TD 02 : INTÉGRALES

PSI 1 2024-2025 **vendredi 13 septembre 2024**

2.1 **a.** Si $x > a$, on a $\forall t \geqslant 0$, $|f(t)e^{-xt}| = |f(t)|e^{-xt} \leqslant Ce^{at}e^{-xt} = Ce^{-(x-a)t}$ et $t \mapsto e^{-(x-a)t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car $x - a > 0$ (fonction de référence). Ainsi, par comparaison, la fonction $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt$ est absolument convergente donc convergente et $F(x)$ existe.

b. Comme $a \leqslant 0$, F est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après **a.**. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - 1) = 0$ ce qui nous incite à écrire, pour $x > 0$, $xF(x) = x\int_0^{+\infty} \big(f(t)-1+1\big)e^{-xt}dt = x\int_0^{+\infty}(f(t)-1)e^{-xt}dt + x\int_0^{+\infty} e^{-xt}dt$ ce qui donne $xF(x) = x\int_0^{+\infty} \big(f(t)-1\big)e^{-xt}dt + x\Big[-\frac{e^{-xt}}{x}\Big]_0^{+\infty} = x\int_0^{+\infty}(f(t)-1)e^{-xt}dt + 1$. Par conséquent, on a l'expression plus compacte $xF(x) - 1 = \int_0^{+\infty} \big(f(t)-1\big)e^{-xt}xdt$.

Revenons à la définition de la limite. Soit $\varepsilon > 0$, il existe donc $m \geqslant 0$ tel que $\forall x \geqslant m$, $|f(x)-1| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. On peut donc écrire avec Chasles $xF(x) - 1 = \int_0^m \big(f(t)-1\big)e^{-xt}xdt + \int_m^{+\infty} \big(f(t)-1\big)e^{-xt}xdt$. Comme f est continue sur le segment $[0;m]$, $f - 1$ est bornée (par M) sur ce segment donc, par inégalités triangulaire sur les réels et sur les intégrales : $|xF(x) - 1| \leqslant Mx\int_0^m e^{-xt}dt + \frac{\varepsilon}{2}\int_m^{+\infty} e^{-xt}xdt \leqslant M(1 - e^{-xm}) + \frac{\varepsilon}{2}\int_0^{+\infty} e^{-xt}xdt$.

Enfin, $\lim\limits_{x\to0^+} M(1 - e^{-xm}) = 0$ donc il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in]0;\alpha]$, $0 \leqslant M(1 - e^{-xm}) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. On en déduit, puisque $\int_0^{+\infty} e^{-xt}xdt = 1$, que si $x \in]0;\alpha]$, on a $|xF(x) - 1| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ ce qui prouve que $\lim\limits_{x\to0^+} xF(x) = 1$.

<u>Autre méthode</u> : On pouvait aussi le faire avec le théorème de convergence dominée à paramètre continu qu'on verra plus tard dans l'année. En effet, en posant $t = \frac{u}{x} = \varphi(u)$ avec φ qui est une bijection strictement croissante de classe C^1 de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, on a $xF(x) = \int_0^{+\infty} f\Big(\frac{u}{x}\Big)e^{-u}du$ pour $x > 0$. Comme f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et admet une limite finie en $+\infty$, il est classique que f est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

(H_1) $\forall u \in \mathbb{R}_+$, $\lim\limits_{x\to0^+} f\Big(\frac{u}{x}\Big)e^{-u} = h(u) = e^{-u}$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

(H_2) $\forall x \in]a;+\infty[$, la fonction $u \mapsto f\Big(\frac{u}{x}\Big)e^{-u}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$, h aussi.

(H_3) $\forall (u,x) \in \mathbb{R}_+\times]a;+\infty[$, $\Big|f\Big(\frac{u}{x}\Big)e^{-u}\Big| \leqslant ||f||_{\infty,\mathbb{R}_+^*}e^{-u} = \psi(u)$ et ψ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Par le théorème évoqué, $\lim\limits_{x\to0^+} xF(x) = \int_0^{+\infty} h(u)du = \int_0^{+\infty} e^{-u}du = 1$.

