DEVOIR 03 : INTÉGRALES

PSI 1 2024-2025 **mardi 17 septembre 2024**

QCM

1 *Convergence : soit* $f, g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ *continues par morceaux (CV pour converge et DV pour diverge)*

1.1 $\left(\int_0^{+\infty} f \text{ DV et } \int_0^{+\infty} g \text{ CV}\right) \Longrightarrow \int_0^{+\infty} (f+g) \text{ DV}$

1.2 $\left(\int_0^{+\infty} f \text{ CV et } \int_0^{+\infty} g \text{ CV}\right) \Longrightarrow \int_0^{+\infty} fg \text{ CV}$

1.3 $\int_0^{+\infty} f \text{ DV} \Longrightarrow \int_1^{+\infty} f \text{ DV}$

1.4 $\int_0^{+\infty} f \text{ CV} \Longleftrightarrow \int_0^{1} f \text{ CV}$

2 *Convergence d'intégrale et intégrabilité : soit* $f, g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *continues par morceaux*

2.1 $f \underset{+\infty}{\sim} g \Longrightarrow \left(\int_0^{+\infty} f \text{ et } \int_0^{+\infty} g \text{ de même nature}\right)$

2.2 f intégrable sur $\mathbb{R}_+ \Longrightarrow \int_0^{+\infty} f$ converge

2.3 $\left(f \leqslant g \text{ et } \int_0^{+\infty} f \text{ diverge}\right) \Longrightarrow \int_0^{+\infty} g$ diverge

2.4 $\left(f \underset{+\infty}{=} O(g) \text{ et } g \text{ intég. sur } \mathbb{R}_+\right) \Longrightarrow \int_0^{+\infty} f$ converge

3 *Critère de* RIEMANN *: soit* $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ *continue par morceaux*

3.1 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0 \Longrightarrow f$ intégrable en $+\infty$

3.2 f intégrable en $+\infty \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

3.3 $\left(\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}f(x) = 0 \text{ et } \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 f(x) = 0\right) \Longrightarrow \int_0^{+\infty} f$ converge

3.4 $\left(\lim\limits_{x\to 0^+} x^3 f(x) = 1 \text{ ou } \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}f(x) = +\infty\right) \Longrightarrow \int_0^{+\infty} f$ diverge

4 *Borne amovible : soit* $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ *continue telle que* $\int_0^{+\infty} f$ *converge ; on pose* $F(x) = \int_0^x f$ *pour* $x \geqslant 0$

4.1 F est continue en 0

4.2 F est dérivable en 0

4.3 F est bornée sur $\mathbb{R}_+$

4.4 $\forall x > 0,\ F'(x) = f(x)$

Énoncé Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f_\alpha : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+$ définie par $\forall x > 0,\ f_\alpha(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$.

Donner des conditions nécessaires et suffisantes de convergence de $\int_1^{+\infty} f_\alpha$, puis de $\int_0^1 f_\alpha$.

Preuve Soit une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue et telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha f(x) = +\infty$ avec $\alpha \leqslant 1$.
Montrer que f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 1 Soit $f :]1; +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$. Déterminer des équivalents (les plus simples possibles) de $f(x)$ quand x tend vers 1^+ et vers $+\infty$. Justifier que f est intégrable sur $]1; +\infty[$.
Grâce au changement de variable $x = \mathrm{ch}(t)$ (à justifier), trouver la valeur exacte de $I = \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$.

Exercice 2 Par intégration par parties, montrer que $\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \dfrac{1}{t^2}\right) dt$ converge et calculer sa valeur.

DEVOIR 03 NOM : PRÉNOM :

QCM Répondre dans le tableau ci-dessous au QCM : mettre une croix dans la case de la ligne i colonne j revient à déclarer la question $i.j$ vraie. Ne rien mettre revient à la déclarer fausse.

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1					
2					
3					
4					

Énoncé

Preuve

Exercice 1

Exercice 2

DEVOIR 03	NOM : COCO	PRÉNOM : SINUS

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1	X				
2		X		X	
3			X	X	
4	X		X	X	

1.1 Vrai : par l'absurde, si $\int_0^{+\infty}(f+g)$ convergeait, par somme $f=(f+g)-g$, on aurait $\int_0^{+\infty} f$ convergente **1.2** Faux : $f(t)=g(t)=\dfrac{1}{\sqrt{t}(1+t)}$ par exemple **1.3** Faux : on pourrait avoir $\int_1^{+\infty} f$ convergente et $\int_0^1 f$ divergente **1.4** Faux : c'est $\int_0^{+\infty} f$ converge $\Longleftrightarrow \left(\int_0^1 f \text{ et } \int_1^{+\infty} f \text{ convergent}\right)$.

