CHAPITRE 2
ALGÈBRE LINÉAIRE

PARTIE 2.1 : RÉVISIONS

REMARQUE 2.1 : Soit une famille quelconque $(x_i)_{i\in I}$ *de vecteurs d'un espace vectoriel* E*, on appelle combinaison linéaire de cette famille tout vecteur* x *de* E *qui s'écrit* $x = \sum\limits_{i\in I} \lambda_i x_i$ *où* $(\lambda_i)_{i\in I}$ *est une famille de scalaires pour laquelle* $J = \{i \in I \mid \lambda_i \neq 0_K\}$ *est fini (on dit que* $(\lambda_i)_{i\in I}$ *est* **à support fini***) de sorte que* $x = \sum\limits_{i\in I} \lambda_i x_i$ *s'interprète comme étant* $x = \sum\limits_{i\in J} \lambda_i x_i$ *(car* $0_{\mathbb{K}}.x_i = 0_E$ *est neutre pour l'addition).*
On note $\mathbb{K}^{(I)}$ *l'ensemble de toutes les familles* $(\lambda_i)_{i\in I}$ *à support fini. On définit l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des* $(x_i)_{i\in I}$*, noté* $\mathrm{Vect}\big((x_i)_{i\in I}\big) = \mathrm{Vect}_{i\in I}\big(x_i\big) = \{\, x = \sum\limits_{i\in I} \lambda_i x_i \mid (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)} \,\}$.
C'est un sous-espace vectoriel de E *qui est à la fois le plus petit sous-espace de* E *qui contient tous les vecteurs de la famille* $(x_i)_{i\in I}$ *mais aussi l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de* E *qui contiennent les vecteurs de la famille* $(x_i)_{i\in I}$.

EXEMPLE 2.1 : Avec cette définition : $\mathrm{Vect}\big((X^k)_{k\in\mathbb{N}}\big) = \mathbb{C}[X]$.

DÉFINITION 2.1 :
Soit E *est un espace,* $f \in \mathcal{L}(E)$ *et* F *un sous-espace de* E*, on dit que* F *est* **stable** *par* f *si* $f(F) \subset F$*. On pose alors l'***application induite** *par* f *dans* F*, notée* $f_F : F \to F \in \mathcal{L}(F)$ *et définie par :* $\forall x \in F,\ f_F(x) = f(x)$.

REMARQUE FONDAMENTALE 2.2 : Soit E, F, G *trois espaces et* $f \in \mathcal{L}(E,F)$*,* $g \in \mathcal{L}(F,G)$*, alors :*
- *On a l'équivalence* $g \circ f = 0 \iff \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$.
- *Pour la composition, on a aussi les inclusions* $\mathrm{Im}(g\circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$ *et* $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$.
- *Pour la multiplication par un scalaire, si* $\alpha \neq 0 \in \mathbb{K}$*, on a* $\mathrm{Im}(\alpha f) = \mathrm{Im}(f)$ *et* $\mathrm{ker}(\alpha f) = \mathrm{Ker}(f)$.

Soit E, F *deux espaces et* $(f,g) \in \big(\mathcal{L}(E,F)\big)^2$, $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Ker}(f+g)$ *et* $\mathrm{Im}(f+g) \subset \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$.
Pour un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$*, on a les inclusions classiques :*
- *Pour les noyaux :* $\mathrm{Ker}(f^0) = \{0_E\} \subset \mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2) \subset \cdots \subset \mathrm{Ker}(f^p) \subset \cdots$.
- *Pour les images :* $\mathrm{Im}(f^0) = E \supset \mathrm{Im}(f) \supset \mathrm{Im}(f^2) \supset \cdots \supset \mathrm{Im}(f^p) \supset \cdots$.

THÉORÈME ÉNORME 2.1 :
Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ **et** S **un supplémentaire de** $\mathrm{Ker}(f)$ **dans** E **alors** f **induit un isomorphisme de** S **sur** $\mathrm{Im}(f)$ **; c'est-à-dire que** $f|_S^{\mathrm{Im}(f)}$ **est un isomorphisme.**

REMARQUE HP 2.3 : Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $r = \mathrm{rg}(A)$ *et la matrice* $J_{n,p,r} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *qui ne contient que des* 0 *sauf* $j_{1,1} = \cdots = j_{r,r} = 1$ *:* A *et* $J_{n,p,r}$ *sont équivalentes.*
A *et* B *de* $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *sont donc équivalentes si et seulement si elles ont même rang.*