2.2 La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\text{th}(3x) - \text{th}(2x)}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ par continuité de th. Or, f se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 2$ car $\text{th}(t) \underset{0}{=} t + o(t)$ donc $\text{th}(3x) - \text{th}(2x) \underset{0}{=} 3x - 2x + o(x)$ puis $\text{th}(3x) - \text{th}(2x) \underset{0}{\sim} x$. De plus, $\text{th}(t) = \dfrac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} = \dfrac{1 - e^{-2t}}{1 + e^{-2t}} = 1 - \dfrac{2e^{-2t}}{1 + e^{-2t}}$. Ainsi, $1 - \text{th}(t) = \dfrac{2e^{-2t}}{1 + e^{-2t}} \underset{+\infty}{\sim} 2e^{-2t}$. Par conséquent, $f(x) = \dfrac{1 - \text{th}(2x) - (1 - \text{th}(3x))}{x} \underset{+\infty}{=} \dfrac{2e^{-4x} - 2e^{-6x} + o(e^{-4x}) + o(e^{-6x})}{x} \underset{+\infty}{=} \dfrac{2e^{-4x} + o(e^{-4x})}{x} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2e^{-4x}}{x}$ d'où $f(x) \underset{+\infty}{=} O(e^{-x}) \underset{+\infty}{=} O\Big(\dfrac{1}{x^2}\Big)$ et f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ par Riemann d'où $\int_0^{+\infty} \dfrac{\text{th}(3x) - \text{th}(2x)}{x}dx$ converge. De plus, $\int_0^u \dfrac{\text{th}(3x) - \text{th}(2x)}{x}dx = \int_0^u \dfrac{\text{th}(3x)}{x}dx - \int_0^u \dfrac{\text{th}(2x)}{x}dx$ (les deux convergent). On pose $y = 3x$ dans la première et $y = 2x$ dans la seconde et $\displaystyle\int_0^u \frac{\text{th}\,(3x) - \text{th}\,(2x)}{x}dx = \int_0^{3u} \frac{\text{th}\,(y)}{y}dy - \int_0^{2u} \frac{\text{th}\,y}{y}dy = \int_{2u}^{3u} \frac{\text{th}\,x}{x}dx$. Or $\ln\left(\frac{3}{2}\right)\text{th}\,(2u) = \text{th}\,(2u)\displaystyle\int_{2u}^{3u}\frac{dx}{x} \leqslant \int_{2u}^{3u}\frac{\text{th}\,x}{x}dx \leqslant \text{th}\,(3u)\int_{2u}^{3u}\frac{dx}{x} = \ln\left(\frac{3}{2}\right)\text{th}\,(3u)$ car th est croissante. Par encadrement, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\text{th}\,(3x) - \text{th}\,(2x)}{x}dx = \lim_{u\to+\infty}\int_{2u}^{3u}\frac{\text{th}\,x}{x}dx = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$ car $\displaystyle\lim_{y\to+\infty}\text{th}\,(y) = 1$.

2.3 **a.** La fonction $g : t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+^*$. On a $g(t) \underset{+\infty}{=} o(e^{-t}) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{dt}{t^2}$ converge par critère de RIEMANN donc $\displaystyle\int_x^{+\infty} g(t)dt$ converge pour $x > 0$ par comparaison. Ainsi, f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, $f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} g(t)dt - \int_1^x g(t)dt$ avec CHASLES donc, d'après le théorème fondamental de l'intégration, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x > 0,\ f'(x) = -g(x) = -\dfrac{e^{-x}}{x}$.

b. • Si $x > 0$, par intégration par parties en posant $u(t) = -e^{-t}$ et $v(t) = \dfrac{1}{t}$, comme u et v sont C^1 sur $[x; +\infty[$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$, on obtient $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x} - \displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}dt}{t^2}$. Or $\forall t \geqslant x,\ \dfrac{1}{t^2} \leqslant \dfrac{1}{x^2}$, d'où la majoration $0 \leqslant \displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}dt}{t^2} \leqslant \frac{1}{x^2}\int_x^{+\infty} e^{-t}dt = \frac{e^{-x}}{x^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{e^{-x}}{x}\right)$. Ainsi, $f(x) \underset{+\infty}{=} \dfrac{e^{-x}}{x} + o\left(\dfrac{e^{-x}}{x}\right)$ d'où $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^{-x}}{x}$.

• Si $x > 0$, $f(x) = \displaystyle\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t}dt + \int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt$ et $\displaystyle\int_x^1\frac{e^{-t}}{t}dt = \int_x^1\frac{e^{-t}-1}{t}dt + \int_x^1\frac{1}{t}dt = -\ln(x) + \int_x^1\frac{e^{-t}-1}{t}dt$ par CHASLES et linéarité de l'intégrale. $\displaystyle\int_0^1\frac{e^{-t}-1}{t}dt$ converge puisque $h : t \mapsto \dfrac{e^{-t}-1}{t}$ se prolonge par continuité en 0 en posant $h(0) = -1$ (par développements limités), il vient $\displaystyle\int_x^1\frac{e^{-t}-1}{t}dt \underset{0^+}{=} O(1)$ (et même $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\int_x^1\frac{e^{-t}-1}{t}dt = \int_0^1\frac{e^{-t}-1}{t}dt$) donc $\displaystyle\int_x^1\frac{e^{-t}}{t}dt \underset{0^+}{=} f(x) \underset{0^+}{=} -\ln(x)$.

c. f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car elle y est continue et que $f(x) \underset{0^+}{\sim} -\ln(x) \underset{0^+}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^{-x}}{x} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$. De plus, $u = f$ et $v = \text{id}$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, et $\displaystyle\lim_{x\to0^+} xf(x) = \lim_{x\to+\infty} xf(x) = 0$ par croissances comparées avec la question **b.** car $xf(x) \underset{0}{\sim} -x\ln(x)$ et $xf(x) \underset{+\infty}{\sim} e^{-x}$. Ainsi, par intégration par parties, on a donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx = 0 - \int_0^{+\infty}(-e^{-x})dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = [-e^{-x}]_0^{+\infty} = 1$.

