $(\mathbb{C}^*, \times)$ sont des groupes multiplicatifs.

• $(\mathbb{U}, \times)$ (les complexes de module 1) et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(\mathbb{U}_n, \times)$ (les racines n-ièmes de l'unité) sont aussi un groupe multiplicatif.

• Pour un ensemble non vide E, l'ensemble des bijections de E dans E est un groupe avec la loi $\circ$.

• Quand E vaut $[\![1; n]\!]$, ce groupe est noté S_n des permutations de $[\![1; n]\!]$ et il a $n!$ éléments.

• Pour chaque objet du plan ou de l'espace, l'ensemble des isométries affines qui laissent globalement cet objet invariant est un groupe pour la composition : il y a les groupes diédraux des polyèdres réguliers du plan, le groupe du losange (également appelé groupe de Klein), le groupe du cube qui a 48 éléments, le groupe du Rubik's cube qui en a 43252003274489856000.

DÉFINITION 2.2 :
Soit $(G, *)$ *un groupe et* $H \subset G$*, on dit que* H *est un* **sous-groupe** *de* G *si :*

- H *est non vide.*
- $\forall (x, y) \in H^2,\ x * y \in H$ *(stabilité par "produit").*
- $\forall x \in H,\ x^{-1} \in H$ *(stabilité par " inverse").*

PROPOSITION SUR LA STRUCTURE DE GROUPE D'UN SOUS-GROUPE 2.1 :
Tout sous-groupe H **d'un groupe** G **est lui-même un groupe pour la loi** $*$ **induite.**

REMARQUE 2.2 : • $(\mathbb{Z}, +)$ *est un sous-groupe de* $(\mathbb{R}, +)$.

• *Tout* $\mathbb{U}_n$ *est un sous-groupe de* $\mathbb{U}$*. Et* $\mathbb{U}_n$ *est un sous-groupe de* $\mathbb{U}_m$ *si* n *divise* m.

DÉFINITION 2.3 :

Soit A *un ensemble non vide muni de deux lois* $+$ *et* $\times$ *internes, on dit que* $(A, +, \times)$ *est un* **anneau** *si :*
- $(A, +)$ *est un groupe abélien dont on note* 0_A *le neutre (et* $-a$ *l'opposé de* a*).*
- *il existe un neutre* $1_A \neq 0_A$ *pour* $\times$ *dans* A.
- *la loi* $\times$ *est associative dans* A.
- *la loi* $\times$ *est distributive % à* $+$ *:* $\forall (x, y, z) \in A^3,\ x \times (y + z) = x \times y + x \times z$ *et* $(x + y) \times z = x \times z + y \times z$.

Un anneau A *tel que* $\times$ *est commutative dans* A *est dit un* **anneau commutatif**.
Un anneau A *tel que* $\forall (x, y) \in A^2,\ x \times y = 0_A \Longrightarrow (x = 0_A$ *ou* $y = 0_A)$ *est dit un* **anneau intègre**.
Un élément $x \in A$ *tel que* $\exists y \in A,\ x \times y = y \times x = 1_A$ *est dit* **inversible**.
Un élément $x \in A$ *tel que* $\exists n \in \mathbb{N}^*,\ x^n = 0_A$ *est dit* **nilpotent**.
Un élément $x \in A$ *tel que* $x \times x = x$ *est dit* **idempotent**.
Un élément $x \in A$ *tel que* $x \times x = 1_A$ *est dit* **involutif**.

EXEMPLE 2.2 : • $(\mathbb{Z}, +, \times)$, $(\mathbb{Q}, +, \times)$, $(\mathbb{R}, +, \times)$, $(\mathbb{C}, +, \times)$ sont des anneaux commutatifs.
- $(\mathbb{R}[X], +, \times)$, $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \times)$, $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \times)$, $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \times)$ sont des anneaux classiques.
- $\big(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times\big)$ (les entiers et opérations modulo n) est un anneau commutatif.
- $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \mid (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$ est un anneau commutatif (les entiers de GAUSS).

PROPOSITION SUR LE BINÔME DE NEWTON, LES SUITES GÉOMÉTRIQUES 2.2 :
Si $(x, y) \in A^2$ **et** $x \times y = y \times x$ **(on dit que** x **et** y **commutent) alors, pour** $n \in \mathbb{N}^*$ **:**

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}, \quad x^n - y^n = (x - y) \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k+1} y^k, \quad x^{2n+1} + y^{n+1} = (x + y) \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k x^{2n-k} y^k.$$

REMARQUE 2.3 : Comme avant, $A' \subset A$ *est un sous-anneau de* A *si* $A' \neq \emptyset$*, si* $1_A \in A'$ *et si* A' *est stable par somme, opposé et produit. Un sous-anneau d'un anneau est à nouveau un anneau lui-même.*

EXEMPLE 2.3 : Les suites bornées, stationnaires, constantes, périodiques, convergentes forment des sous-anneaux de l'anneau des suites.

PROPOSITION SUR LA STRUCTURE DE L'ENSEMBLE DES INVERSIBLES 2.3 :
L'ensemble des éléments inversibles d'un anneau forme un groupe note $A^\times$ **pour la loi** $\times$**.**

EXEMPLE 2.4 : L'ensemble des inversibles de $\mathbb{Z}[i]$ est $\mathbb{Z}[i]^\times = \mathbb{U}_4 = \{1, i, -1, -i\}$.

DÉFINITION 2.4 :

Un ensemble C *muni de deux lois de composition interne* $+$ *et* $\times$ *est dit un* **corps** *si :*
- $(C, +, \times)$ *est un anneau.*
- *si tout élément* x *de* C *différent de* 0_C *admet un inverse :* $\forall x \in C \setminus \{0_C\},\ \exists y \in C,\ x \times y = y \times x = 1_C$.

Un corps C *est dit un* **corps commutatif** *si la loi* $\times$ *est commutative dans* C.

REMARQUE 2.4 : Un anneau A *est un corps si et seulement si* $A \setminus \{0_A\}$ *est un groupe pour la loi* $\times$.

EXEMPLE 2.5 : • $(\mathbb{Q}, +, \times)$, $(\mathbb{R}, +, \times)$, $(\mathbb{C}, +, \times)$ sont des corps commutatifs.
- Les quaternions $\mathbb{H}$ forment un corps non commutatif très utile en géométrie de l'espace.
- $(\mathbb{K}(X), +, \times)$ (les fractions rationnelles) est un corps commutatif.
- $\big(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times\big)$ est un corps si et seulement si n est un nombre premier.

REMARQUE 2.5 : Comme avant, $C' \subset C$ *est un sous-corps de* C *si* $C' \neq \emptyset$*, si* $1_C \in C'$ *et si* C' *est stable par somme, opposé, produit et inverse de tout élément non nul. Un sous-corps d'un corps est à nouveau un corps lui-même.*

EXEMPLE 2.6 : $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid (a, b) \in \mathbb{Q}^2\}$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$.

2.1.2 : Structure d'espace vectoriel

DÉFINITION 2.5 :
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif (ses éléments seront appelés les **scalaires***), E un ensemble non vide (ses éléments seront appelée* **vecteurs** *mais notés sans flèche), on dit que E est un* **$\mathbb{K}$-espace vectoriel** *s'il existe une loi interne $+$ et une loi externe ., c'est-à-dire $+ : E \times E \to E$ et . : $\mathbb{K} \times E \to E$ qui vérifient :*
- $(E, +)$ *est un groupe abélien (le neutre est noté 0_E).*
- $\forall x \in E,\ 1_{\mathbb{K}}.x = x$ *(pseudo-neutre).*
- $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall x \in E,\ (\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x$ *(pseudo-distributivité 1).*
- $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall (x, y) \in E^2,\ \lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y$ *(pseudo-distributivité 2).*
- $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall x \in E,\ \lambda.(\mu.x) = (\lambda\mu).x$ *(pseudo-associativité).*

EXEMPLE 2.7 : On a beaucoup d'exemples d'espaces vectoriels en géométrie, algèbre et analyse :
- L'espace $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ muni des lois + et . naturelles.
- L'espace des fonctions d'un ensemble Ω dans $\mathbb{K}$, noté $\mathbb{K}^{\Omega}$.
- L'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles indexées par $\mathbb{N}$ avec les lois naturelles.
- L'espace $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- L'espace $\mathbb{R}^3$ des vecteurs de l'espace : les triplets (x, y, z) de réels.
- L'espace $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes et à coefficients dans $\mathbb{K}$.

REMARQUE 2.6 :
- *Si on prend dans $\mathbb{K}$ comme loi interne la loi + du corps et comme loi "externe" la loi interne $\times$ du corps alors $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel : on dit qu'on le munit de sa structure vectorielle canonique.*
- *Plus généralement, si $\mathbb{L}$ est un sur-corps de $\mathbb{K}$ (corps commutatif) alors, avec les mêmes choix, $\mathbb{L}$ est muni naturellement d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*
- $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E$, $\lambda.0_E = 0_E = 0_{\mathbb{K}}.x$, $\lambda.(-x) = (-\lambda).x = -(\lambda.x)$ et $\lambda.x = 0_E \iff (\lambda = 0_{\mathbb{K}}$ ou $x = 0_E)$.

DÉFINITION 2.6 :
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $p \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \cdots, x_p) \in E^p$. On appelle **combinaison linéaire** *de $x_1, \cdots, x_p$ tout vecteur x de E qui peut s'écrire $x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_p x_p$ avec $(\lambda_1, \cdots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$.*
On note $\mathrm{Vect}(x_1, \cdots, x_p)$ l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $x_1, \cdots, x_p$, c'est-à-dire qu'on a l'égalité $\mathrm{Vect}(x_1, \cdots, x_p) = \left\{ \sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k x_k \;\middle|\; (\lambda_1, \cdots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p \right\}$.

REMARQUE 2.7 : (HP) Généralisation ; soit une famille quelconque $(x_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E, on appelle combinaison linéaire de cette famille tout vecteur x de E qui s'écrit $x = \sum\limits_{i \in I} \lambda_i x_i$ où $(\lambda_i)_{i \in I}$ est une famille de scalaires pour laquelle $J = \{i \in I \mid \lambda_i \neq 0_K\}$ est fini (on dit que $(\lambda_i)_{i \in I}$ est **à support fini***) de sorte que $x = \sum\limits_{i \in I} \lambda_i x_i$ s'interprète comme étant $x = \sum\limits_{i \in J} \lambda_i x_i$ (car $0_{\mathbb{K}}.x_i = 0_E$ est neutre pour l'addition).*
On note $\mathbb{K}^{(I)}$ l'ensemble de toutes les familles $(\lambda_i)_{i \in I}$ à support fini. On définit l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des $(x_i)_{i \in I}$, noté encore $\mathrm{Vect}\big((x_i)_{i \in I}\big) = \{ x = \sum\limits_{i \in I} \lambda_i x_i \mid (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^{(I)} \}$.
Si A est une partie de E, on note même $\mathrm{Vect}(A)$ le sous-espace $\mathrm{Vect}\big((x)_{x \in A}\big)$.

EXEMPLE 2.8 : Avec cette définition : $\mathrm{Vect}\big((X^k)_{k \in \mathbb{N}}\big) = \mathbb{C}[X]$.

REMARQUE 2.8 : On appelle **relation linéaire** *entre les vecteurs $x_1, \cdots, x_p$ toute combinaison linéaire de ces vecteurs qui donne 0_E avec des scalaires non tous nuls.*

EXEMPLE 2.9 : Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $f_1 : x \mapsto e^x$, $f_2 : x \mapsto e^{-x}$, $f_3 : x \mapsto \text{ch}(x)$, $f_4 : x \mapsto \text{sh}(x)$, on a $f_3 + f_4 - f_1 = 0$ et $2f_4 - f_1 + f_2 = 0$ par exemple.

2.1.3 : Sous-espaces vectoriels

DÉFINITION 2.7 :
Soit E *un espace,* $F \subset E$ *est dit un* **sous-** $\mathbb{K}$**-espace vectoriel** *(ou* **sous-espace vectoriel** *ou sev) si :*
• $F \neq \emptyset$ • $\forall (x, y) \in F^2,\ x + y \in F$ *(*F *est stable par* $+$*)* • $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times F,\ \lambda.x \in F$ *(*F *est stable par .).*

REMARQUE FONDAMENTALE 2.9 : • $\{0_E\}$ *et* E *sont deux sous-espaces vectoriels d'un espace* E.

• *Un sous-espace vectoriel d'un espace* E *est lui-même un espace vectoriel.*

PROPOSITION 2.4 :
Soit E **un espace et** $(F_i)_{i \in I}$ **une famille de sevs de** E**, alors** $\bigcap_{i \in I} F_i$ **est aussi un sev de** E**.**

EXEMPLE 2.10 :
• Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, les fonctions paires constituent un sous-espace de E, comme les fonctions impaires, continues, constantes, dérivables, bornées.
• Dans le $\mathbb{K}$-espace vectoriel E des suites indexées par $\mathbb{N}$ alors les suites bornées, convergentes, stationnaires constituent à chaque fois un sous-espace vectoriel.
• Dans l'espace des polynômes $\mathbb{K}[X]$, les polynômes pairs, impairs, s'annulant en 0, $\mathbb{K}_n[X]$ pour $n \in \mathbb{N}$, constituent un sous-espace vectoriel.

PROPOSITION 2.5 :
Avec les mêmes notations que ci-dessus, on a l'équivalence entre :
(i) F **est un sous-espace vectoriel de** E**.**
(ii) $F \neq \emptyset$ **et** $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall (x, y) \in F^2,\ \lambda.x + \mu.y \in F$**.**
(iii) $F \neq \emptyset$ **et** $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall (x, y) \in F^2,\ \lambda.x + y \in F$**.**

PROPOSITION 2.6 :
Avec les notations ci-dessus, $\text{Vect}(x_1, \cdots, x_p)$ **est un sous-espace de** E**.**
• $\text{Vect}(x_1, \cdots, x_p)$ **est le plus petit sous-espace de** E **qui contient les** $x_1, \cdots, x_p$**.**
• $\text{Vect}(x_1, \cdots, x_p)$ **est l'intersection de tous les sous-espaces de** E **contenant les** $x_1, \cdots, x_p$**.**

REMARQUE 2.10 : Tout sous-espace F *de* E *contenant* $x_1, \cdots, x_p$ *contient donc* $\text{Vect}(x_1, \cdots, x_p)$.

REMARQUE HP 2.11 : Plus généralement :

• *si* $(x_i)_{i \in I}$ *est une famille quelconque de vecteurs d'un espace* E*, l'ensemble* $\text{Vect}\big((x_i)_{i \in I}\big)$*, noté aussi* $\text{Vect}_{i \in I}(x_i)$*, est aussi un sous-espace vectoriel de* E *qui est à la fois le plus petit sous-espace de* E *qui contient tous les vecteurs de la famille* $(x_i)_{i \in I}$ *mais aussi l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de* E *qui contiennent les vecteurs de la famille* $(x_i)_{i \in I}$.

• *À nouveau, si* A *est une partie de* E*,* $\text{Vect}(A)$ *est un sous-espace de* E *qui est à la fois le plus petit sous-espace de* E *qui contient tous les vecteurs de la famille* $(x_i)_{i \in I}$ *mais aussi l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de* E *qui contiennent les vecteurs de la famille* $(x_i)_{i \in I}$.

2.1.4 : Sommes de deux sous-espaces et supplémentaires

DÉFINITION 2.8 :
Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* F, G *deux sous-espaces de* E, *on dit que :*

- $F+G$ *est* **la somme de** F **et** G *s'il est défini par* $F+G=\{z\in E \mid \exists(x,y)\in F\times G,\ z=x+y\}$.
- F *et* G *sont* **en somme directe** *si* $F\cap G=\{0_E\}$, *on note alors* $F+G=F\oplus G$.
- F *et* G *sont* **supplémentaires** *dans* E *si* $F\cap G=\{0_E\}$ *et* $F+G=E$, *on note alors* $E=F\oplus G$.

REMARQUE 2.12 : Si $(x_1,\cdots,x_{p+q})$ *est une famille de vecteurs d'un espace* E, *alors il est facile de vérifier que* $\mathrm{Vect}(x_1,\cdots,x_p)+\mathrm{Vect}(x_{p+1},\cdots,x_{p+q})=\mathrm{Vect}(x_1,\cdots,x_{p+q})$.

PROPOSITION 2.7 :
Si F, G, H **sont des sous-espaces d'un espace** E**, alors :**

- $F+G$ est un sev de E
- $F+\{0_E\}=\{0_E\}+F=F$
- $F+G=G+F$
- $F\subset G \Longrightarrow (F+H)\subset(G+H)$
- $F+(G+H)=(F+G)+H$
- $F+G=F\Longleftrightarrow G\subset F$
- $F\subset F+G$ et $G\subset F+G$
- $F+F=F$
- $F+G=\mathrm{Vect}(F\cup G)$

⊙ On peut ré-écrire la condition pour que deux sous-espaces soient supplémentaires.