PARTIE 2.2 : PRODUIT ET SOMME D'ESPACES

PROPOSITION 2.2 :
Soit $n \geqslant 3$ **et des** $\mathbb{K}$**-espaces vectoriels** $E_1, \cdots E_n$**, si on définit les lois** $+$ **et** $.$ **dans** $E_1 \times \cdots \times E_n$ **par** $(x_1,\cdots,x_n)+(x'_1,\cdots,x'_n) = (x_1+x'_1,\cdots,x_n+x'_n)$ **et** $\lambda.(x_1,\cdots,x_n) = (\lambda.x_1,\cdots,\lambda.x_n)$**, alors** $(E_1\times\cdots\times E_n,+,.)$ **est un** $\mathbb{K}$**-espace vectoriel dont le vecteur nul est** $0_{E_1\times\cdots\times E_n} = (0_{E_1},\cdots,0_{E_n})$**.**
Si $E_1,\cdots,E_n$ **sont de dimensions finies, alors** $\prod\limits_{k=1}^{n} E_k$ **aussi et** $\dim\Big(\prod\limits_{k=1}^{n} E_k\Big) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dim(E_k)$**.**

DÉFINITION 2.2 :
Soit p *sous-espaces vectoriels de* E *notés* $E_1, \cdots, E_p$ *; on note* $E_1 + \cdots + E_p = \sum_{k=1}^{p} E_k$ *la* **somme des sous-espaces** $E_1, \cdots, E_p$ *définie par* $\sum_{k=1}^{p} E_k = \left\{ x \in E \;\middle|\; \exists (x_1, \cdots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p,\ x = x_1 + \cdots + x_p \right\}$.

PROPOSITION 2.3 :
Avec ces notations, $E_1 + \cdots + E_p$ **est un sous-espace vectoriel de** E**. C'est le plus petit sous-espace vectoriel de** E **(pour l'inclusion) contenant tous les** E_k**, c'est-à-dire le sous-espace de** E **engendré par la réunion des sous-espaces** $E_1, \cdots, E_p$**. En dimension finie,** $\dim\left(\sum_{k=1}^{p} E_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{p} \dim(E_k)$**.**

DÉFINITION 2.3 :
Avec les notations ci-dessus, on dit que la somme des E_k *est* **une somme directe** *et on note alors* $\sum_{k=1}^{p} E_k = E_1 \oplus \cdots \oplus E_p = \bigoplus_{k=1}^{p} E_k$ *si* $\forall (x_1, \cdots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p,\ x_1 + \cdots + x_p = 0_E \Longrightarrow x_1 = \cdots = x_p = 0_E$.

PROPOSITION 2.4 :
Soit $E_1, \cdots, E_p$ **des sous-espaces vectoriels de** E**. On a l'équivalence (i)** $\sum_{k=1}^{p} E_k$ **est directe** $\Longleftrightarrow$ **(ii)** $\forall x \in \sum_{k=1}^{p} E_k,\ \exists! (x_1, \cdots, x_p) \in \prod_{k=1}^{p} E_k,\ x = x_1 + \cdots + x_p \iff$ **(iii)** $\forall k \in [\![1;p]\!],\ E_k \cap \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{p} E_j\right) = \{0_E\}$**.**

<u>*REMARQUE 2.4*</u> *: Attention :* $\left(\sum_{k=1}^{p} E_k \textit{ directe}\right) \not\Leftarrow \left(\forall (i,j) \in [\![1;p]\!]^2,\ i \neq j \Longrightarrow E_i \cap E_j = \{0_E\}\right)$.

THÉORÈME 2.5 :
Si E **de dimension finie,** $\sum_{k=1}^{p} E_k = \bigoplus_{k=1}^{p} E_k \Longleftrightarrow \dim\left(\sum_{k=1}^{p} E_k\right) = \sum_{k=1}^{p} \dim(E_k)$**. Dans ce cas, si** $\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_p$ **sont des bases respectives de** $E_1, \cdots, E_p$ **alors** $\mathcal{B}_1 \amalg \cdots \amalg \mathcal{B}_p$ **est une base (adaptée) de** $E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$**.**

PARTIE 2.3 : MATRICES PAR BLOCS

PROPOSITION 2.6 :
Si $A = (A_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ **est composée de blocs "de bonnes tailles" ainsi que** $B = (B_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant q}}$**, alors** $AB = C$ **où** C **est écrite par blocs** $C = (C_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant q}}$ **avec** $C_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} A_{i,k} B_{k,j}$**.**

PROPOSITION 2.7 :
Soit E **un espace vectoriel de dimension finie,** F **un sous-espace vectoriel de** E **et** $f \in \mathcal{L}(E)$**.**
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ **une base de** E **telle que** $\mathcal{B}_F = (e_1, \cdots, e_p)$ **soit une base de** F**. On a alors l'équivalence :** $\big(F$ **est stable par** $f\big) \Longleftrightarrow \left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}\right.$ **est triangulaire par blocs**$\big)$**.**
$A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ **est alors la matrice dans la base** $\mathcal{B}_F$ **de l'endomorphisme** f_F **de** F **induit par** f**.**

<u>*REMARQUE 2.5*</u> *: Si* $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ *est une base de* E, $f \in \mathcal{L}(E)$ *et* $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ *:*
- $\big(A$ *est diagonale*$\big) \Longleftrightarrow \big(\forall k \in [\![1;n]\!],\ \mathrm{Vect}(e_k)$ *est stable par* $f\big)$.
- $\big(A$ *est triangulaire supérieure*$\big) \Longleftrightarrow \big(\forall k \in [\![1;n]\!],\ E_k = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_k)$ *est stable par* $f\big)$.