On pouvait prévoir ce résultat en admettant pouvoir inverser les intégrales doubles (théorème de FUBINI),
$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty}\left(\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt\right)dx = \iint_{0<x\leqslant t}\frac{e^{-t}}{t}dtdx = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^t\frac{e^{-t}}{t}dx\right)dt = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1.$$

2.4 **a.** Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $f_x : t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{x^2+t^2}dt$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (et même sur $\mathbb{R}_+$ si $x \neq 0$). De plus, si $x \neq 0$, $f_x(t) \underset{0^+}{\sim} \dfrac{\ln(t)}{x^2} \underset{0^+}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$ par croissances comparées donc f_x est intégrable sur $]0; 1]$ par critère de RIEMANN. Par contre si $x = 0$, $\displaystyle\lim_{t\to0^+} tf_0(t) = \lim_{t\to0^+}\frac{\ln(t)}{t} = -\infty$ donc f_0 n'est pas intégrable sur $]0; 1]$ car $\dfrac{1}{t} \underset{0^+}{=} O(f_0(t))$ et que $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ n'est pas intégrable sur $]0; 1]$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_x(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(t)}{t^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^{3/2}}\right)$ donc f_x est intégrable sur $[1; +\infty[$ par RIEMANN.
Au final, le domaine de définition de F est $\mathcal{D}_F = \mathbb{R}^*$ et F est clairement paire sur $\mathcal{D}_F$.

b. Comme $\varphi : u \mapsto \dfrac{1}{u}$ est une bijection de classe C^1 strictement décroissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, le changement de variable $t = \varphi(u) = \dfrac{1}{u}$ montre que $F(1) = \displaystyle\int_{+\infty}^0 \frac{\ln(1/u)}{1+(1/u)^2}\left(-\frac{1}{u^2}\right)du = -F(1)$ donc $F(1) = 0$.

c. Soit $x > 0$, en posant $t = xu$ (facile à justifier), $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{x^2+t^2}dt = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(xu)}{x^2+x^2u^2}xdu$. Or $\ln(xu) = \ln(x) + \ln(u)$ donc $F(x) = \frac{\ln(x)}{x}\int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} + \frac{1}{x}F(1) = \frac{\ln(x)}{x}[\text{Arctan}(u)]_0^{+\infty} = \frac{\pi\ln(x)}{2x}$.

Comme F est paire, au final, on obtient $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ F(x) = F(|x|) = \frac{\pi\ln|x|}{2|x|}$.

2.5 Méthode 1 : Comme f' est bornée sur $\mathbb{R}_+$, on a $ff' \underset{+\infty}{=} O(f)$ donc, comme f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et que ff' est continue sur $\mathbb{R}_+$, la fonction ff' est aussi intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par comparaison. Ainsi, $\int_0^{+\infty} f(t)f'(t)dt$ converge ce qui garantit l'existence d'une limite finie de $\int_0^x f(t)f'(t)dt$ quand x tend vers $+\infty$. On peut donc poser $\ell = \lim\limits_{x\to+\infty} f^2(x) \geqslant 0$ car $\int_0^x f(t)f'(t)dt = \left[\frac{f^2(t)}{2}\right]_0^x = \frac{f^2(x)}{2} - \frac{f^2(0)}{2}$. Comme f est positive, $f(x) = \sqrt{f^2(x)}$ donc, par continuité de la fonction racine, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \sqrt{\ell}$. Mais comme f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, on sait d'après le cours que ceci impose $\sqrt{\ell} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ comme attendu.

Méthode 2 : (méthode proposée par l'examinateur ???) supposons que f ne tende pas vers 0 en $+\infty$. En niant $\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \geqslant a,\ 0 \leqslant f(x) \leqslant \varepsilon$, il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que pour tout réel $a \geqslant 0$, il existe $x > a$ tel que $f(x) > \varepsilon$. On crée une suite de points $(x_n)_{n\geqslant 0}$ de la manière suivante :

- avec $a = \frac{1}{2}$, il existe $x_0 > \frac{1}{2}$ tel que $f(x_0) > \varepsilon$.
- soit $n \in \mathbb{N}$ tel que les réels positifs $x_0, \cdots, x_n$ soient définis, alors on prend $a = 1 + x_n \geqslant 0$ et il existe $x_{n+1} > 1 + x_n$ tel que $f(x_{n+1}) > \varepsilon$.

Par construction, on a défini une suite strictement croissante $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} - x_n > 1$ et $f(x_n) > \varepsilon$. Par une récurrence simple, on montre que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n > n$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

Par hypothèse, il existe $M > 0$ tel que $\forall x \geqslant 0,\ |f'(x)| \leqslant M$. D'après le théorème des accroissements finis, $|f(x) - f(x_n)| \leqslant M|x - x_n|$ donc $f(x) = f(x) - f(x_n) + f(x_n) > \varepsilon - M|x - x_n|$ donc $f(x) > \frac{\varepsilon}{2}$ dès que $|x - x_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2M}$. Posons $\alpha = \text{Min}\left(\frac{\varepsilon}{2M}, \frac{1}{2}\right) > 0$, on a donc $\forall x \in [x_n - \alpha; x_n + \alpha],\ f(x) > \frac{\varepsilon}{2}$. Par construction, les segments $[x_n - \alpha; x_n + \alpha]$ ne se chevauchent pas car $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$. On en déduit, puisque f est positive, que $\forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^{x_n+\alpha} f(t)dt \geqslant \sum\limits_{k=0}^{n} \left(\int_{x_k-\alpha}^{x_k+\alpha} f(t)dt\right) \geqslant (n+1)(2\alpha)(\varepsilon/2) = (n+1)\alpha\varepsilon$ (I). Or la fonction $x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ est croissante et elle tend vers $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ par hypothèse ce qui est contredit par l'inégalité (I) qui prouve que $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^{x_n+\alpha} f(t)dt = +\infty$.