PROPOSITION 2.8 :
Soit E **un** $\mathbb{K}$**-espace vectoriel et** F, G **deux sous-espaces de** E **:**

$$\begin{aligned} F\oplus G=E &\iff \big(\forall z\in E,\ \exists!(x,y)\in F\times G,\ z=x+y\big)\\ &\iff F+G=E \ \text{ et } \ \big(\forall(x,y)\in F\times G,\ x+y=0_E\Longrightarrow x=y=0_E\big)\end{aligned}$$

EXEMPLE 2.11 : Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, que dire de F et G si :

- F est le sous-espace des fonctions à limite nulle en $+\infty$ et G est celui des fonctions 2π-périodiques ?
- F est le sous-espace des fonctions paires et G celui des fonctions impaires ?
- Si $n\in\mathbb{N}^*$, on a $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})=\mathcal{S}_n(\mathbb{K})\oplus\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ (matrices symétriques et antisymétriques).

EXERCICE 2.12 : Si $n\in\mathbb{N}^*$, $P\in\mathbb{K}[X]$ et $\deg(P)=n+1$, montrer que $\mathbb{K}[X]=\mathbb{K}_n[X]\oplus P\,\mathbb{K}[X]$.

EN PRATIQUE : Pour montrer qu'un ensemble E *est un espace vectoriel :*

- *On trouve un espace vectoriel connu* F *tel que* E *en soit un sous-espace (non vide et stable par combinaison linéaire suffisent alors).*
- *On trouve une famille de vecteurs d'un espace* F *dont* E *soit le sous-espace engendré.*
- *On trouve des sous-espaces d'un espace* F *dont* E *soit l'intersection.*
- *On trouve des sous-espaces d'un espace* F *dont* E *soit la somme.*
- *En dernier recours, on revient aux vérifications axiomatiques.*

2.1.5 : Définition et propriétés des applications linéaires

DÉFINITION 2.9 :
Soit E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels, on dit qu'une application* $f : E \to F$ *est une* **application** $\mathbb{K}$**-linéaire** *(en abrégé* **application linéaire***) si :* $\forall(\lambda, x, y) \in \mathbb{K} \times E^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$ et $f(\lambda.x) = \lambda.f(x)$.
On dit que l'application linéaire f *est :*

- *une* **forme linéaire** *si* $F = \mathbb{K}$.
- *un* **endomorphisme** *de* E *si* $F = E$.
- *un* **isomorphisme** *si* f *est bijective.*
- *un* **automorphisme** *de* E *si* $F = E$ *et* f *bijective (bien sûr* id_E *en est un).*

On note :

- $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ *ou plus simplement* $\mathcal{L}(E, F)$ *l'ensemble de toutes les applications linéaires de* E *dans* F.
- $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$ *l'ensemble de tous les endomorphismes de* E.
- $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ *l'ensemble de toutes les formes linéaires de* E *dans* $\mathbb{K}$ *(noté aussi* E^**).*
- $GL(E)$ *l'ensemble de tous les automorphismes de* E *(groupe linéaire).*

REMARQUE 2.13 : • *Pour* $f : E \to F$ *linéaire, on a :* $f(0_E) = 0_F$ *et* $\forall x \in E,\ f(-x) = -f(x)$.
• *Soit* $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $(x_1, \cdots, x_p) \in E^p$, $(\lambda_1, \cdots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$, *alors l'image d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images :* $f\Big(\sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k x_k\Big) = \sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k f(x_k)$.
• *Soit* E, F, G *trois espaces,* $f \in \mathcal{L}(E, F)$ *et* $g \in \mathcal{L}(F, G)$ *alors* $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$.
• *Bien sûr, la composée de deux isomorphismes en est encore un, la composée de deux endomorphismes en est aussi un, la composée de deux automorphismes en est toujours un.*

PROPOSITION 2.9 :
Avec les notations précédentes, on a l'équivalence entre :
(i) f **est une application linéaire de** E **dans** F.
(ii) $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall(x, y) \in E^2,\ f(\lambda.x + \mu.y) = \lambda.f(x) + \mu.f(y)$.
(iii) $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall(x, y) \in E^2,\ f(\lambda.x + y) = \lambda.f(x) + f(y)$.

EXEMPLE 2.13 **:** Soit $E = L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $F = \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ (fonctions bornées), alors $T : E \to F$ définie par $T(f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-itx}dt$ est linéaire : c'est la transformation de FOURIER.

PROPOSITION 2.10 :
Soit $f : E \to F$ **un isomorphisme, alors** $f^{-1} : F \to E$ **est aussi un isomorphisme.**

REMARQUE 2.14 : Si E *et* F *sont deux espaces,* $f : E \to F$ *est linéaire et* A *est un sous-espace vectoriel de* E *tel que* $f(A) \subset B$ *où* B *est un sous-espace vectoriel de* F, *alors on peut définir l'application linéaire induite* $f|_A^B$ *(qu'on appelle souvent encore* f *par abus de notation) par* $f|_A^B \in \mathcal{L}(A, B)$ *et* $\forall x \in A,\ f|_A^B(x) = f(x)$.

DÉFINITION 2.10 :
Si $f \in \mathcal{L}(E)$ *et* F *un sous-espace de* E, *on dit que* F *est* **stable** *par* f *(ou* f*-stable) si* $f(F) \subset F$.

REMARQUE FONDAMENTALE 2.15 : Si F *est stable par* f, *on peut alors créer l'***application induite** *par* f *dans* F, *notée* $f_F : F \to F$ *et définie par :* $\forall x \in F,\ f_F(x) = f(x)$. *On a bien sûr* $f_F \in \mathcal{L}(F)$.

2.1.6 : Noyau et image d'une application linéaire

PROPOSITION 2.11 :
Soit f une application linéaire de E dans F, alors :

- **si E_1 est un sous-espace vectoriel de E, on a $f(E_1)$ est un sev de F.**
- **si F_1 est un sous-espace vectoriel de F, on a $f^{-1}(F_1)$ est un sev de E.**

DÉFINITION 2.11 :
Si f est une application linéaire de E dans F, on appelle :

- **noyau** *de f, noté $\mathrm{Ker}(f)$, la partie de E définie par $\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}\big(\{0_F\}\big)$.*
- **image** *de f, noté $\mathrm{Im}(f)$, la partie $\mathrm{Im}(f) = f(E)$ de F.*

THÉORÈME CARACTÉRISANT L'INJECTIVITÉ ET LA SURJECTIVITÉ 2.12 :
Avec ces notations :

- **$\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E et de plus, f injective $\iff$ $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.**
- **$\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F et de plus, f surjective $\iff$ $\mathrm{Im}(f) = F$.**
- **Soit deux applications linéaires $f : E \to F$ et $g : F \to G$: $g \circ f = 0 \iff \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$.**

<u>REMARQUE FONDAMENTALE 2.16</u> : Pour un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$, on a les inclusions classiques :

- *Pour les noyaux :* $\mathrm{Ker}(f^0) = \{0_E\} \subset \mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2) \subset \cdots \subset \mathrm{Ker}(f^p) \subset \cdots$.
- *Pour les images :* $\mathrm{Im}(f^0) = E \supset \mathrm{Im}(f) \supset \mathrm{Im}(f^2) \supset \cdots \supset \mathrm{Im}(f^p) \supset \cdots$.
- *On définit* $N = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Ker}(f^n)$ *(**nilespace** de f) et* $I = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Im}(f^n)$ *(**cœur** de f) : ce sont des sous-espaces de E et ils sont stables par f. f injective $\iff N = \{0_E\}$ et f surjective $\iff I = E$.*

<u>EXERCICE 2.14</u> : • Si $f : P \mapsto XP$ dans $E = \mathbb{C}[X]$, trouver $\mathrm{Ker}(f^k)$ et $\mathrm{Im}(f^k)$ pour tout entier k.

• Si $f : P \mapsto P'$ dans $E = \mathbb{C}[X]$, déterminer $\mathrm{Ker}(f^k)$ et $\mathrm{Im}(f^k)$ pour tout entier k.

THÉORÈME DU RANG (FORME GÉOMÉTRIQUE) (ÉNORME) 2.13 :
soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et S un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f)$ dans E alors f induit un isomorphisme de S sur $\mathrm{Im}(f)$; c'est-à-dire que $f|_S^{\mathrm{Im}(f)}$ est un isomorphisme.

2.1.7 : Ensembles d'applications linéaires

<u>REMARQUE FONDAMENTALE 2.17</u> : Soit E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels avec $\mathbb{K}$ un corps commutatif, dans $\mathcal{L}(E, F)$ on définit deux lois $+$ et $.$ par $\forall (f, g) \in \mathcal{L}(E, F)^2$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$:

$$f+g \; : \; \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & (f+g)(x) = f(x) + g(x) \end{array} \qquad \alpha.f \; : \; \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & (\alpha.f)(x) = \alpha.f(x) \end{array}$$

On vérifie sans trop de peine que $+$ est une loi de composition interne dans $\mathcal{L}(E, F)$ et que $.$ est une loi externe, c'est-à-dire que les applications $f + g$ et $\alpha.f$ ainsi créées sont bien linéaires.

REMARQUE 2.18 : La composition est bilinéaire, ce qui se traduit, avec des applications linéaires idoines, par $(\lambda f+\mu g)\circ h=\lambda f\circ h+\mu g\circ h$ *et* $f\circ(\lambda g+\mu h)=\lambda f\circ g+\mu f\circ h$.

PROPOSITION 2.14 :

En matière de structure, si E est un espace qui n'est ni $\{0_E\}$ ni une droite :

- $\big(\mathcal{L}(E,F),+,.\big)$ **est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.**
- $\big(\mathcal{L}(E),+,\circ\big)$ **est un anneau non commutatif et non intègre.**
- $\big(GL(E),\circ\big)$ **est un groupe non abélien.**

REMARQUE 2.19 : On ne peut rien dire de spécial sur les isomorphismes entre E *et* F, *à part que si* f *est un isomorphisme de* E *dans* F *et* $\lambda\neq 0_{\mathbb{K}}$ *alors* $(\lambda.f)^{-1}=\lambda^{-1}.f^{-1}$.

REMARQUE FONDAMENTALE 2.20 :

- *Soit* E, F, G *trois espaces et* $f\in\mathcal{L}(E,F)$, $g\in\mathcal{L}(F,G)$, *alors* $\mathrm{Im}(g\circ f)\subset\mathrm{Im}(g)$ *et* $\mathrm{Ker}(f)\subset\mathrm{Ker}(g\circ f)$.
- *Pour* $f\in\mathcal{L}(E,F)$ *et* $\alpha\neq 0\in\mathbb{K}$, *on a* $\mathrm{Im}(\alpha f)=\mathrm{Im}(f)$ *et* $\ker(\alpha f)=\mathrm{Ker}(f)$.
- *Pour* $(f,g)\in\big(\mathcal{L}(E,F)\big)^2$, $\mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Ker}(g)\subset\mathrm{Ker}(f+g)$ *et* $\mathrm{Im}(f+g)\subset\mathrm{Im}(f)+\mathrm{Im}(g)$.

2.1.8 : Projecteurs et symétries

DÉFINITION 2.12 :

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* F *et* G *deux sous-espaces supplémentaires dans* E. *On définit alors la :*

- **projection sur F parallèlement à G**, *notée* $p_{F,G}$, *par :* $\forall(y,z)\in F\times G,\ p_{F,G}(y+z)=y$.
- **symétrie par rapport à F parallèlement à G**, *notée* $s_{F,G}$, *par :* $\forall(y,z)\in F\times G,\ s_{F,G}(y+z)=y-z$.

REMARQUE 2.21 : On a clairement $s_{F,G}=2p_{F,G}-\mathrm{id}_E$.

THÉORÈME SUR LES PROPRIÉTÉS DES PROJECTIONS ET SYMÉTRIES 2.15 :

Avec ces notations, on a pour la projection :

- $p_{F,G}\in\mathcal{L}(E)$ **et** $p_{F,G}\circ p_{F,G}=p_{F,G}$ **($p_{F,G}$ est idempotent dans l'anneau $\mathcal{L}(E)$).**
- F **et** G **sont stables par** $p=p_{F,G}$ **et** $p_F=\mathrm{id}_F$, $p_G=0_{\mathcal{L}(G)}$ **(application nulle).**
- $\mathrm{id}_E-p_{F,G}=p_{G,F}$ **(on dit que ces deux projections sont associées).**
- $F=\mathrm{Ker}(\mathrm{id}-p_{F,G})=\mathrm{Im}(p_{F,G})$ **et** $G=\mathrm{Ker}(p_{F,G})=\mathrm{Im}(\mathrm{id}-p_{F,G})$.

Et pour la symétrie :

- $s_{F,G}\in GL(E)$ **et** $s_{F,G}\circ s_{F,G}=\mathrm{id}_E$ **($s_{F,G}$ est involutif dans l'anneau $\mathcal{L}(E)$).**
- F **et** G **sont stables par** $s_{F,G}$ **et** $s_{F,G}|_F=\mathrm{id}_F$, $s_{F,G}|_G=-\mathrm{id}_G$ **; de plus** $-s_{F,G}=s_{G,F}$.
- $F=\mathrm{Ker}(s_{F,G}-\mathrm{id}_E)=\mathrm{Im}(s_{F,G}+\mathrm{id}_E)$ **et** $G=\mathrm{Ker}(s_{F,G}+\mathrm{id}_E)=\mathrm{Im}(s_{F,G}-\mathrm{id}_E)$.

EXERCICE 2.15 : Déterminer la matrice A dans la base canonique de la projection $p_{P,D}\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ sur le plan $P : x-2y-z=0$ parallèlement à la droite $D=\mathrm{Vect}(1,1,0)$.

*REMARQUE 2.22 : L'***homothétie** *de rapport* $\alpha\in\mathbb{K}$ *de* E *est* $h_\alpha : E\to E$ *définie par :* $h_\alpha(x)=\alpha.x$ *(soit* $h_\alpha=\alpha.\mathrm{id}_E$*) ; on a :* $\forall\alpha\in\mathbb{K},\ h_\alpha\in\mathcal{L}(E)$ *et même, si* $E\neq\{0_E\}$ *:* $h_\alpha\in GL(E)\iff\alpha\neq 0_{\mathbb{K}}$ *et alors* $h_\alpha^{-1}=h_{\alpha^{-1}}$. *On a aussi :* $\forall(\alpha,\beta,\lambda)\in\mathbb{K}^3,\ h_\alpha+h_\beta=h_{\alpha+\beta},\ h_\alpha\circ h_\beta=h_{\alpha\beta},\ \lambda.h_\alpha=h_{\lambda\alpha}$ *de sorte que l'ensemble* $\mathcal{H}$ *des homothéties de* E *est une sous-algèbre de* $\mathcal{L}(E)$ *qui est un corps.*

DÉFINITION 2.13 :

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel, on appelle* **projecteur** *de* E *un endomorphisme* p *de* E *tel que* $p^2=p\circ p=p$.

THÉORÈME SUR LA CARACTŔISATION GÉOMÉTRIQUE DES PROJECTEURS 2.16 :
Un projecteur p de E est la projection sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.
Plus précisément : $\forall x \in E,\ x = \big(x - p(x)\big) + \big(p(x)\big)$ **avec** $\big(p(x), x - p(x)\big) \in \mathrm{Im}(p) \times \mathrm{Ker}(p)$.

ORAL BLANC 2.16 : Donner une interprétation géométrique de $p : \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par $p(f) = g$ avec $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$.

THÉORÈME SUR LA CARACTÉRISATION GÉOMÉTRIQUE DES ENDOMORPHISMES INVOLUTIFS 2.17 :
Si $s \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $s^2 = \mathrm{id}_E$ alors c'est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$. De plus, on dispose de la décomposition associée à cette symétrie :
$\forall x \in E,\ x = \big(\dfrac{x + s(x)}{2}\big) + \big(\dfrac{x - s(x)}{2}\big)$ **avec** $\big(\dfrac{x + s(x)}{2}, \dfrac{x - s(x)}{2}\big) \in \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \times \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$.

EXEMPLE 2.17 : Interprétation géométrique de $s : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $s(A) = A^T$.

2.1.9 : Familles de vecteurs

DÉFINITION 2.14 :
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $n \geqslant 1$ et $(x_1, \cdots, x_n) \in E^n$:

- $(x_1, \cdots, x_n)$ *est libre* $\iff \forall (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0_E \Longrightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0_{\mathbb{K}}$.
- $(x_1, \cdots, x_n)$ *est liée* $\iff \exists (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0_E$ *et* $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \neq (0_{\mathbb{K}}, \cdots, 0_{\mathbb{K}})$.
- $(x_1, \cdots, x_n)$ *est génératrice* $\iff \forall x \in E,\ \exists (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ x = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$.
- $(x_1, \cdots, x_n)$ *est une base* $\iff \forall x \in E,\ \exists ! (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ x = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$.