PROPOSITION 2.8 :
Si $E = \bigoplus_{k=1}^{p} E_k$ **et** $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_p)$ **est une base adaptée à la décomposition, si** $f \in \mathcal{L}(E)$ **alors on a l'équivalence :** $\big(\forall k \in [\![1;p]\!],\ E_k$ **stable par** $f\big) \Longleftrightarrow \big(A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ **diagonale par blocs dans** $\mathcal{B}\big)$**.**
Dans ce cas : $A = \mathrm{diag}(A_1, \cdots, A_p)$ **où** $\forall k \in [\![1;p]\!],\ A_k = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_k}(f_k)$ **avec** $f_{E_k} = f_k$**.**

PROPOSITION 2.9 :
Si $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ **et** u **et** v **commutent (soit** $u \circ v = v \circ u$**) alors** $\mathrm{Ker}(u)$ **et** $\mathrm{Im}(u)$ **sont stables par** v**.**

THÉORÈME 2.10 :
Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ **est triangulaire supérieure (resp. inférieure) par blocs, c'est-à-dire qu'on a** $M = (A_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$ **avec** $A_{i,j}$ **matrice nulle si** $i > j$ **(resp.** $i < j$**) alors** $\det(M) = \prod_{k=1}^{p} \det(A_{k,k})$**.**

PARTIE 2.4 : TRACE

DÉFINITION 2.4 :
Si $n \in \mathbb{N}^*$, $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, *on définit la* **trace** *de* A, *c'est le scalaire* $\mathrm{tr}(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,k}$.

PROPOSITION 2.11 :
La trace est linéaire. Si ça existe, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ **et** $\mathrm{tr}(A^T) = \mathrm{tr}(A)$ **et** $\mathrm{tr}(PAP^{-1}) = \mathrm{tr}(A)$**.**

DÉFINITION 2.5 :
Soit E *de dimension finie et* $f \in \mathcal{L}(E)$, *on appelle* **trace** *de* f *le scalaire* $\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}\big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\big)$ *si* $\mathcal{B}$ *base de* E.

PROPOSITION 2.12 :
La trace est linéaire. $\mathrm{tr}(g \circ f) = \mathrm{tr}(f \circ g)$ **si ça existe et, si** p **est un projecteur,** $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$**.**

PARTIE 2.5 : LAGRANGE ET VANDERMONDE

THÉORÈME 2.13 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$**,** $a_1, \cdots, a_n$ **des éléments de** $\mathbb{K}$ **distincts et** $b_1, \cdots, b_n$ **des scalaires, il existe un unique polynôme** $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ **tel que** $\forall k \in [\![1;n]\!],\ P(a_k) = b_k$**, il s'agit de** $P = \sum_{k=1}^{n} b_k \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{X - a_i}{a_k - a_i}$**.**

<u>REMARQUE FONDAMENTALE 2.6</u> : Avec ces notations, si on pose $L_k = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{X - a_i}{a_k - a_i}$, *alors* $(L_1, \cdots, L_n)$ *est une base de* $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ *et, si* $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$, *on a* $P = \sum_{k=1}^{n} P(a_k) L_k$.

PROPOSITION 2.14 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ **et une famille de** n **scalaires** $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$**, on se donne la matrice de** VANDERMONDE $A = (\alpha_j^{i-1})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$**, alors** $\det(A) = \prod_{1 \leqslant p < q \leqslant n} (\alpha_q - \alpha_p)$**.**

PARTIE 2.6 : POLYNÔMES D'ENDOMORPHISMES

DÉFINITION 2.6 :
Soit E *un espace vectoriel et* $f \in \mathcal{L}(E)$. *Pour* $k \in \mathbb{N}$, *on pose* $f^k = \mathrm{id}_E$ *si* $k = 0$ *et* $f^k = f \circ f^{k-1}$ *si* $k \geqslant 1$.
Si $P = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, *on définit* $P(f) \in \mathcal{L}(E)$ *par* $P(f) = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k f^k = a_d f^d + a_{d-1} f^{d-1} + \cdots + a_1 f + a_0 \mathrm{id}_E$.