On a donc prouvé par l'absurde que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

2.6 **a.** Les fonctions $f_a : t \mapsto \exp\left(-t^2 - \frac{a^2}{t^2}\right)$ et $g_a : t \mapsto \frac{a}{t^2}\exp\left(-t^2 - \frac{a^2}{t^2}\right)$ sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$ et prolongeables par continuité en 0 en posant $f_a(0) = g_a(0) = 0$ car $\exp\left(-t^2 - \frac{a^2}{t^2}\right) \underset{0}{\sim} \exp\left(-\frac{a^2}{t^2}\right)$ et $\lim\limits_{t\to0^+} \frac{a^2}{t^2} = +\infty$ et que $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = \lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x} = 0$. De plus, $\exp\left(-t^2 - \frac{a^2}{t^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} e^{-t^2}$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2e^{-t^2} = \lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t^2} = 0$ donc $f_a(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $g_a(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Ceci assure, par comparaison aux intégrales de RIEMANN, que f_a et g_a sont intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$ donc que $I(a)$ et $J(a)$ existent pour tout $a > 0$.

b. Dans $I(a)$, on pose $t = \frac{a}{u} = \varphi(u)$ avec φ de classe C^1 et bijective strictement décroissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$. Par changement de variable, $I(a) = \int_{+\infty}^0 \exp\Big(-\frac{a^2}{u^2}-u^2\Big)\Big(-\frac{a}{u^2}\Big)du = \int_0^{+\infty} \frac{a}{u^2}\exp\Big(-u^2-\frac{a^2}{u^2}\Big)du = J(a)$.

c. D'après **b.**, $I(a) = \frac{I(a)+J(a)}{2} = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\left(\exp\Big(-t^2-\frac{a^2}{t^2}\Big)+\frac{a}{t^2}\exp\Big(-t^2-\frac{a^2}{t^2}\Big)\right)dt$ par linéarité de l'intégrale donc $I(a) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\Big(1+\frac{a}{t^2}\Big)\exp\Big(-t^2-\frac{a^2}{t^2}\Big)dt$. Or $-t^2-\frac{a^2}{t^2} = \Big(t-\frac{a}{t}\Big)^2 - 2a$ d'où $\exp\Big(-t^2-\frac{a^2}{t^2}\Big) = e^{-2a}\exp\Big(-\Big(t-\frac{a}{t}\Big)^2\Big)$ (mise sous forme canonique). Toujours par linéarité de l'intégrale, on obtient bien la relation $I(a) = \frac{e^{-2a}}{2}\int_0^{+\infty}\Big(1+\frac{a}{t^2}\Big)\exp\Big(-\Big(t-\frac{a}{t}\Big)^2\Big)dt$.

d. Dans l'intégrale de la question précédente, on pose $x = t-\frac{a}{t} = \varphi(t)$ avec φ qui est une bijection strictement croissante (car $\varphi'(t) = 1+\frac{a}{t^2} > 0$) de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ car $\lim_{t\to-\infty}\varphi(t) = -\infty$ car $a > 0$ et $\lim_{t\to+\infty}\varphi(t) = +\infty$. Ainsi, $I(a) = \frac{e^{-2a}}{2}\int_0^{+\infty} e^{-\varphi(t)^2}\varphi'(t)dt = \frac{e^{-2a}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ par parité de la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$. Par conséquent, $I(a) = e^{-2a}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2a}$ avec le rappel de l'énoncé concernant l'intégrale de GAUSS.

2.7 **a.** Pour $x \in]-1;+\infty[$, soit $f_x :]0;1[\to \mathbb{R}$ définie par $f_x(t) = \frac{t^x \ln(t)}{t-1}$. La fonction f_x est continue sur $]0;1[$ par opérations. Comme $\ln(t) \underset{1}{\sim} t-1$ en posant $u = t-1$ dans $\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$, on a $f_x(t) \underset{1}{\sim} t^x \underset{1}{\sim} 1$ donc f_x se prolonge par continuité en 1 en posant $f_x(1) = 1$. De plus, $f_x(t) \underset{0}{\sim} t^x\ln(t) \underset{0}{=} o\Big(\frac{1}{t^{\frac{1-x}{2}}}\Big)$ par croissances comparées car $\frac{1+x}{2} < 0$ donc, comme $\frac{1-x}{2} < 1$, par comparaison aux intégrales de RIEMANN, f_x est intégrable sur $]0;1[$ ce qui montre la convergence de $\int_0^1 f_x(t)dt$.

b. Soit $-1 < x < y$, $\forall t \in]0;1[$, $t^x = e^{x\ln(t)} \geqslant e^{y\ln(t)} = t^y \geqslant 0$ car $\ln(t) < 0$ donc, $t^x\ln(t) \leqslant t^y\ln(t) \leqslant 0$ et, puisque $t-1 < 0$, $f_x(t) \geqslant f_y(t) \geqslant 0$. Par croissance de l'intégrale, $H(x) = \int_0^1 f_x(t)dt \geqslant \int_0^1 f_x(t)dt = H(y) \geqslant 0$ ce qui montre que H est positive et décroissante sur $]-1;+\infty[$.

c. La fonction $a : t \mapsto \frac{t\ln(t)}{t-1}$ est continue sur $]0;1[$, se prolonge par continuité en 1 en posant $a(1) = 1$ car $\ln(t) \underset{1}{\sim} t-1$ comme ci-dessus et, par croissances comparées, elle se prolonge aussi par continuité en 0 en posant $a(0) = 0$. La fonction positive a ainsi prolongée est continue sur le segment $[0;1]$ donc elle y est bornée par le théorème des bornes atteintes et il existe $M \geqslant 0$ tel que $\forall t \in]0;1[$, $0 \leqslant a(t) \leqslant M$. Alors, pour $x > 0$, on a $0 \leqslant H(x) = \int_0^1 t^{x-1}a(t)dt \leqslant M\int_0^1 t^{x-1}dt = M\Big[\frac{t^x}{x}\Big]_0^1 = \frac{M}{x}$ car $\lim_{t\to0} t^x = 0$. Comme $\lim_{x\to+\infty}\frac{M}{x} = 0$, par encadrement, on a $\lim_{x\to+\infty} H(x) = 0$.
On pouvait aussi utiliser le théorème de convergence dominée à paramètre continu.