REMARQUE 2.23 : • *Il est clair que :* $(x_1, \cdots, x_n)$ *génératrice* $\iff \mathrm{Vect}(x_1, \cdots, x_n) = E$.
- *Une famille est liée si et seulement si elle n'est pas libre.*
- *Une famille est une base si et seulement si elle est à la fois libre et génératrice.*
- *Si $(x_1, \cdots, x_n)$ est libre, on dit que les vecteurs $x_1, \cdots, x_n$ sont linéairement indépendants.*
- *Si $(x_1, \cdots, x_n)$ est liée, on dit que les vecteurs $x_1, \cdots, x_n$ sont linéairement dépendants.*

EXEMPLE 2.18 : • Dans le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$, la famille $\big(\ln 2, \ln 3, \ln 5\big)$ est libre.
• $\Big((2^n)_{n \in \mathbb{N}}, (3^n)_{n \in \mathbb{N}}\Big)$ est une base de $E = \Big\{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = 0\Big\}$.

REMARQUE FONDAMENTALE 2.24 : Dans l'espace $E = \mathbb{K}[X]$, soit $n \in \mathbb{N}$ et une famille $(P_0, \cdots, P_n)$:
- *Si $P_0, \cdots, P_n$ sont de* **degrés échelonnés** *($\forall k \in [\![0; n]\!],\ \deg(P_k) = k$), alors $(P_0, \cdots, P_n)$ est libre.*
- *Si les degrés des polynômes de $(P_0, \cdots, P_n)$ sont tous différents, on dit que ce sont des* **polynômes de degrés étagés**, *$(P_0, \cdots, P_n)$ est encore libre.*

REMARQUE HP 2.25 : Comme précédemment, on peut généraliser ces caractéristiques à des familles quelconques $(x_i)_{i \in I}$ (plus forcément finies), mais en considérant des familles de scalaires à supports finis. Par exemple, $(x_i)_{i \in I}$ est libre si et seulement si $\forall (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^{(I)},\ \big(\sum\limits_{i \in I} \lambda_i x_i = 0_E\big) \Longrightarrow \big(\forall i \in I,\ \lambda_i = 0\big)$.

EXEMPLE 2.19 : • $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.

• Dans $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, la famille $\left(f_x\right)_{x\in\mathbb{R}}$ est libre si $f_x : t \mapsto e^{xt}$.

DÉFINITION 2.15 :
Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel,* $(x_i)_{i\in I}$ *une base de* E *et* $x \in E$*, par définition :* $\exists!(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)},\ x = \sum\limits_{i\in I} \lambda_i x_i$.
Cette famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ *est la* **famille des coordonnées de** x **dans la base** $(x_i)_{i\in I}$.

PROPOSITION 2.18 :
Avec ces notations et si $(\lambda_i)_{i\in I}$ et $(\mu_i)_{i\in I}$ sont les familles des coordonnées de deux vecteurs x et y de E dans la base $(x_i)_{i\in I}$ et que $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, alors le vecteur $\alpha x + \beta y$ admet $(\alpha\lambda_i + \beta\mu_i)_{i\in I}$ pour famille des coordonnées dans la base $(x_i)_{i\in I}$.

EXEMPLE 2.20 : • Dans la base $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$, coordonnées de $(X-1)^4$: $(1, -4, 6, -4, 1, 0, 0, 0, \cdots)$.

• Dans la base $(\mathrm{sh}, \mathrm{ch})$ de l'espace E des solutions de $y'' - y = 0$, coordonnées de $f : x \mapsto e^x$: $(1, 1)$.

REMARQUE 2.26 : Dans certains espaces, il y a des **bases canoniques** *:*

- *Il y a dans* $E = \mathbb{K}^n$ *la base canonique* $(e_1, \cdots, e_n)$ *où* $e_1 = (1, 0, \cdots, 0)$*, ... ,* $e_n = (0, \cdots, 0, 1)$.
- $(1, X, \cdots, X^n)$ *est la base canonique de* $\mathbb{K}_n[X]$.
- $(E_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ *est la base canonique de* $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
- *La base* $(1, i)$ *dans le* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* $\mathbb{C}$ *est canonique.*

2.1.10 : Propriétés des familles

PROPOSITION 2.19 :
Soit E un $\mathbb{K}$-espace, $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ avec $n \leqslant m$ et $(x_1, \cdots, x_m)$ une famille de vecteurs de E :

- **Si la famille $(x_1, \cdots, x_m)$ est libre alors la famille $(x_1, \cdots, x_n)$ est libre.**
- **Si la famille $(x_1, \cdots, x_n)$ est liée alors la famille $(x_1, \cdots, x_m)$ est liée.**
- **Si la famille $(x_1, \cdots, x_n)$ est génératrice alors la famille $(x_1, \cdots, x_m)$ est génératrice.**

REMARQUE 2.27 : On dit en abrégé que **toute sous-famille d'une famille libre est libre** *et que* **toute sur-famille d'une famille génératrice** *est génératrice.*

PROPOSITION 2.20 :
Soit E un espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \cdots, x_n) \in E^n$ et $x \in E$:

- **$\big((x_1, \cdots, x_n)$ est libre et $x \notin \mathrm{Vect}(x_1, \cdots, x_n)\big) \iff (x_1, \cdots, x_n, x)$ est libre.**
- **$\big((x_1, \cdots, x_n)$ est liée $\big) \iff \exists p \in [\![1; n]\!],\ x_p \in \mathrm{Vect}(x_1, \cdots, x_{p-1}, x_{p+1}, \cdots, x_n)$.**

REMARQUE 2.28 : Même quand une famille $(x_1, \cdots, x_n)$ *est liée, si* $p \in [\![1; n]\!]$*, on ne peut pas forcément exprimer* x_p *en fonction des autres vecteurs de la famille.*

2.1.11 : Familles et applications linéaires

$\odot$ Dans toute la suite $(x_i)_{i\in I}$ désignera une famille finie $(x_1, \cdots, x_n)$ (c'est-à-dire $I = [\![1; n]\!]$) même si les résultats persistent quand on prend des familles quelconques (mais c'est hors programme).

PROPOSITION 2.21 :

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $(x_i)_{i\in I} \in E^I$:

- $\Big((x_i)_{i\in I}$ **liée** $\Longrightarrow$ $\big(f(x_i)\big)_{i\in I}$ **liée**$\Big)$ **d'où découle** $\Big(\big(f(x_i)\big)_{i\in I}$ **libre** $\Longrightarrow$ $(x_i)_{i\in I}$ **libre**$\Big)$**.**
- $\big((x_i)_{i\in I}$ **génératrice (de E)**$\big) \Longrightarrow \big(f(x_i)\big)_{i\in I}$ **génératrice de** $\mathrm{Im}(f)$ $\big(= \mathrm{Vect}\big(f(x_i)_{i\in I}\big)\big)$**.**
- $\big((x_i)_{i\in I}$ **libre et f injective**$\big) \Longrightarrow \big(f(x_i)\big)_{i\in I}$ **libre.**
- $\big((x_i)_{i\in I}$ **génératrice (de E) et f surjective**$\big) \Longrightarrow \big(f(x_i)\big)_{i\in I}$ **génératrice (de F).**
- $\big((x_i)_{i\in I}$ **est une base de E et f est un isomorphisme**$\big) \Longrightarrow \big(f(x_i)\big)_{i\in I}$ **est une base de F.**

<u>REMARQUE FONDAMENTALE 2.29</u> : On retient surtout que si $\big((x_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de E (le mieux est de prendre une base), alors $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\big(f(x_i)_{i\in I}\big)\big)$.

<u>REMARQUE 2.30</u> : Bien sûr les réciproques de toutes ces implications sont fausses.

THÉORÈME 2.22 :

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $(x_i)_{i\in I}$ une base de E et $f \in \mathcal{L}(E,F)$, alors :

- **f injective $\Longleftrightarrow$ $\big(f(x_i)\big)_{i\in I}$ est une famille libre.**
- **f surjective $\Longleftrightarrow$ $\big(f(x_i)\big)_{i\in I}$ est une famille génératrice (de F).**
- **f est un isomorphisme $\Longleftrightarrow$ $\big(f(x_i)\big)_{i\in I}$ est une base de F.**

THÉORÈME 2.23 :

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces, $(x_i)_{i\in I}$ une base de E :

- **si $(f,g) \in \big(\mathcal{L}(E,F)\big)^2$, alors $f = g \iff \forall i \in I,\ f(x_i) = g(x_i)$.**
- **si $(y_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de F, alors $\exists! f \in \mathcal{L}(E,F),\ \forall i \in I,\ f(x_i) = y_i$.**

<u>REMARQUE 2.31</u> : Quelques corollaires remarquables de ce théorème :

- *Soit $(x_i)_{i\in I}$ une base de E et $(y_i)_{i\in I}$ une base de F : $\exists! f \in \mathrm{Isom}(E,F),\ \forall i \in I,\ f(x_i) = y_i$.*
- *Soit $(x_i)_{i\in I}$ une base de E et $(y_i)_{i\in I}$ une famille de E : $\exists! f \in \mathcal{L}(E),\ \forall i \in I,\ f(x_i) = y_i$.*
- *Soit $(x_i)_{i\in I}$ une base de E et $(y_i)_{i\in I}$ une base de E : $\exists! f \in GL(E),\ \forall i \in I,\ f(x_i) = y_i$.*

2.1.12 : Théorie de la dimension

DÉFINITION 2.16 :

On dit qu'un $\mathbb{K}$-espace E est **un espace de dimension finie** *si E possède une famille génératrice finie.*

Les espaces n'étant pas de dimension finie seront dits des **espaces de dimension infinie**.

<u>EXEMPLE 2.21</u> : • L'espace $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie.

- Si $n \in \mathbb{N}^*$, les espaces $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}_n[X]$ sont de dimension finie.

PROPOSITION 2.24 :

Soit E de dimension finie, il existe au moins une base de E, toutes les bases de E sont finies et ont le même nombre de vecteurs.

REMARQUE 2.32 : On admet ici ce résultat fondamental mais il s'appuie sur un fait établi : toute famille libre finie a moins d'éléments que toute famille génératrice finie dans E de dimension finie.

DÉFINITION 2.17 :
Soit E un $\mathbb{K}$-espace de dimension finie, on appelle **dimension du $\mathbb{K}$-espace vectoriel** E *l'unique entier n tel qu'il existe une base de E à n vecteurs ; on note cet entier $\dim_{\mathbb{K}}(E)$ (ou $\dim(E)$).*

EXEMPLE 2.22 : Deux exemples de "plans" :
- Comme $(1, i)$ est une base du $\mathbb{R}$-espace $\mathbb{C}$, on a $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$ alors que $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$.
- Le $\mathbb{R}$-espace S des solutions de $(E)\ :\ y'' + y = 0$ est de dimension 2 : $(\cos, \sin)$ en est une base.

REMARQUE 2.33 : Si $\mathbb{K}$ est un corps commutatif et $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, alors comme on connaît les bases canoniques dans ces deux espaces : $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) = n$, $\dim_{\mathbb{K}}\left(\mathbb{K}_n[X]\right) = n + 1$ et $\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = np$.

2.1.13 : Base incomplète

THÉORÈME 2.25 :
Soit E un espace de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et une famille $(x_1, \cdots, x_p)$ de vecteurs de E :
- **Si $(x_1, \cdots, x_p)$ est libre alors on a forcément $p \leqslant n$.**
- **Si $(x_1, \cdots, x_p)$ est libre et si $p = n$ alors $(x_1, \cdots, x_n)$ est une base.**
- **Si $(x_1, \cdots, x_p)$ est génératrice alors on a forcément $n \leqslant p$.**
- **Si $(x_1, \cdots, x_p)$ est génératrice et si $p = n$ alors $(x_1, \cdots, x_n)$ est une base.**

⊙ Et maintenant les fameux théorèmes de la base extraite et de la base incomplète :

THÉORÈME DE LA BASE EXTRAITE ET LA BASE INCOMPLÈTE 2.26 :
Soit E un espace de dimension finie et $(x_1, \cdots, x_p) \in E^p$:
- **Si $(x_1, \cdots, x_p)$ est génératrice, alors il en existe une sous-famille qui est une base.**
- **Si $(x_1, \cdots, x_p)$ est libre, elle peut être complétée en une base de E.**
- **Plus généralement, si $\mathcal{L}$ est une famille libre et $\mathcal{G}$ une famille génératrice, alors il existe une base $\mathcal{B}$ telle que $\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{L} \cup \mathcal{G}$.**

2.1.14 : Sous-espaces et dimension

THÉORÈME 2.27 :
Soit E un espace de dimension finie et F un sous-espace de E, alors :
- **F est aussi de dimension finie et on a $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.**
- **De plus on a l'équivalence : $\dim(F) = \dim(E) \iff F = E$.**

REMARQUE 2.34 : Un sous-espace de dimension 1 s'appelle une **droite***, ce sera un* **plan** *si la dimension est 2. La* **codimension** *d'un sous-espace F d'un espace E de dimension finie est l'entier $\dim(E) - \dim(F)$. On appelle* **hyperplan** *un sous-espace de codimension 1.*

THÉORÈME SUR LA FORMULE DE GRASSMANN 2.28 :
Dans un espace E de dimension finie, tout sous-espace F possède au moins un supplémentaire.
Soit F, G sous-espaces de E : $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$.

REMARQUE 2.35 : Soit E un espace de dimension finie et F un sous-espace de E, alors tous les supplémentaires de F ont pour dimension $\text{codim}(F) = \dim(E) - \dim(F)$.

PROPOSITION 2.29 :
Si E est un espace de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E :
$\big(E = F \oplus G\big) \iff \big(F \cap G = \{0_E\}$ **et** $\dim E = \dim F + \dim G\big) \iff \big(F + G = E$ **et** $\dim E = \dim F + \dim G\big)$.

2.1.15 : Rang d'une famille de vecteurs

DÉFINITION 2.18 :
Soit E un espace vectoriel et $(x_1, \cdots, x_p)$ une famille de vecteurs, on appelle **rang de la famille** $(x_1, \cdots, x_p)$, *qu'on note $\text{rg}(x_1, \cdots, x_p)$, la dimension de l'espace $\text{Vect}(x_1, \cdots, x_p)$.*

EXEMPLE 2.23 : Dans $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, rang de $(f_1 : x \mapsto e^x, f_2 : x \mapsto e^{-x}, f_3 = \text{sh}, f_4 = \text{ch})$?

THÉORÈME SUR LES PROPRIÉTÉS DES FAMILLES PAR LEUR RANG 2.30 :
Soit E un espace de dimension n et $(x_1, \cdots, x_p) \in E^p$, on a :

- $\text{rg}(x_1, \cdots, x_p) \leqslant p$ **en général et :** $\text{rg}(x_1, \cdots, x_p) = p \iff (x_1, \cdots, x_p)$ **libre.**
- $\text{rg}(x_1, \cdots, x_p) \leqslant n$ **en général et :** $\text{rg}(x_1, \cdots, x_p) = n \iff (x_1, \cdots, x_p)$ **génératrice.**

2.1.16 : Dimension et isomorphismes

PROPOSITION 2.31 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, E et F 2 $\mathbb{K}$-espaces vectoriels :

- **Si E de dimension n alors E est isomorphe à $\mathbb{K}^n$ (ce qu'on note $E \sim \mathbb{K}^n$).**
- **Si E et F de dimension finie, alors $E \sim F \iff \dim(E) = \dim(F)$.**
- **Si E et F de dimension finie, alors $\mathcal{L}(E, F)$ l'est aussi et $\dim\big(\mathcal{L}(E, F)\big) = \dim(E) \times \dim(F)$.**

REMARQUE 2.36 : Si E est de dimension finie, on en déduit que son **dual** *(terminologie hors programme) $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ l'est aussi et de même dimension car $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}) = 1$.*
Ce qui signifie que l'espace et son dual sont isomorphes.

2.1.17 : Rang d'une application linéaire

DÉFINITION 2.19 :
Soit E et F deux espaces et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on appelle **rang de** f, *noté $\text{rg}(f)$, la dimension du sous-espace $\text{Im}(f)$ s'il est de dimension finie : $\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f))$.*

THÉORÈME SUR LES APPLICATIONS LINÉAIRES ET LEUR RANG 2.32 :
Avec ces notations, si E et F sont de dimension finie et $\dim(E) = p$, $\dim(F) = n$ alors :

- $\text{rg}(f) \leqslant p$ **en général et** $\text{rg}(f) = p \iff f$ **injective.**
- $\text{rg}(f) \leqslant n$ **en général et** $\text{rg}(f) = n \iff f$ **surjective.**

REMARQUE 2.37 : De ceci, on peut en déduire que si $f : E \to F$ *est linéaire entre deux espaces de dimension finie :* $\big(\dim(E) < \dim(F)\big) \Longrightarrow \big(f$ *non surjective*$\big)$ *et* $\big(\dim(E) > \dim(F)\big) \Longrightarrow \big(f$ *non injective*$\big)$.