THÉORÈME 2.15 :
Soit E **un espace,** $f \in \mathcal{L}(E)$, $(P, Q, \alpha, \beta) \in \mathbb{K}[X]^2 \times \mathbb{K}^2$, $(\alpha P + \beta Q)(f) = \alpha P(f) + \beta Q(f)$, $(P \times Q)(f) = P(f) \circ Q(f)$.

REMARQUE 2.7 : • $\forall P \in \mathbb{K}[X]$, $\mathrm{Ker}\,\big(P(f)\big)$ *et* $\mathrm{Im}\,\big(P(f)\big)$ *sont stables par* f.

- *Si* $\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid f \circ g = g \circ f\}$ *est l'ensemble des endomorphismes de* E *qui commutent avec* f *(appelé le* **commutant de** f*) :* $\mathcal{C}(f)$ *est une sous-algèbre de* $\mathcal{L}(E)$ *qui contient* $\mathbb{K}[f] = \mathrm{Vect}(f^k | k \in \mathbb{N})$.

DÉFINITION 2.7 :
Soit E *un espace,* $f \in \mathcal{L}(E)$ *et* $P \in \mathbb{K}[X]$. *On dit que* P *est* **un polynôme annulateur de** f *si* $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

REMARQUE HP 2.8 : Si E *de dimension finie,* f *a au moins un polynôme annulateur non nul :*

- *Il existe un unique polynôme unitaire noté* π_f *tel que* $\forall P \in \mathbb{K}[X],\ P(f) = 0 \Longrightarrow \pi_f | P$.
- *Si* F *est un sous-espace de* E *stable par* f, *alors* $\pi_{f_F} | \pi_f$.
- *La dimension de* $\mathbb{K}[f]$ *est égale au degré de* π_f.

REMARQUE 2.9 : Pour caractériser les automorphismes, soit E *de dimension finie et* $f \in \mathcal{L}(E)$ *:*

- *Si* $P(f) = 0$ *avec* $P = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k X^k$ *et* $a_0 \neq 0$ *alors* $f^{-1} = -\sum\limits_{k=1}^{d} \dfrac{a_k}{a_0} f^{k-1}$.
- $f \in GL(E) \Longleftrightarrow \big(\exists P \in \mathrm{Ann}(f),\ P(0) \neq 0\big)$ *(ce qui équivaut aussi à* $\pi_f(0) \neq 0$*).*

REMARQUE FONDAMENTALE 2.10 : Si $P = \sum\limits_{k=1}^{r} (X - a_k)^{m_k}$ *est un polynôme annulateur unitaire scindé de degré* n *d'un endomorphisme* f *d'un espace* E *(le mieux est d'avoir* P *de bas degré donc* P *minimal est optimal), cela nous permet de calculer efficacement les puissances de* f. *Effectuons la division euclidienne de* X^p *par* P *qu'on écrit* $X^p = Q_p P + R_p$ (E_p) *avec* $\deg(R_p) \leqslant n - 1$. *Traitons deux cas :*

- *Si* P *est scindé à racines simples, c'est-à-dire si* $\forall k \in [\![1;r]\!]$, $m_k = 1$ *qui équivaut à* $r = n$, *alors* $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $R_p(a_k) = a_k^p$ *et* R_p *est donc un polynôme d'interpolation de* LAGRANGE.
- *Si* P *admet des racines multiples, on évalue, pour chaque* $k \in [\![1;r]\!]$, *la relation* (E_p) *ainsi que ses dérivées jusqu'à la dérivée d'ordre* $m_r - 1$ *et cela nous donne un système de* $\sum\limits_{k=1}^{r} m_k = n$ *équations avec* n *inconnues (les coefficients de* R_p*) ce qui nous permet de déterminer* R_p.

On évalue ensuite (E_p) *en* f *et on a* $f^p = R_p(f)$ *car* $(Q_p P)(f) = Q_p(f) \circ P(f) = 0$.

DÉFINITION 2.8 :
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *Pour* $k \in \mathbb{N}$, *on pose* $A^k = I_n$ *si* $k = 0$ *et* $A^k = A \times A^{k-1}$ *si* $k \geqslant 1$.
Si $P = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, *on définit* $P(A) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *par* $P(A) = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k A^k = a_d A^d + \cdots + a_1 A + a_0 I_n$.

PROPOSITION 2.16 :
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ **et** $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, $(\alpha P + \beta Q)(A) = \alpha P(A) + \beta Q(A)$, $(P \times Q)(A) = P(A) \times Q(A)$.

REMARQUE 2.11 : Si $\mathcal{C}(A) = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid AB = BA\}$ *est l'ensemble des matrices qui commutent avec* A *(le* **commutant de** A*) :* $\mathcal{C}(A)$ *est une sous-algèbre de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *qui contient* $\mathbb{K}[A] = \mathrm{Vect}(A^k | k \in \mathbb{N})$.