d. Pour $x > -1$, avec l'indication, $H(x) - H(x+1) = \int_0^1 \frac{(t^x - t^{x+1})\ln(t)dt}{t-1} = -\int_0^1 t^x\ln(t)dt$ et, en posant $u : t \mapsto \ln(t)$ et $v : t \mapsto \frac{t^{x+1}}{x+1}$ qui sont C^1 sur $]0;1[$ et qui vérifient $\lim_{t\to0^+} u(t)v(t) = \lim_{t\to1^-} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées, on a $-\int_0^1 t^x\ln(t)dt = \int_0^1 \frac{t^x}{x+1}dt = \Big[\frac{t^{x+1}}{(x+1)^2}\Big]_0^1 = \frac{1}{(x+1)^2}$ (1) par intégration par parties. Comme H est décroissante sur $]-1;+\infty[$, on a $\forall x \in]-1;0[$, $H(0) \leqslant H(x+1) \leqslant H(1)$ donc

$H(x+1) \underset{-1^+}{=} O(1)$ et (1) montre que $H(x) \underset{-1^+}{\sim} \dfrac{1}{(x+1)^2}$ car $O(1) \underset{-1^+}{=} o\Big(\dfrac{1}{(x+1)^2}\Big)$.

e. Comme $\lim\limits_{m\to+\infty} H(m) = 0$ d'après **c.**, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ H(n) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \big(H(k-1) - H(k)\big) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^2}$ par dualité suite-série avec la relation de la question **d.**. De plus, comme $g : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $\forall k \geqslant 2,\ \displaystyle\int_k^{k+1} g(x)dx \leqslant \frac{1}{k^2} \leqslant \int_{k-1}^{k} g(x)dx$. Pour $n \geqslant 1$, en sommant pour $k \geqslant n+1$, puisque g est intégrable sur $[1;+\infty[$ par RIEMANN, $\displaystyle\int_n^{+\infty} g(x)dx = \Big[-\frac{1}{x}\Big]_n^{+\infty} \leqslant H(n) \leqslant \Big[-\frac{1}{x}\Big]_{n-1}^{+\infty} = \int_{n-1}^{+\infty} g(x)dx$ par CHASLES donc $\dfrac{1}{n} \leqslant H(n) \leqslant \dfrac{1}{n-1}$ (1). Pour $x \geqslant 1$, H étant décroissante sur $[1;+\infty[$ d'après **b.**, $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1 \Longrightarrow H(\lfloor x \rfloor + 1) \leqslant H(x) \leqslant H(\lfloor x \rfloor)$ donc $\dfrac{1}{\lfloor x \rfloor + 1} \leqslant H(x) \leqslant \dfrac{1}{\lfloor x \rfloor - 1}$ avec (1) donc $\dfrac{1}{x+1} \leqslant H(x) \leqslant \dfrac{1}{x-2}$. Comme $\dfrac{1}{x+1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x-2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$, par encadrement, on trouve $H(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

De la même manière, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $H(0) - H(n) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \big(H(k) - H(k+1)\big) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{(k+1)^2} = \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{1}{j^2}$ donc, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} H(n) = 0$, on a $H(0) = \sum\limits_{j=1}^{+\infty} \dfrac{1}{j^2} = \zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$.

2.8 **a.** La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$ car $\sin(t) \underset{0}{\sim} t$. La convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ équivaut donc à celle de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$. Dans cette dernière intégrale, on pose $u : t \mapsto -\cos(t)$ et $v : t \mapsto \dfrac{1}{t}$ de sorte que u et v sont de classe C^1 sur $[1;+\infty[$ et que $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$ ce qui, par intégration par parties, montre que la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ équivaut à celle de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}dt$. Soit $g : [1;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $g(t) = \dfrac{\cos(t)}{t^2}$, alors g est continue sur $[1;+\infty[$ et $g(t) \underset{+\infty}{=} O\Big(\dfrac{1}{t^2}\Big)$ donc, par comparaison aux intégrales de RIEMANN, g est intégrable sur $[1;+\infty[$ donc, a fortiori, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}dt$ converge. Ainsi, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ converge.

b. Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, comme $|\sin(t)| \geqslant \sin^2(t) = \dfrac{1-\cos(2t)}{2}$, on a $|f(t)| \geqslant \dfrac{1}{2t} - \dfrac{\cos(2t)}{2t}$. Comme en **a.**, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{2t}dt$ converge en réalisant une intégration par parties. Par contre, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{2t}$ diverge par critère de RIEMANN. Par somme, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)dt}{t}$ diverge donc la fonction positive $g : t \mapsto \dfrac{\sin^2(t)}{t}$ n'est pas intégrable sur $[1;+\infty[$. Comme $\forall t > 0,\ |f(t)| \geqslant \dfrac{\sin^2(t)}{t} = g(t)$, par comparaison, f n'est pas non plus intégrable sur $[1;+\infty[$, donc a fortiori pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. Posons $u :\mapsto 1-\cos(t)$ et $v : t \mapsto \dfrac{1}{t}$ de sorte que u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et, comme $1-\cos(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{t^2}{2}$ donc $u(t)v(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{t}{2}$ et $u(t)v(t) \underset{+\infty}{=} O\Big(\dfrac{1}{t}\Big)$, on a $\lim\limits_{t\to0^+} u(t)v(t) = 0 = \lim\limits_{t\to+\infty} u(t)v(t)$. Ainsi, par intégration par parties, on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt = 0 - \int_0^{+\infty} (1-\cos(t))\Big(-\frac{1}{t^2}\Big)dt = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}dt = \int_0^{+\infty} \frac{2\sin^2(t/2)}{t^2}dt$. On pose maintenant $t = 2u = \varphi(u)$ avec φ qui est une bijection C^1 strictement croissante et $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et on a, par changement de variable, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt = \int_0^{+\infty} \frac{2\sin^2((2u)/2)}{4u^2}(2du) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(u)}{u^2}du$.