THÉORÈME SUR LA CARACTÉRISATION DES ISOMORPHISMES ENTRE ESPACES DE MÊME DIMENSION (ÉNORME) 2.33 :
Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces de même dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E,F)$:

$$\big(f \textbf{ isomorphisme}\big) \Longleftrightarrow \big(f \textbf{ injective}\big) \Longleftrightarrow \big(f \textbf{ surjective}\big).$$

EXERCICE CONCOURS 2.24 : Centrale PSI 2013
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \cdots, a_n$ des réels distincts deux à deux et $(b_0, \cdots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.
a. Prouver qu'il existe un polynôme P et un seul dans $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall k \in [\![0;n]\!],\ P(a_k) = b_k$.
b. Trouver tous les $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(-1) = P(1) = 2$ et $P(2) = P(-2) = 1$. Sont-ils tous pairs ?
c. Soit $(c_0, \cdots, c_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, Existe-t-il un polynôme P tel que :

$$P(a_0) = b_0,\ P'(a_0) = c_0,\ P(a_1) = b_1,\ P'(a_1) = c_1, \cdots, P(a_n) = b_n,\ P'(a_n) = c_n\ ?$$

REMARQUE 2.38 : • *Ce théorème s'applique aux endomorphismes d'un espace de dimension finie.*
• *Avec ces hypothèses :* $\big(f$ *isom.*$\big) \Longleftrightarrow \big(\exists g \in \mathcal{L}(F,E),\ f \circ g = \mathrm{id}_F\big) \Longleftrightarrow \big(\exists g \in \mathcal{L}(F,E),\ g \circ f = \mathrm{id}_E\big)$.
• *C'est faux pour un endomorphisme en dimension quelconque.*

THÉORÈME (FORMULE DU RANG) (ÉNORME) 2.34 :
Si E de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E,F)$, alors $\mathrm{rg}(f)$ est fini et $\dim(E) = \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) + \mathrm{rg}(f)$.

PROPOSITION SUR L'INVARIANCE DU RANG PAR COMPOSITION PAR UN ISOMORPHISME À GAUCHE OU À DROITE 2.35 :
Soit E, F, G trois espaces vectoriels de dimensions finies, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$.
- $\mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \mathrm{Min}(\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g))$.
- **si f est un isomorphisme alors $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(g)$.**
- **si g est un isomorphisme alors $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(f)$.**

2.1.18 : Formes linéaires et hyperplans

DÉFINITION 2.20 :
Si E est de dimension $n \geqslant 1$, un hyperplan H est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$.

REMARQUE HP 2.39 : Plus généralement, si E est quelconque, on dit qu'un sous-espace H de E est un hyperplan s'il existe une droite D telle que $E = H \oplus D$.

EXEMPLE 2.25 : Dans l'espace E des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui possèdent une limite finie en $+\infty$, le sous-espace F des fonctions qui tendent vers 0 en $+\infty$ est un hyperplan.

THÉORÈME LIANT HYPERPLANS ET FORMES LINÉAIRES (ÉNORME) 2.36 :
Soit E un $\mathbb{K}$-espace de dimension finie et H un sous-espace de E :
$\big(H$ **est un hyperplan de** $E\big) \iff \big(\exists \varphi \in E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ **non nulle** , $H = \mathrm{Ker}(\varphi)\big)$.

REMARQUE 2.40 : Ceci est aussi valable en dimension quelconque.

EXEMPLE 2.26 : • $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$ $(\varphi(x,y,z) = x+y+z)$.
• L'ensemble des fonctions $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f = 0$ est un hyperplan $(\varphi(f) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f)$.

PROPOSITION SUR LA PROPORTIONNALITÉ DE DEUX FORMES LINÉAIRES AYANT MÊME NOYAU DONC REPRÉSENTANT LE MÊME HYPERPLAN 2.37 :
Soit H un hyperplan d'un espace E de dimension finie et φ et ψ deux formes linéaires non nulles sur E telles que $H = \mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\psi)$. Alors il existe un scalaire $\lambda \neq 0$ tel que $\psi = \lambda\varphi$.

REMARQUE 2.41 : • *Un hyperplan a une seule "équation" ($\varphi(v) = 0$) définie à une constante près.*

• *Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E et H un hyperplan de E. Il existe des scalaires non tous nuls $a_1, \cdots, a_n$ tels que : $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \in H \iff \sum_{k=1}^{n} a_k x_k = 0$ (E). L'équation (E) est appelée une* **équation cartésienne** *de H dans la base $\mathcal{B}$; elle est unique à une constante multiplicative près.*

2.1.19 : Structure des matrices

DÉFINITION 2.21 :
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on appelle **matrice à n lignes, p colonnes à coefficients dans** $\mathbb{K}$ *un objet de la forme suivante* $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$ *où les* $(a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathbb{K}^{np}$.
L'ensemble des ces matrices est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Si $n = p$ on dit que la matrice est **carrée**, *on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ au lieu de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$. On a* $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} = B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \iff \forall (i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;p]\!],\ a_{i,j} = b_{i,j}$.

REMARQUE 2.42 :

• *Pour $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$ telles que* $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$, $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ *et $\lambda \in \mathbb{K}$, on définit* $A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ *(loi interne) et* $\lambda.A = (\lambda a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ *(loi externe).*

• *Pour $(i_0, j_0) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;p]\!]$, on définit $E_{i_0,j_0} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ qui contient des 0 à toutes les cases sauf la case (i_0, j_0) où se trouve un 1 :* $E_{i_0,j_0} = (\delta_{i,i_0}\delta_{j,j_0})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ *où $\delta_{x,y}$ est le* **symbole de** KRONECKER.

PROPOSITION 2.38 :
$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ **est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension np muni de sa base canonique** $(E_{i_0,j_0})_{\substack{1 \leqslant i_0 \leqslant n \\ 1 \leqslant j_0 \leqslant p}}$.

DÉFINITION 2.22 :
La **transposée** *de* $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *est la matrice* $A^T = (a_{j,i})_{\substack{1 \leqslant j \leqslant p \\ 1 \leqslant i \leqslant n}} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

REMARQUE 2.43 : La transposition induit un isomorphisme entre $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ qui devient un automorphisme involutif (donc une symétrie) quand $n = p$.

DÉFINITION 2.23 :
Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K}$ un corps commutatif, on dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une **matrice symétrique** *si elle vérifie $A^T = A$ et qu'elle est une* **matrice antisymétrique** *si on a $A^T = -A$; on note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques).*

REMARQUE 2.44 : $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est symétrique (resp. antisymétrique) si et seulement si on a $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ a_{i,j} = a_{j,i}$ (resp $a_{i,j} = -a_{j,i}$). Ainsi, A antisymétrique admet une diagonale de 0.

PROPOSITION 2.39 :
$\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et l'on a $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.
De plus : $\dim\left(\mathcal{S}_n(\mathbb{K})\right) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\dim\left(\mathcal{A}_n(\mathbb{K})\right) = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

DÉFINITION 2.24 :
Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K}$ un corps commutatif, on dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est :
- *une* **matrice triangulaire supérieure** *si* $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ i > j \Longrightarrow a_{i,j} = 0$
- *une* **matrice triangulaire inférieure** *si* $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ i < j \Longrightarrow a_{i,j} = 0$
- *une* **matrice diagonale** *si* $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ i \neq j \Longrightarrow a_{i,j} = 0$.

REMARQUE 2.45 : On note respectivement $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$, $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ et $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n triangulaires supérieures, triangulaires inférieures et diagonales ; il est clair que ce sont des sous-espaces de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et que nous avons $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) + \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \cap \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K}) = \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$. De plus : $\dim\left(\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})\right) = \dim\left(\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})\right) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\dim\left(\mathcal{D}_n(\mathbb{K})\right) = n$ avec des bases simples.

REMARQUE 2.46 : On note I_n la matrice diagonale de taille n qui possède une diagonale de 1, elle est appelée la **matrice identité** *; $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.*

2.1.20 : Produit matriciel

DÉFINITION 2.25 :
Soit $(n,m,p) \in (\mathbb{N}^*)^3$, $\mathbb{K}$ un corps commutatif et deux matrices $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant m}} \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K})$; on définit le **produit** *$A \times B$, c'est la matrice $C = (c_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant m}} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ définie par : $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;m]\!]$, $c_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$. On note AB à la place de $A \times B$.*

THÉORÈME 2.40 :
Soit $(n,m,p,q) \in (\mathbb{N}^*)^3$ et $(A, A', B, B', C) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2 \times \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K})^2 \times \mathcal{M}_{m,q}(\mathbb{K})$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ où $\mathbb{K}$ est un corps commutatif, alors nous avons les relations suivantes :
- $(\lambda A + \mu A')B = \lambda AB + \mu A'B$ **(linéarité à gauche du produit matriciel),**
- $A(\lambda B + \mu B') = \lambda AB + \mu AB'$ **(linéarité à droite du produit matriciel),**
- $A(BC) = (AB)C$ **(associativité du produit matriciel).**

REMARQUE 2.47 : • Le produit matriciel est bilinéaire.
- *Si $U = (u) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, alors $XU = uX$.*
- *On ne peut définir et comparer les matrices AB et BA que si $n = p = m$; dans ce cas, on n'a que très rarement $AB = BA$ (on dit dans ce cas que A et B* **commutent***).*

PROPOSITION SUR LE PRODUIT DES MATRICES ÉLÉMENTAIRES 2.41 :
Si les tailles des matrices le permettent, on a $E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}$.

REMARQUE 2.48 : En posant le calcul, il est clair que si $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a $I_n M = M = M I_p$.

PROPOSITION 2.42 :
Si $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K})$ **alors on a** $(AB)^T = B^T A^T$**.**

2.1.21 : Algèbre des matrices carrées

THÉORÈME 2.43 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$**,** $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ **est une** $\mathbb{K}$**-algèbre de neutre** I_n**.**

REMARQUE 2.49 : • Dès que $n \geqslant 2$, elle n'est ni intègre ni commutative.

• $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ ne sont pas des sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ en général ; alors que $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$, $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ et $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ en sont bien des sous-algèbres, $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ étant même commutative (mais toujours pas intègre).

REMARQUE 2.50 : • A triangulaire supérieure n'ayant que des 0 sur la diagonale est **nilpotente** *: c'est-à-dire qu'il existe un entier p tel que $A^p = 0$.*

• Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, si une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ se décompose $A = B + C$ avec $BC = CB$ alors on peut écrire $A^p = \sum\limits_{k=0}^{p} \binom{p}{k} B^k C^{p-k}$: intéressant si on a affaire à des matrices diagonales et/ou nilpotentes (c'est essentiel pour les probabilités, les résolutions de systèmes différentiels, etc...).

ORAL BLANC 2.27 : Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ avec $a_{i,j} = a$ si $i = j$ et $a_{i,j} = b$ sinon.
Calcul de A^p pour tout entier p en écrivant $A = (a - b)I_n + bJ_n$ où $J_n = (1)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.
Calcul de A^p pour tout entier p en trouvant un polynôme annulateur P de A de degré 2.

DÉFINITION 2.26 :
On note $GL_n(\mathbb{K})$ le groupe multiplicatif des **matrices inversibles** *de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

REMARQUE 2.51 : On verra que $A \in GL_n(\mathbb{K})$ si et seulement si elle est inversible à gauche (ou à droite).

PROPOSITION SUR LA RELATION ENTRE INVERSE, TRANSPOSÉE, PRODUIT 2.44 :
Soit $(A, B) \in GL_n(\mathbb{K})^2$**, alors :**

- AB **est aussi inversible et** $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$**.**
- A^{-1} **et** A^T **sont inversibles,** $(A^{-1})^{-1} = A$ **et** $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$**.**

REMARQUE 2.52 : • Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $A = PDP^{-1}$ où $P \in GL_n(\mathbb{K})$, D diagonale : $\forall p \in \mathbb{N}$, $A^p = PD^pP^{-1}$.

• Les matrices triangulaires supérieures (ou inférieures) à termes diagonaux non nuls constituent un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{K})$, de même que pour les matrices diagonales inversibles.

2.1.22 : Matrices de Gauss

DÉFINITION 2.27 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(i, j) \in [\![1; n]\!]^2$ avec $i \neq j$ et $\alpha \in \mathbb{K}^*$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ avec $\lambda \neq 1$, on définit :

- *les* **matrices de transvection** $T_{i,j}(\alpha) = I_n + \alpha E_{i,j}$,
- *les* **matrices de dilatation** $D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{i,i}$ *et*
- *les* **matrices d'interversion** $I_{i,j} = I_n + E_{i,j} + E_{j,i} - E_{i,i} - E_{j,j}$.

EXEMPLE 2.28 : $T_{1,2}(4) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D_2(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $(n = 3)$.

REMARQUE 2.53 :
- *La multiplication d'une matrice rectangulaire A par les matrices de* GAUSS *à gauche (resp. à droite) modélise les opérations élémentaires du* **pivot de** GAUSS *sur les lignes (resp. sur les colonnes).*
  - *Transformer A en $T_{i,j}(\alpha)A$ revient à effectuer sur A l'opération $L_i \longleftarrow L_i + \alpha L_j$.*
  - *Transformer A en $AT_{i,j}(\alpha)$ revient à effectuer sur A l'opération $C_j \longleftarrow C_j + \alpha C_i$.*
  - *Transformer A en $D_i(\lambda)A$ revient à effectuer sur A l'opération $L_i \longleftarrow \lambda L_i$.*
  - *Transformer A en $AD_j(\lambda)$ revient à effectuer sur A l'opération $C_j \longleftarrow \lambda C_j$.*
  - *Transformer A en $I_{i,j}A$ revient à effectuer sur A l'opération $L_i \longleftrightarrow L_j$.*
  - *Transformer A en $AI_{i,j}$ revient à effectuer sur A l'opération $C_i \longleftrightarrow C_j$.*
- *Ces matrices de* GAUSS *sont inversibles : $T_{i,j}(\alpha)^{-1} = T_{i,j}(-\alpha)$, $D_i(\lambda)^{-1} = D_i(\lambda^{-1})$ et $I_{i,j}^{-1} = I_{i,j}$.*
- *Ceci nous permet d'avoir un algorithme pour le calcul de l'inverse d'une matrice $A \in GL_n(\mathbb{K})$.*

EXERCICE 2.29 : Calculons l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2.1.23 : Représentations matricielles

DÉFINITION 2.28 :
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E et $p \in \mathbb{N}^*$ et une famille $\mathcal{F} = (v_1, \cdots, v_p)$ de vecteurs de E ; on lui associe la **matrice de la famille $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$**, *notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ ou $P_{\mathcal{B},\mathcal{F}} = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ définie par $\forall j \in [\![1;p]\!],\ v_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$.*

EXEMPLE 2.30 : Matrice de $\left((1+X)^k\right)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ dans $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni de la base canonique.

DÉFINITION 2.29 :
Soit E (resp. $\mathcal{F}$) un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $p \in \mathbb{N}^*$ (resp. $n \in \mathbb{N}^*$), $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_p)$ une base de E, $\mathcal{B}' = (f_1, \cdots, f_n)$ une base de F et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors on appelle **matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$**, *notée $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\big(f(e_1), \cdots, f(e_p)\big) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\big(f(\mathcal{B})\big)$.*

EXEMPLE 2.31 : Matrice dans les bases canoniques de l'application linéaire (admis) $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ définie par : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x, y, z) = (x + 2y, x + z + y)$.

DÉFINITION 2.30 :
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $p \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_p)$ une base de E et $f \in \mathcal{L}(E)$, alors on appelle **matrice de f dans la base $\mathcal{B}$**, *notée $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$.*

EXEMPLE 2.32 : Matrice dans $(1, X, X^2, X^3)$ de $f \in \mathcal{L}\big(\mathbb{R}_3[X]\big)$ telle que $\forall P \in \mathbb{R}_3[X],\ f(P) = P'$.

