PROGRAMME DE KHÔLLE SEMAINE 01

PSI 1 2024-2025 **du lundi 16/09 au vendredi 20/09**

$\boxed{1}$ **Intégrales sur un segment** :

- révisions de sup sur l'intégrale sur un segment des fonctions continues, égalité et inégalités classiques ;
- relations entre intégrales et primitives, théorème fondamental de l'intégration ;
- intégration par parties, Taylor reste intégral, changement de variable, sommes de Riemann ;
- définition des fonctions continues par morceaux sur un segment puis sur un intervalle ;
- généralisation de l'intégrale aux fonctions continues par morceaux à valeurs complexes sur un segment ;

$\boxed{2}$ **Comparaison locale des fonctions** :

- notations de Landau, relations entre ces notations ;
- développements limités, intégration, dérivation sous condition, somme, produit, composée, inverse ;
- théorème de Taylor-Young, développements limités classiques ;

$\boxed{3}$ **Intégrales convergentes et divergentes** : $f : I \to \mathbb{K}$ avec I intervalle et f continue par morceaux sur I

- définition de la convergence de $\int_{[a;b[} f$ (resp. $\int_{]a;b]} f$) par l'existence d'une limite finie de $\int_a^x f$ (resp. $\int_x^b f$) quand x tend vers b (resp. vers a) : définition de la valeur de l'intégrale dans ce cas ;
- définition de la convergence de $\int_{]a;b[} f$ par l'existence de $\int_{]a;c]} f$ et de $\int_{[c;b[} f$ pour un certain $c \in]a;b[$: indépendance de cette définition par rapport à c et définition de la valeur de l'intégrale dans ce cas ;
- cas particulier des fonctions positives en bornant une "primitive" ;
- convergence des intégrales de Riemann sur $]0;1]$ ou $[1;+\infty[$, c'est-à-dire de $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ selon les valeurs de α, convergence de $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}dx$ selon les valeurs de λ ;
- Si $f \in C^0(]a;b[, \mathbb{K})$ et $\varphi :]\alpha;\beta[\to]a;b[$ bijection strictement croissante de classe C^1 alors $\int_a^b f(x)dx$ et $\int_\alpha^\beta f\circ\varphi(t)\varphi'(t)dt$ sont de même nature et $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\circ\varphi(t)\varphi'(t)dt$; calcul en pratique ;
- Si $f, g : \widetilde{]a;b[} \to \mathbb{K}$ de classe C^1 et si $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$ et $\lim\limits_{x\to b} f(x)g(x)$ existent et sont finies, $\int_a^b f'(x)g(x)dx$ et $\int_a^b f(x)g'(x)dx$ sont de même nature et $\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$; pratique ;
- techniques pour montrer qu'une intégrale converge ou diverge ;
- techniques pour calculer les intégrales généralisées ;

$\boxed{4}$ **Fonctions intégrables** :

- si $f : I \to \mathbb{C}$ continue par morceaux, on dit que $\int_I f$ converge absolument si $\int_I |f|$ converge ;
- l'absolue convergence d'une intégrale implique sa convergence et inégalité triangulaire associée ;
- on dit que $f : I \to \mathbb{C}$ continue par morceaux est intégrable si $\int_I f$ est absolument convergente ;
- Chasles généralisé, caractérisation avec limite d'une "primitive" de $|f|$ aux bornes de l'intervalle ;
- théorème de comparaison : par $\sim$, O, o, majoration, minoration ;
- exemples d'intégrales convergentes associées à des fonctions non intégrables ;
- exemples de fonctions équivalentes dont les intégrales associées ne sont pas de même nature ;

QUESTIONS DE COURS :

1 définir ce qu'est une fonction continue par morceaux sur un intervalle (déf. 1.3 et 1.4)

2 définir la convergence de $\int_a^b f(t)dt$ si $f :]a; b[\to \mathbb{K}$ est continue par morceaux (déf. 1.10)

3 énoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur les intégrales (prop. 1.2, th. 1.3, prop. 1.34)

4 énoncer la formule de Taylor reste intégral (th. 1.10)

5 énoncer le théorème de comparaison concernant l'intégrabilité (th. 1.30)

6 prouver que si f est continue sur $[a; b[$ et si $\int_a^b f$ converge, alors $\lim_{x \to b^-} \int_x^b f(t)dt = 0$ (prop. 1.19)

7 prouver que si f et g sont continues sur I et si $\int_I f$ CV et $\int_I g$ DV, alors $\int_I (f + g)$ DV (th. 1.25)

8 prouver que si $a \in \mathbb{R}^*$ et $\alpha > 0$, alors $\int_1^{+\infty} \frac{e^{iat}}{t^\alpha} dt$ converge (exem. 1.36)

Prévision pour la prochaine semaine : intégration et révisions d'algèbre linéaire