2.9 **a.** Puisque f est une fonction positive, on peut définir $g = \sqrt{f} = f^{1/2}$ et $h = f^2\sqrt{f} = f^{5/2}$. Comme les fonctions $t \mapsto \sqrt{t}$ et $t \mapsto t^2\sqrt{t}$ sont continues sur $\mathbb{R}_+$, par composition, g et h sont continues sur $[0;1]$ car f est continue sur $[0;1]$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz associée au produit scalaire $(a,b) \mapsto \int_0^1 a(t)b(t)dt$ sur l'espace vectoriel $C^0([0;1],\mathbb{R})$, on a $\left|\int_0^1 gh\right| \leqslant \sqrt{\int_0^1 g^2} \times \sqrt{\int_0^1 h^2}$, ce qui donne exactement, en élevant au carré, l'inégalité $\left(\int_0^1 f^3\right)^2 \leqslant \int_0^1 f^5 \times \int_0^1 f$.

Si on a égalité dans cette inégalité de Cauchy-Schwarz, alors les vecteurs g et h sont colinéaires.

- Soit $g = 0$ ou $h = 0$, et dans ce cas $f = 0$.
- Soit g et h sont non nulles, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ (car g et h positives) tel que $h = \lambda g$, ce qui s'écrit $\forall x \in [0;1],\ f(x)^{5/2} = \lambda f(x)^{1/2}$ donc $f(x) = 0$ ou $f(x) = \sqrt{\lambda}$. Comme f n'est pas nulle, sinon g et h le seraient, et que f est continue sur $[0;1]$, on a forcément $\forall x \in [0;1],\ f(x) = \sqrt{\lambda}$ par le théorème des valeurs intermédiaires.

Dans les deux cas, f est constante et positive sur $[0;1]$. Réciproquement, si f est constante et positive (valant α) sur $[0;1]$, alors on a $\left(\int_0^1 f^3\right)^2 = \alpha^6 = \alpha^5 \times \alpha = \int_0^1 f^5 \times \int_0^1 f$.

Il y a égalité dans $\left(\int_0^1 f^3\right)^2 \leqslant \int_0^1 f^5 \times \int_0^1 f$ si et seulement si f est constante et positive sur $[0;1]$.

b. L'hypothèse faite sur f nous incite à utiliser la dérivation. Soit la fonction $g : [0;1] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \left(\int_0^x f\right)^2 - \int_0^x f^3$, alors g existe car f et f^3 sont continues sur $[0;1]$, et g est même dérivable sur l'intervalle $[0;1]$ par le théorème fondamental de l'intégration avec $\forall x \in [0;1],\ g'(x) = 2f(x)\int_0^x f(t)dt - f^3(x)$ d'où $g'(x) = 2f(x)\left(\int_0^x f(t)dt - \frac{f^2(x)}{2}\right)$. Comme f' est positive sur $[0;1]$, la fonction f est croissante sur $[0;1]$ donc positive sur cet intervalle car $f(0) = 0$. De plus, pour $x \in [0;1]$, on a $\forall t \in [0;x],\ 0 \leqslant f'(t) \leqslant 1$ donc $0 \leqslant f(t)f'(t) \leqslant f(t)$ ce qui donne $0 \leqslant \int_0^x f(t)f'(t)dt = \left[\frac{f^2(t)}{2}\right]_0^x = \frac{f(x)^2}{2} \leqslant \int_0^x f(t)dt$ en intégrant et par croissance de l'intégrale. Ainsi, $\forall x \in [0;1],\ g'(x) \geqslant 0$ donc g est croissante sur l'intervalle $[0;1]$. Comme $g(0) = 0$, on a donc $g(1) \geqslant 0$, ce qui s'écrit bien $\int_0^1 f^3 \leqslant \left(\int_0^1 f\right)^2$.

c. S'il y a égalité dans l'inégalité de la question **b.**, on a $g(1) = 0$ donc g est constante sur $[0;1]$ et $\forall x \in [0;1],\ g'(x) = 0 \iff \left(f(x) = 0 \text{ ou } \int_0^x f(t)dt = \frac{f(x)^2}{2}\right)$. Or, pour $x \in]0;1]$, par linéarité de l'intégrale, $\int_0^x f(t)dt - \frac{f(x)^2}{2} = \int_0^x f(t)dt - \int_0^x f(t)f'(t)dt = \int_0^x f(t)(1-f'(t))dt = 0$ et la fonction $t \mapsto f(t)(1-f'(t))$ est continue et positive sur $[0;x]$ donc $\int_0^x f(t)dt = \frac{f(x)^2}{2} \iff \big(\forall t \in [0;x],\ (f(t) = 0 \text{ ou } f'(t) = 1)\big)$.