REMARQUE 2.54 : • *L'identité d'un espace E de dimension n admet I_n pour matrice dans toute base.*
- *Soit $E = F \oplus G$ et $s = s_{F,G}$, alors dans une base convenablement choisie, la matrice de s est simple.*

2.1.24 : Traductions matricielles

THÉORÈME D'ISOMORPHISME MATRICES/APPLICATIONS LINÉAIRES 2.45 :
Soit E (resp. F) un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $p \in \mathbb{N}^*$ (resp. $n \in \mathbb{N}^*$), $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_p)$ une base de E, $\mathcal{B}' = (f_1, \cdots, f_n)$ une base de F alors l'application $\varphi : \mathcal{L}(E, F) \to \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ définie par : $\forall f \in \mathcal{L}(E, F),\ \varphi(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

<u>*REMARQUE 2.55*</u> *:* • *Comme* $\dim\left(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})\right) = np$, *on retrouve que* $\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(E) \times \dim(F)$.
• *Pour* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, *on appelle* **application linéaire canoniquement associée** *à* A *l'unique* $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ *telle que* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_p,\mathcal{B}_n}(f) = A$ *où* $\mathcal{B}_p$ *et* $\mathcal{B}_n$ *sont les bases canoniques de* $\mathbb{K}^p$ *et* $\mathbb{K}^n$.

THÉORÈME SUR LA RELATION ENTRE COMPOSÉE ET PRODUIT MATRICIEL 2.46 :
Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ des bases respectivement de E, F et G, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, alors : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

<u>*REMARQUE 2.56*</u> *: On en déduit, grâce à l'isomorphisme du théorème précédent, l'associativité et la bilinéarité du produit matriciel admis précédemment.*

PROPOSITION 2.47 :
Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces de même dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E, $\mathcal{B}' = (f_1, \cdots, f_n)$ une base de F : $\left(f \text{ est un isomorphisme }\right) \iff \left(A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \in GL_n(\mathbb{K})\right)$.
Dans ce cas, nous avons de plus : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f^{-1}) = A^{-1}$.

THÉORÈME (ÉNORME) 2.48 :
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. L'application $\varphi : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par : $\forall f \in \mathcal{L}(E),\ \varphi(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est un isomorphisme d'algèbres.
De plus, sa restriction $\widehat{\varphi} : GL(E) \to GL_n(\mathbb{K})$ est un isomorphisme de groupes.

<u>***EXERCICE CONCOURS 2.33***</u> ***:*** Mines PSI 2013 Mathieu

On note $C_n^p = \dbinom{n}{p}$. Déterminer A^{-1} si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ C_1^1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ C_2^2 & C_2^1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ C_n^n & C_n^{n-1} & \cdots & C_n^1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.

<u>*REMARQUE 2.57*</u> *: On peut donc tout traduire en termes de matrices, si* $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ *et* $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$ *:*
- f *est un isomorphisme si et seulement si* A *est inversible.*
- f *est un projecteur (resp. une symétrie vectorielle) si et seulement si* $A^2 = A$ *(resp.* $A^2 = I_n$*).*
- f *est nilpotent si et seulement si* A *est nilpotente.*
- $f \circ g = 0$ *si et seulement si* $AB = 0$....

DÉFINITION 2.31 :
Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace de base* $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$, *on associe à* $x \in E$ *son* **vecteur colonne** $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ *tel que* ${}^tX = (x_1 \cdots x_n)$ *où* $(x_1, \cdots, x_n)$ *sont les coordonnées de* x *dans la base* $\mathcal{B}$ *:* $x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k$.

THÉORÈME DE TRADUCTION MATRICIELLE D'UNE IMAGE DE VECTEUR 2.49 :
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $p \in \mathbb{N}^*$, F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_p)$ une base de E, $\mathcal{B}' = (f_1, \cdots, f_n)$ une base de F, on se donne aussi $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et on pose $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, soit $x \in E$ dont la matrice colonne dans $\mathcal{B}$ est notée $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, on pose $y = f(x)$ auquel on associe $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Alors on a : $Y = AX$.

<u>REMARQUE 2.58</u> : • On en déduit, si $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$: $(A = B) \iff (\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}),\ AX = BX)$.
• Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a : $\big(A \in GL_n(\mathbb{K})\big) \iff \big(\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ \exists! X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ Y = AX\big)$ car si f canoniquement associée à A : $f \in GL(\mathbb{K}^n) \iff A \in GL_n(\mathbb{K})$. Ceci consiste à résoudre un système linéaire n lignes et n colonnes. Dans ce cas, on trouve la matrice A^{-1} car $Y = AX \iff X = A^{-1}Y$.

<u>EXERCICE 2.34</u> : Calculons à nouveau l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

<u>REMARQUE 2.59</u> :
• Soit $\varphi : E \to \mathbb{K}$ une forme linéaire sur E, $\mathcal{B}$ une base de E, $L = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},1}(\varphi) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ et x un vecteur de E de matrice colonne associée X, alors $LX \in \mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ peut s'identifier avec $\varphi(x)$.
• Soit une matrice A et f canoniquement associée, on peut confondre $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Ker}(A)$, $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Im}(A)$.
• Soit A et B deux matrices de bonnes tailles, alors :
  - *$AB = 0 \iff$ toutes les colonnes de B sont dans $\mathrm{Ker}(A)$.*
  - *$AB = 0 \iff$ toutes les lignes de A sont dans $\mathrm{Ker}(B^T)$.*
  - *$AB = 0 \iff$ toutes les lignes L_i de A vérifient $\mathrm{Im}(B) \subset \mathrm{Ker}(L_i)$.*

2.1.25 : Changement de bases

DÉFINITION 2.32 :
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (f_1, \cdots, f_n)$ deux bases de E, on appelle **matrice de passage de** $\mathcal{B}$ **à** $\mathcal{B}'$ *la matrice de la famille $\mathcal{B}'$ écrite dans la base $\mathcal{B}$, notée $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$.*

PROPOSITION 2.50 :
Avec les notations ci-dessus, on a $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E)$. Cette matrice est donc inversible et son inverse est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$: $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1}$.

<u>REMARQUE 2.60</u> : Soit E un $\mathbb{K}$-espace de dimension finie et $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{B}''$ trois bases de E, on a une "transitivité" au niveau des changements de bases : $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}$.

<u>EXEMPLE 2.35</u> : Calculons toujours l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

PROPOSITION SUR LES COORDONNÉES D'UN VECTEUR DANS DEUX BASES 2.51 :
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (f_1, \cdots, f_n)$ deux bases de E, P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, x un vecteur de E auquel on associe ses vecteurs colonne X (ses coordonnées dans $\mathcal{B}$) et X' (celles dans $\mathcal{B}'$), alors : $X = PX'$ c'est-à-dire $X = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}X'$.

PROPOSITION DE FORMULE DE CHANGEMENT DE BASES 2.52 :
Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies et de bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}'_1$ pour E et $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}'_2$ pour F, $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'_1,\mathcal{B}'_2}(f)$. On note P (resp. Q) la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}'_1$ (resp. de $\mathcal{B}_2$ à $\mathcal{B}'_2$), alors on a : $A' = Q^{-1}AP$ ou $A = QA'P^{-1}$.

REMARQUE HP 2.61 :
• *Soit* $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ *et* $(A,B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$, *on dit que* A **et** B **sont équivalentes** *s'il existe deux matrices* $P \in GL_p(\mathbb{K})$ *et* $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ *telles que* $A = QBP^{-1}$.
• *L'équivalence est une relation d'équivalence sur les matrices de* $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
• *Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles représentent la même application linéaire entre* E *et* F *de bonnes dimensions dans des bases différentes d'après le théorème précédent.*

THÉORÈME DE FORMULE DE CHANGEMENT DE BASES POUR UN MÊME ENDOMORPHISME (ÉNORME) 2.53 :
Soit E **un** $\mathbb{K}$**-espace vectoriel de dimension finie de bases** $\mathcal{B}$ **et** $\mathcal{B}'$**,** $f \in \mathcal{L}(E)$, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ **et** $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$**, on note** P **la matrice de passage de** $\mathcal{B}$ **à** $\mathcal{B}'$**, alors :** $A' = P^{-1}AP$ **ou** $A = PA'P^{-1}$**.**

REMARQUE 2.62 :
• *On s'en souvient bien par un moyen mnémotechnique d'une grande finesse (voir ci-dessous) ou avec la "transitivité" au niveau des bases :* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$.
• *S'il existe* $D = \mathrm{diag}(d_1,\cdots,d_n)$ *diagonale et* P *inversible telles que* $A = PDP^{-1}$ *(on dit que* A *est* **diagonalisable***), alors le calcul des puissances de* A *est aisé :* $A^p = PD^pP^{-1} = P\,\mathrm{diag}(d_1^p,\cdots,d_n^p)P^{-1}$.

DÉFINITION 2.33 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, *on dit que* A **et** B **sont semblables** *si :* $\exists P \in GL_n(\mathbb{K}),\ A = PBP^{-1}$.

REMARQUE 2.63 : • *La similitude est une relation d'équivalence sur les matrices de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
• *Deux matrices sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme de* E *de bonne dimension dans des bases différentes d'après le théorème précédent.*

2.1.26 : Rang d'une matrice

DÉFINITION 2.34 :
Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ *et* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, *on définit* **le rang de la matrice** A, *noté* $\mathrm{rg}(A)$, *c'est le rang de l'application linéaire canoniquement associée à* A.

PROPOSITION 2.54 :
Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$**, deux** $\mathbb{K}$**-espaces vectoriels** E **et** F **de dimension** p **et** n **et de bases** $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ **respectivement,** $f \in \mathcal{L}(E,F)$**, on pose** $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$**, alors** $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(f)$**.**

REMARQUE 2.64 : Le rang de A *est égal au rang de toute application linéaire dont* A *est la matrice.*

EXERCICE 2.36 : Calcul du rang de $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ par une vision géométrique.

REMARQUE HP 2.65 : Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $r = \mathrm{rg}(A)$ *et la matrice* $J_{n,p,r} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *qui ne contient que des* 0 *sauf* $j_{1,1} = \cdots = j_{r,r} = 1$ *:* A *et* $J_{n,p,r}$ *sont équivalentes.*
A *et* B *de* $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *sont donc équivalentes si et seulement si elles ont même rang.*

PROPOSITION 2.55 :
Si A **et** B **de** $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ **sont semblables alors** $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$**.**
Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ **et** $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$**, alors** A **et** A^T **ont le même rang.**

REMARQUE 2.66 : Composer une application linéaire par des isomorphismes ne change pas son rang. Par "analogie", multiplier une matrice par une matrice inversible non plus. Or les matrices de GAUSS *sont toutes inversibles : les opérations élémentaires de* GAUSS *ne modifient donc pas le rang. Le but est de se ramener à une matrice échelonnée réduite dont on connaît le rang.*

EXEMPLE 2.37 : Calcul du rang de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

2.1.27 : Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

⊙ On admet le résultat suivant qui permet de définir la notion de déterminant dans une base.

REMARQUE FONDAMENTALE 2.67 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. Il existe une unique application notée $\det_{\mathcal{B}} : E^n \to \mathbb{K}$ qui est linéaire par rapport à chacune de ses variables, alternée, et qui vérifie $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$.

REMARQUE 2.68 : Soit $f : E^n \to \mathbb{K}$ une application linéaire par rapport à chacune de ses variables, alternée, alors f est antisymétrique au sens où l'échange de deux vecteurs transforme le résultat en le multipliant par -1.

PROPOSITION 2.56 :
Soit $f : E^n \to \mathbb{K}$ une application linéaire par rapport à chacune de ses variables, alternée, alors $f = f(\mathcal{B})\det_{\mathcal{B}}$ (f est proportionnelle à $\det_{\mathcal{B}}$.)

PROPOSITION 2.57 :
Soit E un plan vectoriel et $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base de E, alors si $x = x_1e_1 + x_2e_2$ et $y = y_1e_1 + y_2e_2$, on a $\det_{\mathcal{B}}(x, y) = x_1y_2 - x_2y_1$.

PROPOSITION 2.58 :
Soit E un espace de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E, alors si on se donne trois vecteurs $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$, $y = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3$ et $z = z_1e_1 + z_2e_2 + z_3e_3$, on a formule de SARRUS : $\det_{\mathcal{B}}(x, y, z) = x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_1y_3z_2 - x_2y_1z_3 - x_3y_2z_1$.

REMARQUE FONDAMENTALE 2.69 : En géométrie, si $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$:

- *Pour deux vecteurs $\vec{u} = (x, y)$ et $\vec{v} = (x', y')$ du plan, on retrouve $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - x'y$ qui est l'aire orientée du parallélogramme formé sur les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.*
- *Pour trois vecteurs $\vec{u} = (x, y, z)$, $\vec{v} = (x', y', z')$ et $\vec{w} = (x'', y'', z'')$ de l'espace, on a comme avant $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = xy'z'' + x'y''z + x''yz' - xy''z' - x'yz'' - x''y'z$ qui est le volume orienté du parallélépipède formé par les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.*

THÉORÈME (ÉNORME) 2.59 :
Soit E un espace de dimension finie et $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux base de E. Alors $\det_{\mathcal{B}'} = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})\det_{\mathcal{B}}$ ce qui montre que $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = 1$.
Soit $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E et $\mathcal{B}$ une base de E alors :

- $\big(\mathcal{F}$ **est une base**$\big) \iff \big(\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0\big)$.
- $\big(\mathcal{F}$ **liée**$\big) \iff \big(\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = 0\big)$.

2.1.28 : Déterminant d'un endomorphisme

REMARQUE FONDAMENTALE 2.70 : Soit E *un espace vectoriel de dimension* n, f *un endomorphisme de* E *et deux bases* $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ *et* $\mathcal{B}' = (e'_1, \cdots, e'_n)$ *de* E, *en se servant de la notion de déterminant de famille de vecteurs, on a* $\det_{\mathcal{B}}\big(f(e_1), \cdots, f(e_n)\big) = \det_{\mathcal{B}'}\big(f(e'_1), \cdots, f(e'_n)\big)$.

DÉFINITION 2.35 :
Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie et* $\mathcal{B}$ *une base de* E, $f \in \mathcal{L}(E)$, *on appelle* **le déterminant de** f, *noté* $\det(f)$, *le scalaire* $\det(f) = \det_{\mathcal{B}}\big(f(\mathcal{B})\big)$ *(ne dépend pas de* $\mathcal{B}$*).*

EXEMPLE 2.38 **:** Soit $E = F \oplus G$ et la symétrie $s_{F,G}$, alors $\det(s_{F,G}) = (-1)^{\dim(G)}$.

THÉORÈME 2.60 :
Si E **est un espace de dimension finie,** $\lambda \in \mathbb{K}$ **et** $(f, g) \in \big(\mathcal{L}(E)\big)^2$ **:**

- $\det(\mathrm{id}_E) = 1$
- $\det(f) \neq 0 \iff f \in GL(E)$
- $\det(f \circ g) = \det(f) \times \det(g)$
- $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$
- $f \in GL(E) \Longrightarrow \det(f^{-1}) = \big(\det(f)\big)^{-1}$

2.1.29 : Déterminant d'une matrice carrée

DÉFINITION 2.36 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n \mathbb{K})$ *et* f *l'endomorphisme de* $\mathbb{K}^n$ *canoniquement associé à* A, *alors on définit le* **déterminant de la matrice** A *par* $\det(A) = \det(f)$. *On note* $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$.

REMARQUE 2.71 : Comme le déterminant des familles de vecteurs, le déterminant d'une matrice est linéaire par rapport à chacune de ses colonnes et il est aussi alterné, donc antisymétrique.

THÉORÈME 2.61 :
Si $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in \mathbb{K}$ **et** $(A, B) \in \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\big)^2$ **:**

- $\det(I_n) = 1$
- $\det(A) \neq 0 \iff A \in GL_n(\mathbb{K})$
- $\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$
- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$
- $A \in GL_n(\mathbb{K}) \Longrightarrow \det(A^{-1}) = \big(\det(A)\big)^{-1}$

REMARQUE 2.72 : • *Si* $ad - bc \neq 0$, *l'inverse de la matrice* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *est* $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

• *(EN MPSI) Si* $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(A) = \sum\limits_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod\limits_{k=1}^{n} a_{\sigma(k),k}$ *où* $\boldsymbol{\mathfrak{S}}_n$ *est le groupe des* $n!$ *permutations (bijections) de l'ensemble* $[\![1; n]\!]$ *et* $\varepsilon(\sigma) = \pm 1$ *la signature de la permutation* σ.

• *Ainsi, si deux matrices carrées* A *et* B *sont semblables, il existe* P *inversible telle que* $A = PBP^{-1}$ *et le théorème précédent montre alors que* $\det(A) = \det(B)$ *en plus de* $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$.

• *Pour* $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, *on a donc* $\det(AB) = \det(BA)$ *: c'est vrai parce que les matrices sont carrées. Ce résultat n'est a priori pas valable pour* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *et* $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

• *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, *par une récurrence immédiate :* $\forall p \in \mathbb{N},\ \det(A^p) = \det(A)^p$.

• *De plus, si* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $A \in GL_n(\mathbb{K})$, *on a aussi :* $\forall p \in \mathbb{Z},\ \det(A^p) = \det(A)^p$.