Ainsi, s'il y a égalité dans l'inégalité de **b.**, $f = 0$ ou $\big(\forall t \in [0;x],\ (f(t) = 0 \text{ ou } f'(t) = 1)\big)$. Supposons que $\big(\forall t \in [0;x],\ (f(t) = 0 \text{ ou } f'(t) = 1)\big)$, posons alors $m = \mathrm{Sup}(\{t \in [0;1] \mid f(t) = 0\})$, qui existe car $A = \{t \in [0;1] \mid f(t) = 0\}$ contient 0, est inclus dans $\mathbb{R}$ et est minoré par 0. Considérons trois cas :

- Si $m = 0$, alors $\forall t > 0,\ f(t) \neq 0$ donc $f'(t) = 1$ et, par continuité de la fonction f' sur $[0;1]$, on a $\forall x \in [0;1],\ f'(x) = 1$. Comme $[0;1]$ est un intervalle et $f(0) = 0$, on a donc $\forall x \in [0;1],\ f(x) = x$.
- Si $m \in]0;1[$, il existe une suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \to +\infty} t_n = m$ par caractérisation séquentielle

de la borne supérieure. Par continuité de f, on a donc $f(m) = \lim_{n\to+\infty} f(t_n) = 0$ donc $m \in A$. Comme f est croissante sur $[0;1]$, on a $\forall x \in [0;m],\ f(x) = 0$. Pour $t \in]m;1]$, $t \notin A$ donc $f(t) \neq 0$ donc $f'(t) = 1$ et, par continuité de f' en m, on a donc $f'(m) = 1$, ce qui contredit le fait que f est constante (et nulle) sur $[0;m]$. Ce cas ne se peut !

- Si $m = 1$, comme ci-dessus, on a $\forall x \in [0;m],\ f(x) = 0$ donc f est nulle sur $[0;1]$.

Ainsi, l'égalité dans **b.** implique que $f = 0$ ou que $\forall x \in [0;1],\ f(x) = x$.

Réciproquement, si f est nulle sur $[0;1]$, on a bien $\int_0^1 f^3 = 0 = \left(\int_0^1 f\right)^2$ et si $f : x \mapsto x$, on a bien l'égalité $\int_0^1 f^3 = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1\right)^2 = \left(\int_0^1 f\right)^2$.

Par conséquent, il y a égalité dans **b.** pour une fonction $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f(0) = 0$ et $\forall x \in [0;1],\ f'(x) \in [0;1]$ si et seulement si f est nulle sur $[0;1]$ ou si $f : x \mapsto x$.

2.10 **a.** Les fonctions $u : t \mapsto \lambda t + \cos(t)$ et $v : t \mapsto \frac{1}{t}$ sont de classe C^1 sur $[1;+\infty[$ et $\lim_{t\to+\infty} u(t)v(t) = \lambda$ donc, par intégration par parties, la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{\lambda - \sin(t)}{t} dt$ équivaut à celle de $\int_1^{+\infty} \frac{\lambda t + \cos(t)}{t^2} dt$. Or $t \mapsto \frac{\cos(t)}{t^2}$ est continue sur $[1;+\infty[$ et $\frac{\cos(t)}{t^2} \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} dt$ est absolument convergente par comparaison et, même si $t \mapsto \frac{\lambda t}{t^2} = \frac{\lambda}{t}$ est continue sur $[1;+\infty[$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\lambda}{t} dt$ ne converge que si $\lambda = 0$ d'après RIEMANN. Ainsi, par somme, $\int_1^{+\infty} \frac{\lambda - \sin(t)}{t} dt$ converge si et seulement si $\lambda = 0$.

b. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, on peut définir $F : x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ la primitive de f qui s'annule en 0. De plus, f est continue sur le segment $[0;T]$ donc elle y est bornée, et étant T-périodique, elle est bornée sur $\mathbb{R}$.

<u>Méthode 1</u> : notons $M = ||f||_{\infty,\mathbb{R}}$. Soit $x \geqslant 0$ et l'entier n_x tel que $n_x T$ soit le plus grand multiple de T inférieur à x, ce qui se traduit par $n_x T \leqslant t < (n_x + 1)T \iff n_x \leqslant \frac{x}{T} < n_x + 1$ donc $n_x = \left\lfloor \frac{x}{T} \right\rfloor$.

Par CHASLES, $F(x) = \int_0^x f(t)dt = \sum_{k=0}^{n_x - 1} \int_{kT}^{(k+1)T} f(t)dt + \int_{n_x T}^x f(t)dt$. Posons $I = \int_0^T f(t)dt$, ce qui donne $F(x) = n_x I + \int_{nT}^x f(t)dt$. Par inégalité triangulaire, on a $\left|\int_{n_x T}^x f(t)dt\right| \leqslant \int_{n_x T}^x M dt = M(x - n_x T) \leqslant MT$ et on a donc $F(x) \underset{+\infty}{=} n_x I + O(1)$. L'inégalité $n_x T \leqslant x < (n_x + 1)T$ montre que $x - n_x T \underset{+\infty}{=} O(1)$ donc $n_x \underset{+\infty}{=} \frac{x}{T} + O(1)$.

Posons $m = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt = \frac{I}{T}$ qui représente la valeur moyenne de f sur une période, de sorte que ce qui précède s'énonce $F(x) \underset{+\infty}{=} \frac{I}{T}x + O(1) \underset{+\infty}{=} mx + O(1)$.