REMARQUE 2.73 : Le déterminant n'est pas linéaire par rapport à sa variable, sauf si $n = 1$.
Soit $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ *et* $\mathcal{B}''$ *trois bases de* E *alors :*

- *Comme* $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1}$, *en passant aux déterminants :* $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = \left(\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')\right)^{-1}$.
- *Comme* $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}$, *de même :* $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}'') = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}'')$.

PROPOSITION 2.62 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$**, alors** $\det(A) = \det({}^tA) = \det(A^T)$**. Par conséquent :**

- **(1)** $\det$ **est linéaire par rapport à chacune des lignes de sa variable.**
- **(2)** $\det$ **est alterné et antisymétrique par rapport aux lignes de sa variable.**

REMARQUE 2.74 : Ce qui est vrai pour les colonnes l'est donc aussi pour les lignes :

- *Une matrice qui possède une colonne (ou une ligne) nulle a un déterminant nul.*
- *Une matrice qui possède deux colonnes (ou deux lignes) proportionnelles a un déterminant nul.*

2.1.30 : Calcul des déterminants

DÉFINITION 2.37 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, *pour* $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, *on appelle :*

- **mineur** *associé à la case* (i,j), *noté* $\Delta_{i,j}$, *c'est le déterminant de la matrice obtenue en rayant la ligne* i *et la colonne* j *dans la matrice* A.
- **cofacteur** *associé à la case* (i,j) *le terme* $A_{i,j} = (-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$.

REMARQUE 2.75 :

- *On s'aperçoit, pour le calcul des cofacteurs, qu'à une case est associé un signe avec la "règle du damier" : des + sur la diagonale (celle de la trace) et des + et des - en alternance.*
- *On a donc, avec ces notations :* $\Delta_{i,j} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$.

THÉORÈME SUR LE DÉVELOPPEMENT D'UN DÉTERMINANT PAR RAPPORT À L'UNE DE SES RANGÉES 2.63 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ **et** $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$**, alors :**

- $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}A_{i,j}$ **(développement par rapport à la colonne** j**).**
- $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}A_{i,j}$ **(développement par rapport à la ligne** i**).**

EXERCICE CONCOURS 2.39 *:* Mines PSI 2013 Vincent
Soit $A_n = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{i,j} = 1 + x^2$ si $i = j$, $a_{i,j} = x$ si $|i-j| = 1$ et $a_{i,j} = 0$ sinon. On pose $D_n = \det(A_n)$. Montrer que D_n est une fonction polynomiale et déterminer son degré. Donner une expression simple de $D_n(x)$.

PROPOSITION 2.64 :

Si $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ **est triangulaire alors** $\det(A) = \prod_{k=1}^{n} a_{k,k}$.

REMARQUE 2.76 : • Le déterminant d'une matrice diagonale est le produit de ses termes diagonaux.

- *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in \mathbb{K}$ *et* $\lambda \neq 1$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ *avec* $i \neq j$ *alors :*
  - *matrice de transvection :* $\det\big(T_{i,j}(\alpha)\big) = 1$.
  - *matrice de dilatation :* $\det\big(D_i(\lambda)\big) = \lambda$.
  - *matrice d'interversion :* $\det\big(I_{i,j}\big) = -1$.

PROPOSITION SUR LES RELATIONS ENTRE DÉTERMINANT ET OPÉRATIONS DE GAUSS 2.65 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ **:**

- **Les transvections** $L_i \longleftarrow L_i + \alpha L_j$ **et** $C_j \longleftarrow C_j + \alpha C_i$ **ne modifient pas** $\det(A)$**.**
- **Les dilatations** $L_i \longleftarrow \lambda L_i$ **ou** $C_j \longleftarrow \lambda C_j$ **multiplient** $\det(A)$ **par** λ**.**
- **Les interversions** $L_i \longleftrightarrow L_i$ **ou** $C_j \longleftrightarrow C_j$ **change le signe de** $\det(A)$**.**

REMARQUE 2.77 : Ceci donne un algorithme pratique (toujours en complexité $O(n^3)$*) par les opérations de* GAUSS *pour le calcul d'un déterminant d'une matrice* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *car toute matrice est équivalente (par lignes ou colonnes) à une matrice triangulaire.*

ORAL BLANC 2.40 : CCP PSI 2014 Nicolas
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ et $b \neq c$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ formée de a sur la diagonale, b dans les cases au dessus et c dans les cases en dessous de la diagonale. Soit J la matrice ne contenant que des 1. Montrer que $x \mapsto \det(M + xJ)$ est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 1. En déduire $\det(M)$.

2.1.31 : Systèmes linéaires

DÉFINITION 2.38 :

Soit $\mathbb{K}$ *un corps commutatif,* $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$*, un* **système linéaire à n équations et p inconnues** *est de la forme* (S) :
$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p = & b_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots = & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = & b_n \end{cases}$$
où l'on cherche les solutions $(x_1, \cdots, x_p) \in \mathbb{K}^p$.

$A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ *est la* **matrice du système** (S), $(b_1, \cdots, b_n)$ *est le* **second membre** *de* (S). *Le système est dit* **homogène** *quand* $b_1 = \cdots = b_n = 0$ *et celui-ci est le* **système homogène associé** *à* (S). (S) *est dit* **compatible** *s'il existe au moins une solution et dit* **incompatible** *sinon.*

REMARQUE 2.78 : Un système homogène est compatible car il existe la solution $(0, \cdots, 0) \in \mathbb{K}^p$.

DÉFINITION 2.39 :

Soit (S) *un système linéaire et* A *sa matrice associée, on appelle* **rang du système** (S) *le rang* r *de la matrice* A*, et* **déterminant du système** (S) *le scalaire* $\det(A)$. *On dit que* (S) *est un* **système carré** *si* $n = p$ *et que* (S) *est un* **système de** CRAMER *si* $n = p = r$.

REMARQUE 2.79 : Le système ci-dessus s'écrit matriciellement $AX = B$. *Le système est compatible (il admet au moins une solution) si et seulement si* $B \in \text{Im}(A)$. *S'il est compatible, il admet au plus une solution si et seulement si* $\text{Ker}(A) = \{0\}$.

THÉORÈME 2.66 :

L'ensemble $G = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \mid X$ **solution de** $(S)\}$ **est soit vide (si** (S) **incompatible) soit un sous-espace affine de** $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ **de direction** $\text{Ker}(A)$ **; c'est-à-dire que si** X_0 **est une solution de** (S)**, alors** $G = X_0 + \text{Ker}(A) = \{X_0 + Y \mid Y \in \text{Ker}(A)\}$**.**

PROPOSITION 2.67 :
Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, par des opérations de Gauss sur les lignes et éventuellement seulement des interversions de colonnes, on peut transformer la matrice A en

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a'_{1,r+1} & \cdots & a'_{1,p} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a'_{r,r+1} & \cdots & a'_{r,p} \\ 0 & \cdots & & & & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & & & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \textbf{ alors } (S)\ :\ \begin{cases} x'_1 + a'_{1,r+1}x'_{r+1} + \cdots + a'_{1,p}x'_p = & b'_1 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots = & \vdots \\ x'_r + a'_{r,r+1}x'_{r+1} + \cdots + a'_{r,p}x'_p = & b'_r \\ 0 = & b'_{r+1} \\ \vdots = & \vdots \\ 0 = & b'_n \end{cases}.$$

REMARQUE 2.80 : Dans la forme ci-dessus : (S) est compatible $\iff b'_{r+1} = \cdots = b'_n = 0$. Dans ce cas : $(x_1, \cdots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ solution si et seulement si $\begin{cases} x_{\sigma(1)} = b'_1 - a'_{1,r+1}x_{\sigma(r+1)} - \cdots - a'_{1,p}x_{\sigma(p)} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ x_{\sigma(r)} = b'_r - a'_{r,r+1}x_{\sigma(r+1)} - \cdots - a'_{r,p}x_{\sigma(p)} \end{cases}$

Les $(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(r)}) = (x'_1, \cdots, x'_r)$ sont dites (dans cette présentation des solutions) les **inconnues principales** *et les $x_{\sigma(r+1)}, \cdots, x_{\sigma(p)}$ sont appelées les* **inconnues auxiliaires**.

⊙ Les formules de Cramer qui suivent sont hors programme dans toutes les filières.

PROPOSITION 2.68 :
(HP)Supposons le système (S) de Cramer et notons, pour $k \in [\![1;n]\!]$, A_k la matrice obtenue en remplaçant dans A (matrice de (S)) la k-ième colonne par la colonne B second membre. Alors l'unique solution $x = (x_1, \cdots, x_n)$ de (S) vérifie : $\forall k \in [\![1;n]\!],\ x_k = \dfrac{\det(A_k)}{\det(A)}$.

EXERCICE CLASSIQUE 2.41 *:* Grâce à ceci, résoudre $\begin{cases} a + b + c = & 6 \\ 4a + 2b + c = & 12 \\ 9a + 3b + c = & 20 \end{cases}$.

PARTIE 2.2 : PRODUIT ET SOMME D'ESPACES

2.2.1 : Produit d'espaces vectoriels

PROPOSITION 2.69 :
Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, on définit $+ : (E \times F)^2 \to E \times F$ et $. : \mathbb{K} \times (E \times F) \to E \times F$ par :
$\forall (\lambda, x, x', y, y') \in \mathbb{K} \times E^2 \times F^2,\ (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ et $\lambda.(x, y) = (\lambda.x, \lambda.y)$.
Alors $(E \times F, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel dont le vecteur nul est $0_{E\times F} = (0_E, 0_F)$.

REMARQUE 2.81 : • Ce nouvel espace $E \times F$ est appelé **espace vectoriel produit** *des espaces E et F.*
- *$\mathbb{K}^2$ usuel est l'espace produit $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$ pour les opérations usuelles.*

PROPOSITION 2.70 :
Si E et F sont de dimensions finies, alors $E \times F$ aussi et $\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$.

REMARQUE 2.82 : On peut bien sûr généraliser le procédé de construction.

PROPOSITION 2.71 :
Soit $n \geqslant 3$ et des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels $E_1, \cdots E_n$, si on définit les lois + et . dans $E_1 \times \cdots \times E_n$ par $\forall(\lambda, x_1, x_1', \cdots, x_n, x_n') \in \mathbb{K} \times E_1^2 \times \cdots \times E_n^2$:
$$(x_1, \cdots, x_n) + (x_1', \cdots, x_n') = (x_1 + x_1', \cdots, x_n + x_n') \text{ et } \lambda.(x_1, \cdots, x_n) = (\lambda.x_1, \cdots, \lambda.x_n),$$ **alors $(E_1 \times \cdots \times E_n, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel dont le vecteur nul est $0_{E_1 \times \cdots \times E_n} = (0_{E_1}, \cdots, 0_{E_n})$.**

REMARQUE 2.83 : • *Si $E_1 = \cdots = E_n = E$, on notera E^n à la place l'espace $E \times \cdots \times E$ (n fois).*

- *Ce nouvel espace $E_1 \times \cdots \times E_n$ noté aussi $\prod\limits_{k=1}^{n} E_k$ est encore appelé un espace produit.*
- *$\mathbb{K}^n$ usuel est l'espace produit $\mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K}$ pour les opérations usuelles.*

PROPOSITION 2.72 :
Si $E_1, \cdots, E_n$ sont de dimensions finies, alors $\prod\limits_{k=1}^{n} E_k$ aussi et $\dim\left(\prod\limits_{k=1}^{n} E_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dim(E_k)$.

REMARQUE 2.84 : • *En particulier, si E est de dimension n et $p \in \mathbb{N}^*$, alors $\dim(E^p) = np$.*

- *(HP) Si on a deux corps $\mathbb{K}$ et $\mathbb{L}$ tels que $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ et tels que $\mathbb{L}$ est un $\mathbb{K}$-espace de dimension $p \in \mathbb{N}^*$, alors si E est un $\mathbb{L}$-espace de dimension n, E est aussi un $\mathbb{K}$-espace de dimension np.*

2.2.2 : Sommes de plusieurs sous-espaces

REMARQUE 2.85 : Notation pas forcément standard, si on se donne $\mathcal{F}_1, \cdots, \mathcal{F}_p$ des familles de vecteurs d'un espace E, on notera $\mathcal{F}_1 \amalg \cdots \amalg \mathcal{F}_p$ la concaténation des familles (dans cet ordre et avec répétition).

DÉFINITION 2.40 :
Soit p sous-espaces vectoriels de E notés $E_1, \cdots, E_p$; on note $E_1 + \cdots + E_p = \sum\limits_{k=1}^{p} E_k$ la **somme des sous-espaces** $E_1, \cdots, E_p$ *définie par* $\sum\limits_{k=1}^{p} E_k = \left\{x \in E \;\middle|\; \exists(x_1, \cdots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p,\ x = x_1 + \cdots + x_p\right\}$.

PROPOSITION 2.73 :
Avec ces notations, $E_1 + \cdots + E_p$ est un sous-espace vectoriel de E.

REMARQUE 2.86 : $\sum\limits_{k=1}^{p} E_k = \mathrm{Vect}\left(\bigcup\limits_{k=1}^{p} E_k\right)$ *est le plus petit sous-espace vectoriel de E (pour l'inclusion) contenant tous les E_k, c'est-à-dire le sous-espace de E engendré par la réunion des sous-espaces $E_1, \cdots, E_p$.*

DÉFINITION 2.41 :
Avec les notations ci-dessus, on dit que la somme des E_k est **une somme directe** *et on note alors* $\sum\limits_{k=1}^{p} E_k = E_1 \oplus \cdots \oplus E_p = \bigoplus\limits_{k=1}^{p} E_k$ *si* $\forall(x_1, \cdots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p,\ x_1 + \cdots + x_p = 0_E \Longrightarrow x_1 = \cdots = x_p = 0_E$.

REMARQUE 2.87 : Quand $p = 2$, on retrouve la définition de deux sous-espaces en somme directe.

EXERCICE 2.42 **:** Soit $E_1, \cdots, E_n$ et $F_1, \cdots, F_n$ des sous-espaces vectoriels d'un espace E tels que $\forall k \in [\![1; n]\!],\ E_k \subset F_k$ et $\sum\limits_{k=1}^{n} E_k = \bigoplus\limits_{k=1}^{n} F_k$. Montrer que $\forall k \in [\![1; n]\!],\ E_k = F_k$.

PROPOSITION POUR LA CARACTÉRISATION DES SOMMES DIRECTES 2.74 :
Soit $E_1, \cdots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\sum\limits_{k=1}^{p} E_k$ **est directe.**

(ii) $\forall x \in \sum\limits_{k=1}^{p} E_k,\ \exists!(x_1, \cdots, x_p) \in \prod\limits_{k=1}^{p} E_k,\ x = x_1 + \cdots + x_p$.

(iii) $\forall k \in [\![1;p]\!],\ E_k \cap \left(\sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{p} E_j \right) = \{0_E\}$.

REMARQUE 2.88 : Attention : $\left(\sum\limits_{k=1}^{p} E_k \textit{ directe} \right) \not\Longleftrightarrow \left(\forall (i,j) \in [\![1;p]\!]^2,\ i \neq j \Longrightarrow E_i \cap E_j = \{0_E\} \right)$.

EXEMPLE 2.43 : Dans $E = \mathbb{R}^2$, $E_1 = \mathrm{Vect}(e_1)$, $E_2 = \mathrm{Vect}(e_2)$, $E_3 = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2)$ vérifient $E_1 \cap E_2 = E_1 \cap E_3 = E_2 \cap E_3 = \{0_E\}$ mais $E_1 + E_2 + E_3 = E$ n'est pas directe : $(e_1) + (e_2) + (-e_1 - e_2) = 0_E$.

THÉORÈME SUR LES SOMMES DIRECTES ET LES DIMENSIONS 2.75 :
Si $E_1, \cdots, E_p$ sont des sous-espaces de E de dimension finie :

- **Si $E_1, \cdots, E_p$ sont en somme directe, $\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_p$ des bases respectives de $E_1, \cdots, E_p$ alors $\mathcal{B}_1 \amalg \cdots \amalg \mathcal{B}_p$ est une base de $\bigoplus\limits_{k=1}^{p} E_k$ et $\dim \left(\bigoplus\limits_{k=1}^{p} E_k \right) = \sum\limits_{k=1}^{p} \dim(E_k)$.**
- **On a l'équivalence $\sum\limits_{k=1}^{p} E_k = \bigoplus\limits_{k=1}^{p} E_k \Longleftrightarrow \dim \left(\sum\limits_{k=1}^{p} E_k \right) = \sum\limits_{k=1}^{p} \dim(E_k)$.**
- **En général, on a $\dim \left(\sum\limits_{k=1}^{p} E_k \right) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{p} \dim(E_k)$.**

REMARQUE 2.89 :

- *Si $E = \bigoplus\limits_{k=1}^{p} E_k$ est de dimension finie et si $\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_p$ sont des bases respectives de $E_1, \cdots, E_p$ alors $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \amalg \cdots \amalg \mathcal{B}_p$ est dite une base de E appelée* **base adaptée à la décomposition** $E = \bigoplus\limits_{k=1}^{p} E_k$.
- *Réciproquement, soit une base $\mathcal{B}$ d'un espace de dimension finie E telle que $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \amalg \cdots \amalg \mathcal{B}_p$, alors si on pose $\forall k \in [\![1;p]\!],\ E_k = \mathrm{Vect}(\mathcal{B}_k)$, on a $E = \bigoplus\limits_{k=1}^{p} E_k$ comme attendu.*

EXERCICE CLASSIQUE 2.44 : Soit E un espace, $(f_1, \cdots, f_n) \in \mathcal{L}(E)^n$ tel que $f_1 + \cdots + f_n = \mathrm{id}_E$ et $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ f_i \circ f_j = 0$ si $i \neq j$. Montrer que chaque f_k est un projecteur et que $\bigoplus\limits_{k=1}^{n} \mathrm{Im}(f_k) = E$.

REMARQUE HP 2.90 : Soit E et F deux espaces, $E_1, \cdots, E_p$ des sous-espaces de E tels que $E = \bigoplus\limits_{k=1}^{p} E_k$ et pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, $f_i \in \mathcal{L}(E_i, F)$. Alors il existe une unique $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que : $\forall i \in [\![1;p]\!],\ u|_{E_i} = f_i$. Ainsi, si $(u, v) \in (\mathcal{L}(E, F))^2$, on a $u = v \Longleftrightarrow \left(\forall i \in [\![1;p]\!],\ u|_{E_i} = v|_{E_i} \right)$.
Si p_i le projecteur sur E_i parallèlement à $\bigoplus\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} E_j$ pour $i \in [\![1;n]\!]$, $(p_1, \cdots, p_n)$ est appelée **famille des projecteurs adaptée à la décomposition** $E = \bigoplus\limits_{k=1}^{n} E_k$ *:* $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k = \mathrm{id}_E$ *et* $p_i \circ p_j = 0$ *si* $i \neq j$.

PARTIE 2.3 : MATRICES PAR BLOCS

2.3.1 : Produit matriciel par blocs et stabilité

PROPOSITION SUR LE PRODUIT MATRICIEL PAR BLOCS 2.76 :
Si on se donne des entiers naturels non nuls $n = n_1 + n_2$, $p = p_1 + p_2$, $q = q_1 + q_2$ **et deux matrices** $A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ **et** $B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ **avec** $A_{i,j} \in \mathcal{M}_{n_i,p_j}(\mathbb{K})$ **et** $B_{j,k} \in \mathcal{M}_{p_j,q_k}(\mathbb{K})$**, alors on a** $AB = \begin{pmatrix} A_{1,1}B_{1,1} + A_{1,2}B_{2,1} & A_{1,1}B_{1,2} + A_{1,2}B_{2,2} \\ A_{2,1}B_{1,1} + A_{2,2}B_{2,1} & A_{2,1}B_{1,2} + A_{2,2}B_{2,2} \end{pmatrix}$**.**

PROPOSITION 2.77 :
Si $A = (A_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ **est composée de blocs "de bonnes tailles" ainsi que** $B = (B_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant q}}$**, alors** $AB = C$ **où** C **est écrite par blocs** $C = (C_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant q}}$ **avec** $C_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{p} A_{i,k}B_{k,j}$**.**

PROPOSITION SUR LA RELATION ENTRE STABILITÉ ET MATRICE TRIANGULAIRE SUPÉRIEURE PAR BLOCS 2.78 :
Soit E **un espace vectoriel de dimension finie,** F **un sous-espace vectoriel de** E **et** $f \in \mathcal{L}(E)$**. Soit** $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ **une base de** E **telle que** $\mathcal{B}_F = (e_1, \cdots, e_p)$ **soit une base de** F**. On a alors l'équivalence :** $\big(F$ **est stable par** $f\big) \Longleftrightarrow \Big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ **est triangulaire par blocs**$\Big)$**.**
$A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ **est alors la matrice dans la base** $\mathcal{B}_F$ **de l'endomorphisme** f_F **de** F **induit par** f**.**

REMARQUE 2.91 : Si $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ *est une base de* E, $f \in \mathcal{L}(E)$ *et* $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ *:*
- $\big(A$ *est diagonale*$\big) \Longleftrightarrow \big(\forall k \in [\![1;n]\!],\ \mathrm{Vect}(e_k)$ *est stable par* $f\big)$.
- $\big(A$ *est triangulaire supérieure*$\big) \Longleftrightarrow \big(\forall k \in [\![1;n]\!],\ E_k = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_k)$ *est stable par* $f\big)$.

PROPOSITION SUR LA RELATION ENTRE STABILITÉ ET MATRICE DIAGONALE PAR BLOCS 2.79 :
Si $E = \bigoplus\limits_{k=1}^{p} E_k$ **et** $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \amalg \cdots \amalg \mathcal{B}_p$ **est une base adaptée à la décomposition, si** $f \in \mathcal{L}(E)$ **alors on a l'équivalence :** $\big(\forall k \in [\![1;p]\!],\ E_k$ **stable par** $f\big) \Longleftrightarrow \big(A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ **diagonale par blocs dans** $\mathcal{B}\big)$**.**
Dans ce cas : $A = \mathrm{diag}(A_1, \cdots, A_p)$ **où** $\forall k \in [\![1;p]\!],\ A_k = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_k}(f_k)$ **avec** $f_{E_k} = f_k$**.**

PROPOSITION SUR LA STABILITÉ SI COMMUTATION 2.80 :
Si $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ **et** u **et** v **commutent (soit** $u \circ v = v \circ u$**) alors** $\mathrm{Ker}(u)$ **et** $\mathrm{Im}(u)$ **sont stables par** v**.**

ORAL BLANC 2.45 : Soit E de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $E = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec A inversible.

2.3.2 : Déterminant par blocs

THÉORÈME , DÉTERMINANT D'UNE MATRICE TRIANGULAIRE PAR BLOCS 2.81 :
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ **triangulaire par blocs, c'est-à-dire que** M **s'écrit sous la forme** $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ **avec** $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $D \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$ **et** $B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$. **Alors on a :** $\det(M) = \det(A) \times \det(D)$.
Plus généralement, si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ **est triangulaire supérieure (resp. inférieure) par blocs :** $M = (A_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$ **avec** $A_{i,j}$ **matrice nulle si** $i > j$ **(resp.** $i < j$**) alors** $\det(M) = \prod_{k=1}^{p} \det(A_{k,k})$.

REMARQUE 2.92 : On peut faire des opérations de GAUSS *par blocs pour calculer un déterminant.*

EXERCICE CONCOURS 2.46 : Centrale PSI 2013

Soit $n \geqslant 1$ et $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, on définit $M \in \mathcal{M}_{n^2}(\mathbb{R})$ par blocs par $M = \begin{pmatrix} A & B & \cdots & B \\ B & A & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & B \\ B & \cdots & B & A \end{pmatrix}$.

Calculer $\det(M)$ en fonction de n, A et B.

PARTIE 2.4 : TRACE

2.4.1 : Trace d'une matrice carrée

DÉFINITION 2.42 :
Si $n \in \mathbb{N}^*$, $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, *on définit la* **trace** *de* A, *c'est le scalaire* $\operatorname{tr}(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,k}$.

PROPOSITION SUR LA RELATION ENTRE TRACE, TRANSPOSÉE, PRODUIT 2.82 :
Si $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ **alors on a** $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.
Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ **alors** $\operatorname{tr}(A^T) = \operatorname{tr}(A)$.

PROPOSITION 2.83 :
L'application trace est une forme linéaire non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Deux matrices semblables ont même trace : si $A = PBP^{-1}$ **alors** $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$.

REMARQUE FONDAMENTALE 2.93 : $\operatorname{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *est une forme linéaire non nulle car* $\operatorname{tr}(I_n) = n$ *donc* $H = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \operatorname{tr}(A) = 0\}$ *est un hyperplan de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *: c'est-à-dire* $\dim(H) = n^2 - 1$.

REMARQUE 2.94 : • *De plus, si* $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, *alors* $\operatorname{tr}(AA^T) = \operatorname{tr}(A^T A) = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} a_{i,j}^2$.

- *Par conséquent :* $\operatorname{tr}(AA^T) \geqslant 0$ *et on a l'équivalence :* $\operatorname{tr}(AA^T) = 0 \Longleftrightarrow A = 0$.
- *Même si d'après ce qui précède on a* $\operatorname{tr}(ABC) = \operatorname{tr}(BCA) = \operatorname{tr}(CAB)$, *en général* $\operatorname{tr}(ABC) \neq \operatorname{tr}(ACB)$.

EXEMPLE FONDAMENTAL 2.47 : Soit A une matrice de rang 1, montrer qu'il existe des matrices ligne L et colonne C telles que $A = CL$. En déduire que si A est carrée, $A^2 = \operatorname{tr}(A)A$.

2.4.2 : Trace d'un endomorphisme

DÉFINITION 2.43 :
Soit E *un espace vectoriel de dimension finie et* $f \in \mathcal{L}(E)$*, on appelle* **trace** *de* f *la trace de toute matrice de* f *dans une base de* E *:* $\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\right)$ *pour toute base* $\mathcal{B}$ *de* E.

REMARQUE 2.95 : $\mathrm{tr} : \mathcal{L}(E) \to \mathbb{K}$ *est une forme linéaire non nulle puisque* $\mathrm{tr}(\mathrm{id}_E) = \dim(E) > 0$ *donc* $H = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid \mathrm{tr}(f) = 0\}$ *est un hyperplan de* $\mathcal{L}(E)$ *: c'est-à-dire* $\dim(H) = (\dim(E))^2 - 1$.

PROPOSITION SUR LES PROPRIÉTÉS DE LA TRACE 2.84 :
Soit E **espace vectoriel de dimension finie et** $(f,g) \in \mathcal{L}(E)^2$ **et** p **un projecteur de** E **:**
- $\mathrm{tr}(\alpha f + \beta g) = \alpha\,\mathrm{tr}(f) + \beta\,\mathrm{tr}(g)$ **pour tout** $(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$ **(linéarité de la trace).**
- $\mathrm{tr}(g \circ f) = \mathrm{tr}(f \circ g)$ **(sorte de commutativité).**
- $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$ **(seulement pour les projecteurs).**

PARTIE 2.5 : LAGRANGE ET VANDERMONDE

2.5.1 : Interpolation de Lagrange

REMARQUE 2.96 : Le principe d'interpolation consiste en le remplacement d'une fonction par une autre, la plupart du temps plus simple à calculer, intégrer.... mais qui coïncide avec la première en un nombre fini de points. Nous nous limiterons ici à l'interpolation polynomiale qui consiste à trouver, une fois imposés des scalaires $a_1, \cdots, a_n$ *distincts et d'autres scalaires* $b_1, \cdots, b_n$ *(qu'on peut prendre égaux à* $b_k = f(a_k)$ *si on veut interpoler* f*), tous les polynômes* $P \in \mathbb{K}[X]$ *tels que* $\forall k \in [\![1;n]\!],\ P(a_k) = b_k$.

THÉORÈME SUR L'INTERPOLATION DE LAGRANGE 2.85 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$**,** $a_1, \cdots, a_n$ **des éléments de** $\mathbb{K}$ **distincts et** $b_1, \cdots, b_n$ **des scalaires, il existe un unique polynôme** $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ **tel que** $\forall k \in [\![1;n]\!],\ P(a_k) = b_k$**, il s'agit de** $P = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k \prod\limits_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n} \dfrac{X - a_i}{a_k - a_i}$**.**

REMARQUE FONDAMENTALE 2.97 : Avec ces notations, si on note $L_k = \prod\limits_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n} \dfrac{X - a_i}{a_k - a_i}$*, alors la famille* $(L_1, \cdots, L_n)$ *est une base de de l'espace* $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ *et les coordonnées d'un polynôme* $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ *sont* $(P(a_1), \cdots, P(a_n))$ *de sorte que* $P = \sum\limits_{k=1}^{n} P(a_k) L_k$.
On a donc, pour tout $p \in [\![0;n-1]\!],\ X^p = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^p L_k$ *qui nous servira pour la réduction.*

EXERCICE CLASSIQUE 2.48 : Résoudre $\begin{cases} a + b + c = & 6 \\ 4a + 2b + c = & 12 \\ 9a + 3b + c = & 20 \end{cases}$ avec ce nouveau concept.

REMARQUE 2.98 : En notant $P_0 = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k \prod\limits_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n} \dfrac{X - a_i}{a_k - a_i}$*, il existe une infinité de polynômes* P *tels que* $\forall k \in [\![1;n]\!],\ P(a_k) = b_k$*, ce sont tous les polynômes* $P = P_0 + Q \times \prod\limits_{k=1}^{n} (X - a_k)$.

EXERCICE CONCOURS 2.49 : OdlT 2012/2013 Mines PSI planche 172I

Trouver $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré minimal tel que le reste de la division euclidienne de P par X^2+X+1 soit $X-\dfrac{1}{2}$ et tel que le reste de la division euclidienne de P par X^2-X+1 soit $2-X$.

REMARQUE FONDAMENTALE 2.99 : Les polynômes de TCHEBYCHEV *sont définis par* $T_0=1$, $T_1=X$ *et* $\forall n \geqslant 2,\ T_n = 2XT_{n-1}-T_{n-2}$. *On a donc* $T_2=2X^2-1$, $T_3=4X^3-3X$, $T_4=8X^4-8X+1$, *etc...*

On montre par une récurrence double que :

- *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, T_n *est pair si* n *est pair,* T_n *est impair si* n *est impair.*
- *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, T_n *est de degré* n.
- *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *le coefficient dominant de* T_n *vaut* 2^{n-1}.
- *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et tout* $\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos\theta)=\cos(n\theta)$.

Par conséquent, pour $n \in \mathbb{N}^*$, *les racines de* T_n *sont toutes dans l'intervalle* $]-1;1[$ *(voir propriétés des produits scalaires construits avec une intégrale sur des espaces de fonctions continues sur un segment) et on a* $T_n = 2^{n-1}\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(X-\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)\right)$. *Choisir sur* $[-1;1]$ *les racines de* T_n *plutôt qu'une subdivision régulière minimise les effets de bord et le phénomène de* RUNGE *lors d'une interpolation.*

2.5.2 : Déterminant de VANDERMONDE

PROPOSITION SUR LE DÉTERMINANT DE VANDERMONDE 2.86 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et une famille de n scalaires $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n) \in \mathbb{K}^n$, on se donne la matrice de VANDERMONDE $A=(\alpha_j^{i-1})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, alors $\det(A)=\displaystyle\prod_{1\leqslant p<q\leqslant n}(\alpha_q-\alpha_p)$.

EXERCICE CONCOURS 2.50 : Mines PSI 2016 Samuel Cailleaux I

Soit $(a_0,\cdots,a_n,b_0,\cdots,b_n) \in \mathbb{R}^{2n+2}$ et la matrice $M=\big((a_i+b_j)^n\big)_{0\leqslant i,j\leqslant n}$. Calculer $\det(M)$.

REMARQUE FONDAMENTALE 2.100 : Lien entre LAGRANGE *et* VANDERMONDE *:*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_1,\cdots,a_n) \in \mathbb{K}^n$ *distincts,* $(b_1,\cdots,b_n) \in \mathbb{K}^n$. *Trouver le polynôme* $P_0 \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ *qui vérifie les conditions* $\forall k \in [\![1;n]\!],\ P(a_k)=b_k$ *revient à résoudre* $AX=B$ *où* $A=(a_i^{j-1})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ *telle que* $B^T=(b_1\ \cdots\ b_n)$ *et où l'inconnue* $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ *est composée des coefficients de* P_0 *dans la base canonique de* $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$. *En effet, en décomposant* $P_0=\displaystyle\sum_{j=1}^{n}x_jX^{j-1}$, *les conditions* $\forall i \in [\![1;n]\!],\ P_0(a_i)=b_i$ *s'écrivent* $\forall i \in [\![1;n]\!],\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n}x_ja_i^{j-1}=b_i$, *c'est-à-dire* $AX=B$.

PARTIE 2.6 : POLYNÔMES DE MATRICES ET D'ENDOMORPHISMES

2.6.1 : Polynômes d'endomorphismes

DÉFINITION 2.44 :

Soit E *un espace vectoriel et* $f \in \mathcal{L}(E)$. *Pour* $k \in \mathbb{N}$, *on pose* $f^k=\mathrm{id}_E$ *si* $k=0$ *et* $f^k=f\circ f^{k-1}$ *si* $k\geqslant 1$.