<u>Méthode 2</u> : posons $m = \frac{1}{T}\int_0^T f(u)du = \frac{F(T)}{T}$, $g : x \mapsto F(x) - mx$ et $h : x \mapsto g(x+T) - g(x)$. Comme F est dérivable par le théorème fondamental de l'intégration, g et h le sont aussi et on a $h'(x) = g'(x+T) - g'(x)$ donc $h'(x) = F'(x+T) - m - F'(x) + m = f(x+T) - f(x) = 0$ par hypothèse. Comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, h est constante et $h(0) = g(T) - g(0) = F(T) - F(T) = 0$ donc h est nulle sur $\mathbb{R}$. g est donc T-périodique et, comme avant puisque g est continue, elle est bornée sur $\mathbb{R}$ donc $F(x) \underset{+\infty}{=} mx + O(1)$.

<u>Concluons</u> : les fonctions $u : t \mapsto \lambda t - F(t)$ et $v : t \mapsto \frac{1}{t}$ sont C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et $\lim_{t\to+\infty} u(t)v(t) = \lambda - m$ car

$u(t)v(t) \underset{+\infty}{=} \dfrac{\lambda t - (mt + O(1))}{t}$. Par intégration par parties, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\lambda - f(t)}{t}dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\lambda t - F(t)}{t^2}dt$ ont même nature. Comme $\dfrac{\lambda t - F(t)}{t^2} = \dfrac{\lambda t - mt - (F(t) - mt)}{t^2} = \dfrac{(\lambda - m)}{t} + \dfrac{F(t) - mt}{t^2}$ et $\dfrac{F(t) - mt}{t^2} \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ d'après ce qui précède, comme à la question **a.**, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\lambda - f(t)}{t}dt$ converge si et seulement si $\lambda = m$.

2.11 **a.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : x \mapsto x^n e^{\omega x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $|f_n(x)| = x^n e^{-x/2} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ par croissances comparées donc f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)dx$ existe. Pour tout entier $n \geqslant 1$, les fonctions $u : x \mapsto x^n$ et $v : x \mapsto \dfrac{e^{\omega x}}{\omega}$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$, $u(0)v(0) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} u(x)v(x) = 0$ par croissances comparées donc, par intégration par parties, $I_n = -\dfrac{n}{\omega}\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{n-1}e^{\omega x}dx = -\dfrac{n}{\omega}I_{n-1}$. Par une récurrence simple, on en déduit que $I_n = n!(-j)^{n+1}$ car $\omega = j^2$ donc $\dfrac{1}{\omega} = j$.
Ainsi, pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathrm{Im}(I_{3k-1}) = 0 = \mathrm{Im}\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{3k-1}e^{\omega x}dx\right) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{3k-1}e^{-x/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)dx$.
Dans $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{3k-1}e^{-x/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)dx = 0$ (vue sur $\mathbb{R}_+^*$), on pose $x = \varphi(t) = t^{1/3}$ avec φ qui est une bijection strictement croissante de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et $\dfrac{1}{3}\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{k-(1/3)}e^{-t^{1/3}/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t^{1/3}\right)t^{-2/3}dt = 0$ donc, en posant, $n = k-1$, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^{1/3}/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t^{1/3}\right)t^n dt = 0$. En définissant $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ par $g(t) = e^{\frac{-\sqrt[3]{t}}{2}}\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}\,\sqrt[3]{t}}{2}\right)$, la fonction g est continue et non nulle sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)t^n = 0$.
b. L'énoncé nous incite à admettre le théorème de STONE-WEIERSTRASS, il s'agit de l'approximation uniforme de toute fonction continue sur un segment par des polynômes. Soit donc $\varepsilon > 0$, il existe par ce théorème un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\forall t \in [a;b]$, $|f(t) - P(t)| \leqslant \varepsilon$, c'est-à-dire $||f - P||_{\infty,[a;b]} \leqslant \varepsilon$. Ainsi, en écrivant $P = \displaystyle\sum_{n=0}^{d} a_n X^n$, on a $\displaystyle\int_a^b (f-P)\overline{f} = \int_a^b |f|^2 - \int_a^b \overline{f}P$ or, par linéarité de l'intégrale, $\displaystyle\int_a^b \overline{f}P = \sum_{n=0}^{d}\int_a^b \overline{f(t)}t^n dt = \overline{\sum_{n=0}^{d}\int_a^b f(t)t^n dt} = 0$ donc $\displaystyle\int_a^b (f-P)\overline{f} = \int_a^b |f|^2$. Or, par inégalité triangulaire, $\left|\displaystyle\int_a^b (f-P)\overline{f}\right| \leqslant \displaystyle\int_a^b |f-P|\,|f| \leqslant ||f-P||_{\infty,[a;b]}\int_a^b |f| \leqslant \varepsilon(b-a)||f||_{\infty,[a;b]}$ car f est bornée sur $[a;b]$ puisque continue sur le segment $[a;b]$. En faisant tendre ε vers 0, il vient $\displaystyle\int_a^b |f|^2 = 0$. Comme $|f|^2$ est positive et continue sur $[a;b]$ non réduit à un point, $|f|^2$ est nulle sur $[a;b]$, donc f est nulle sur $[a;b]$ comme attendu.
<u>Question subsidiaire</u> : on pose $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$, alors F est C^1 et croissante car $F' = f \geqslant 0$ sur l'intervalle $[a;b]$ et $F(a) = F(b)$ donc F est constante sur $[a;b]$ ce qui prouve que $F' = f = 0$.