Si $P=\displaystyle\sum_{k=0}^{d}a_kX^k \in \mathbb{K}[X]$, *on définit* $P(f) \in \mathcal{L}(E)$ *par* $P(f)=\displaystyle\sum_{k=0}^{d}a_kf^k=a_df^d+a_{d-1}f^{d-1}+\cdots+a_1f+a_0\mathrm{id}_E$.

REMARQUE 2.101 : • *Attention :* $P(f)$ *n'a de sens que si* f *est un endomorphisme.*

• *Attention : ne pas oublier de remplacer* 1 *par* id_E *:* $f+1$ *n'a aucun sens si* $f \in \mathcal{L}(E)$.

THÉORÈME OPÉRATOIRE SUR LES POLYNÔMES D'ENDOMORPHISMES 2.87 :
Soit E **un espace vectoriel et** $f \in \mathcal{L}(E)$**, alors** $\varphi_f : \mathbb{K}[X] \to \mathcal{L}(E)$ **définie par** $\varphi_f(P) = P(f)$ **est un morphisme d'algèbres, c'est-à-dire que si** $(P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ **et** $(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$**, on a :**

$$(\alpha P + \beta Q)(f) = \alpha P(f) + \beta Q(f), \qquad (P \times Q)(f) = P(f) \circ Q(f) \qquad \text{et} \qquad \varphi_f(1) = \mathrm{id}_E.$$

REMARQUE 2.102 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, $g \in GL(E)$ *et* $P \in \mathbb{K}[X]$, *alors* $P\big(g^{-1} \circ f \circ g\big) = g^{-1} \circ P(f) \circ g$.

PROPOSITION 2.88 :
Pour $f \in \mathcal{L}(E)$**, notons** $\mathrm{Im}(\varphi_f) = \mathbb{K}[f]$ **(l'ensemble des polynômes en** f**), alors** $\mathbb{K}[f]$ **est une sous-algèbre commutative de** $\mathcal{L}(E)$**. En particulier** $\forall (P,Q) \in (\mathbb{K}[X])^2,\ P(f) \circ Q(f) = Q(f) \circ P(f)$**.**

REMARQUE 2.103 : • $\forall P \in \mathbb{K}[X]$, $\mathrm{Ker}\big(P(f)\big)$ *et* $\mathrm{Im}\big(P(f)\big)$ *sont des sous-espaces de* E *stables par* f.

• $\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid f \circ g = g \circ f\}$ *est l'ensemble des endomorphismes de* E *qui commutent avec* f *(appelé le* **commutant de** f*) :* $\mathcal{C}(f)$ *est une sous-algèbre de* $\mathcal{L}(E)$ *stable par* $\circ$ *qui contient* $\mathbb{K}[f]$.

2.6.2 : Polynômes annulateurs

DÉFINITION 2.45 :
Soit E *un espace,* $f \in \mathcal{L}(E)$ *et* $P \in \mathbb{K}[X]$. *On dit que* P *est* **un polynôme annulateur de** f *si* $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
On note $\mathrm{Ann}(f)$ *l'ensemble des polynômes annulateurs de* f *:* $\mathrm{Ann}(f) = \big\{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(f) = 0\big\}$.

REMARQUE 2.104 : • $\mathrm{Ann}(f) = \mathrm{Ker}(\varphi_f)$. *De plus* $\mathrm{Ann}(g^{-1} \circ f \circ g) = \mathrm{Ann}(f)$ *si* $g \in GL(E)$.

• $\mathrm{Ann}(f)$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{K}[X]$ *et* $\forall (P,Q) \in \mathrm{Ann}(f) \times \mathbb{K}[X],\ PQ \in \mathrm{Ann}(f)$.

On dit (le mot est hors programme) que $\mathrm{Ann}(f)$ *est un* **idéal** *de* $\mathbb{K}[X]$ *appelé* **idéal annulateur de** f.

EXEMPLE 2.51 : • Soit $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $D : f \mapsto f'$, alors on a $\mathrm{Ann}(D) = \{0\}$.

• Soit $E = \mathbb{C}[X]$ et $f : P \mapsto XP$, alors on a aussi $\mathrm{Ann}(f) = \{0\}$.

PROPOSITION 2.89 :
Si E **un espace de dimension finie, il existe au moins un polynôme annulateur non nul de** f**.**

EXERCICE 2.52 : Soit la partie $A = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid x^2 - 3y^2 = 1\}$, l'espace $E = \mathbb{R}^2$ et f l'endomorphisme (on l'admet) de E défini par $f(x,y) = (2x+3y, x+2y)$.

a. Vérifier que $f(A) \subset A$. Calculer f^2, trouver α et β tels que $f^2 + \alpha f + \beta\,\mathrm{id}_E = 0$.

b. Trouver a_1, a_2, b_1, b_2 des réels tels que $p_1 = a_1\big(f - b_1\,\mathrm{id}_E\big)$ et $p_2 = a_2(f - b_2\,\mathrm{id}_E)$ soient des projecteurs de $\mathbb{R}^2$, $p_1 + p_2 = \mathrm{id}_E$, $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1 = 0$ et $f = b_2 p_1 + b_1 p_2$.

c. En déduire f^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ en fonction de n, p_1 et p_2.

d. Trouver le plus petit élément de A. En déduire l'expression d'une infinité d'éléments de E.

REMARQUE HP 2.105 : On suppose que $\mathrm{Ann}(f)$ n'est pas réduit au polynôme nul :

- *Il existe un unique polynôme unitaire de plus petit degré dans $\mathrm{Ann}(f)$, on le note π_f et on vérifie que $\mathrm{Ann}(f) = \pi_f\,\mathbb{K}[X]$ (les multiples de π_f) : ce polynôme est appelé le* **polynôme minimal** *de f).*

- *Si F est un sous-espace de E stable par f et que π_f existe, alors π_{f_F} existe aussi et $\pi_{f_F} \,\big|\, \pi_f$.*

- *Si π_f existe, la dimension de $\mathbb{K}[f]$ est égale au degré de π_f.*

EXEMPLE 2.53 : Si $p \in \mathcal{L}(E)$, alors p est un projecteur de E si et seulement si $X(X-1)$ est un polynôme annulateur de p. Dans ce cas, si $p \notin \{0, \mathrm{id}_E\}$, son polynôme minimal est $\pi_p = X(X-1)$.

REMARQUE 2.106 : Pour caractériser les automorphismes, soit E de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$:

- *Si $P(f) = 0$ avec $P = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k X^k$ et $a_0 \neq 0$ alors $f^{-1} = -\sum\limits_{k=1}^{d} \frac{a_k}{a_0} f^{k-1}$.*

- $f \in GL(E) \Longleftrightarrow \big(\exists P \in \mathrm{Ann}(f),\ P(0) \neq 0\big)$ *(ce qui équivaut aussi à $\pi_f(0) \neq 0$).*

ORAL BLANC 2.54 : Centrale PSI 2013

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. On considère un endomorphisme u de E.

Montrer que : (i) $u \in \mathrm{Vect}(\{u^k \mid k \geqslant 2\}) \Longleftrightarrow E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$ (ii).

REMARQUE FONDAMENTALE 2.107 : Si $P = \prod\limits_{k=1}^{r} (X - a_k)^{m_k}$ est un polynôme annulateur unitaire scindé de degré n d'un endomorphisme f d'un espace E (le mieux est d'avoir P de bas degré donc P minimal est optimal), cela nous permet de calculer efficacement les puissances de f. Effectuons la division euclidienne de X^p par P qu'on écrit $X^p = Q_p P + R_p$ (E_p) avec $\deg(R_p) \leqslant n-1$. Traitons deux cas :

- *Si P est scindé à racines simples, c'est-à-dire si $\forall k \in [\![1;r]\!]$, $m_k = 1$ qui équivaut à $r = n$, alors $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $R_p(a_k) = a_k^p$ et R_p est donc un polynôme d'interpolation de* Lagrange.

- *Si P admet des racines multiples, on évalue, pour chaque $k \in [\![1;r]\!]$, la relation (E_p) ainsi que ses dérivées jusqu'à la dérivée d'ordre $m_r - 1$ et cela nous donne un système de $\sum\limits_{k=1}^{r} m_k = n$ équations avec n inconnues (les coefficients de R_p) ce qui nous permet de déterminer R_p.*

On évalue ensuite (E_p) en f et on a $f^p = R_p(f)$ car $(Q_p P)(f) = Q_p(f) \circ P(f) = 0$.

EXERCICE CONCOURS 2.55 : Trouver les puissances de l'endomorphisme f canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Indication : on pourra la décomposer par blocs.

2.6.3 : Polynômes de matrices

DÉFINITION 2.46 :
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *Pour* $k \in \mathbb{N}$, *on pose* $A^k = I_n$ *si* $k = 0$ *et* $A^k = A \times A^{k-1}$ *si* $k \geqslant 1$.
Si $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, *on définit* $P(A) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *par* $P(A) = \sum_{k=0}^{d} a_k A^k = a_d A^d + \cdots + a_1 A + a_0 I_n$.

REMARQUE 2.108 : • Attention : $P(A)$ *n'a de sens que si* A *est une matrice carrée.*
• *Attention : ne pas oublier de remplacer* 1 *par* I_n : $A + 1$ *n'a aucun sens si* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

PROPOSITION OPÉRATOIRE SUR LES POLYNÔMES DE MATRICES 2.90 :
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\varphi_A : \mathbb{K}[X] \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ **définie par** $\varphi_A(P) = P(A)$ **est un morphisme d'algèbres, ce qui se traduit par, pour** $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ **et** $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ **:**
$$(\alpha P + \beta Q)(A) = \alpha P(A) + \beta Q(A), \qquad (P \times Q)(A) = P(A) \times Q(A) \qquad \text{et} \qquad \varphi_A(1) = I_n.$$

REMARQUE 2.109 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ *et* $P \in \mathbb{K}[X]$, *alors* $P\big(Q^{-1}AQ\big) = Q^{-1}P(A)Q$.

PROPOSITION 2.91 :
Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, **notons** $\mathrm{Im}(\varphi_A) = \mathbb{K}[A]$ **(l'ensemble des polynômes en** A**), alors** $\mathbb{K}[A]$ **est une sous-algèbre commutative de** $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$**. En particulier** $\forall (P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$, $P(A)Q(A) = Q(A)P(A)$**.**

REMARQUE 2.110 : Si $\mathcal{C}(A) = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid AB = BA\}$ *est l'ensemble des matrices qui commutent avec* A *(appelé le* **commutant de** A*) :* $\mathcal{C}(A)$ *est une sous-algèbre de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *qui contient* $\mathbb{K}[A]$.

EXERCICE CONCOURS 2.56 : CCP PSI 2014 Gabriel D. et Aymeline
Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(A) = AB$ et $P(0) = 1$.
Montrer que A est inversible. En déduire que A et B commutent.

DÉFINITION 2.47 :
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $P \in \mathbb{K}[X]$. *On dit que* P *est* **un polynôme annulateur de** A *si* $P(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.
On note $\mathrm{Ann}(A)$ *l'ensemble des polynômes annulateurs de* A *:* $\mathrm{Ann}(A) = \big\{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}\big\}$.

REMARQUE 2.111 : • On a : $\mathrm{Ann}(A) = \mathrm{Ker}(\varphi_A)$. *De plus* $\mathrm{Ann}\big(Q^{-1}AQ\big) = \mathrm{Ann}(A)$ *si* $Q \in GL_n(\mathbb{K})$.
• *Si* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *alors* $\mathrm{Ann}(A)$ *est un idéal de* $\mathbb{K}[X]$ *appelé* **idéal annulateur de** A, *il existe un unique polynôme unitaire* π_A, *appelé* **le polynôme minimal de** A, *tel que* $\mathrm{Ann}(A) = \pi_A\,\mathbb{K}[X]$.

EXEMPLE 2.57 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, en introduisant $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, déterminer le polynôme minimal de A en cherchant un polynôme annulateur de degré 3. En déduire les puissances de A.

REMARQUE 2.112 : • Alors, π_A *est l'unique polynôme unitaire tel que* $P(A) = 0 \iff \pi_A$ *divise* P.
• *La dimension de* $\mathbb{K}[A]$ *est égale au degré de* π_A.
• *Si* E *de dimension* n, *de base* $\mathcal{B}$, $f \in \mathcal{L}(E)$ *et* $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, *on a* $\forall P \in \mathbb{K}[X]$, $P(A) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\big(P(f)\big)$.
Avec $\varphi : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *telle que* $\varphi(g) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$ *:* $\varphi\big(\mathbb{K}[f]\big) = \mathbb{K}[A]$, $\varphi\big(\mathcal{C}(f)\big) = \mathcal{C}(A)$ *et* $\pi_f = \pi_A$.
• *Même si hors programme : si* A *est de rang* r, *il existe un polynôme annulateur de degré* $r + 1$.

COMPÉTENCES

- montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel :
  - en le voyant comme sous-espace vectoriel d'un espace classique.
  - en revenant aux axiomes en désespoir de cause.
- prouver qu'une partie d'un espace vectoriel en est un sous-espace vectoriel :
  - en le reconnaissant comme un sous-espace engendré par une famille de vecteurs.
  - en montrant qu'il est l'intersection ou la somme de sous-espaces connus.
  - en le voyant comme noyau ou image d'une application linéaire.
- établir que la somme de plusieurs sous-espaces est en somme directe ou qu'ils sont supplémentaires.
- montrer qu'une application est linéaire par la définition ou par somme/composée de linéaires.
- étudier l'injectivité ou la surjectivité d'une application linéaire avec son noyau et son image.
- se rappeler des :
  - inclusions entre noyaux ou images d'une somme ou d'une composée d'applications linéaires.
  - la caractérisation de $f \circ g = 0$ par l'inclusion $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
  - les inclusions entre les noyaux et images des itérés f^n d'un endomorphisme.
- utiliser la commutation entre endomorphismes pour montrer la stabilité des noyaux et images.
- utiliser le théorème du rang pour construire des isomorphismes.
- caractériser géométriquement un projecteur p en donnant $\mathrm{Ker}(\mathrm{id}_E - p)$ et $\mathrm{Ker}(p)$.
- caractériser géométriquement une symétrie s en donnant $\mathrm{Ker}(\mathrm{id}_E - s)$ et $\mathrm{Ker}(\mathrm{id}_E + s)$.
- définir une application linéaire par ses restrictions à des sous-espaces supplémentaires.
- être à l'aise avec les notions de familles (même infinies) libres ou génératrices, de bases.
- retenir les implications sur la manière qu'ont les applications linéaires de transformer les familles.
- définir une application linéaire par son action sur une base de l'espace de départ.
- montrer qu'un espace est de dimension finie et calculer sa dimension :
  - en exhibant une base de cet espace ou un espace plus simple isomorphe à celui-ci.
  - en le voyant comme un espace produit.
- exploiter les théorèmes de la base extraite ou incomplète pour trouver des bases en dimension finie.
- déterminer ou encadrer la dimension d'un sous-espace :
  - en trouvant une base ou un supplémentaire de celui-ci.
  - en utilisant la formule de GRASSMANN.
- montrer que plusieurs sous-espaces sont en somme directe ou supplémentaires.
- déterminer le rang d'une famille de vecteurs.
- prouver l'injectivité ou la surjectivité d'une application linéaire par son rang.
- utiliser la formule du rang pour relier les dimensions du noyau et de l'image.
- voir les hyperplans comme les noyaux des formes linéaires non nulles.
- maîtriser les opérations sur les polynômes d'endomorphismes.
- se servir des polynômes annulateurs d'un endomorphisme pour le connaître géométriquement.
- calculer sans erreurs sur les matrices : somme et produit et matrices élémentaires.
- utiliser des algorithmes de GAUSS pour calculer l'inverse et le rang d'une matrice carrée.
- représenter les applications linéaires par des matrices une fois fixées des bases.
- faire le lien entre les propriétés des applications linéaires et celles des matrices.
- changer de bases sans se tromper avec les matrices de passage
- reconnaître des produits par blocs pour simplifier les calculs.
- établir la stabilité de sous-espaces en lien avec les matrices par blocs des endomorphismes.
- utiliser les polynômes de matrices en relation avec ceux des endomorphismes associés.
- maîtriser les techniques de calcul des déterminants :
  - opérations de GAUSS en se ramenant à du VANDERMONDE ou matrices triangulaires.
  - développement par rapport aux lignes ou aux colonnes.
  - multilinéarité du déterminant ou calcul par blocs.
- utiliser le déterminant pour trouver des bases, des isomorphismes, des matrices inversibles.
- résoudre un système linéaire par pivot de GAUSS et connaître la structure des solutions.
- reconnaître un problème qui relève de l'interpolation de LAGRANGE.