2.1 Faux : $\dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x}+\sin(x)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$ (voir cours) **2.2** Vrai : ACV $\Longrightarrow$ CV **2.3** Faux : on ne sait pas si f positive **2.4** Vrai : comparaison.

3.1 Faux : $f(x)=\dfrac{1}{x\ln(x)}$ **3.2** Faux : exemple en cours **3.3** Vrai : $f(x) \underset{0}{=} o(x^{-1/2})$ et $f(x) \underset{+\infty}{=} o(x^{-2})$

3.4 Vrai : $f(x) \geqslant \dfrac{1}{2x^3}$ localement donc $\int_0^1 f(x)dx$ diverge ou $f(x) \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ localement donc $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ diverge.

4.1 Vrai : le reste d'une intégrale convergente tend vers 0 **4.2** Faux : on prend $f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ alors $F(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{2}$

4.3 Vrai : F tend vers 0 en 0^+ et admet une limite finie en $+\infty$ en étant continue, c'est classique ! **4.4** Vrai : il suffit d'écrire $F(x)=\int_0^1 f+\int_1^x f$ est c'est le théorème fondamental de l'intégration.

Énoncé Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f_\alpha : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+$ définie par $\forall x>0,\ f_\alpha(x)=\dfrac{1}{x^\alpha}$:

$\int_1^{+\infty} f_\alpha$ converge $\Longleftrightarrow \alpha>1$ et $\int_0^1 f_\alpha$ converge $\Longleftrightarrow \alpha<1$ (critère de RIEMANN).

Preuve L'hypothèse se traduit par $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^\alpha f(x)}=0$ ou encore $\dfrac{1}{x^\alpha} \underset{+\infty}{=} o\big(f(x)\big)$. Par l'absurde, si f était intégrable sur $\mathbb{R}_+$, par comparaison, $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ serait intégrable sur $[1;+\infty[$ ce qui est faux par RIEMANN. On en déduit bien que f n'est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On pouvait dire aussi que cette limite implique l'existence de $a>0$ tel que $\forall x \geqslant a,\ x^\alpha f(x) \geqslant 1 \Longleftrightarrow f(x) \geqslant \dfrac{1}{x^\alpha}$ avec la conclusion directement par minoration.

Exercice 1 Comme $x^2-1=(x-1)(x+1)$: $f(x) \underset{1^+}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{x-1}} \underset{1^+}{=} O\left(\dfrac{1}{(x-1)^{\frac{1}{2}}}\right)$. Puis $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$ car $x^2-1 \underset{+\infty}{\sim} x^2$. f est continue sur $]1;+\infty[$. Par RIEMANN, comme $\dfrac{1}{2}<1$ et $2>1$, f est intégrable sur $]1;+\infty[$. Comme ch est une bijection strictement croissante et C^1 de $\mathbb{R}_+^*$ dans $]1;+\infty[$, on a le calcul $\int_1^{+\infty} f(x)dx=\int_0^{+\infty} \mathrm{sh}(t)f(\mathrm{ch}(t))dt=\int_0^{+\infty}\dfrac{dt}{\mathrm{ch}(t)}=\big[2\,\mathrm{Arctan}(e^t)\big]_0^{+\infty}=\big[\mathrm{Arctan}(\mathrm{sh}(t))\big]_0^{+\infty}=\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 2 La fonction $f : t \mapsto \ln\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Avec $u=f$ et $v(t)=t$, u et v sont C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $u'(t)=-\dfrac{2}{t(1+t^2)}$. Comme $u(t)=\ln(1+t^2)-2\ln(t) \underset{0}{\sim} -2\ln(t)$ et $\lim\limits_{t\to0^+} t\ln(t)=0$, $\lim\limits_{t\to0^+} u(t)v(t)=0$. De plus, $u(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$ donc $u(t)v(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t}$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)v(t)=0$. Le "crochet converge" donc $\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right)dt$ est de même nature que $\int_0^{+\infty}\dfrac{2}{1+t^2}dt$ qui converge car $t \mapsto \dfrac{2}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et que sa primitive $t \mapsto 2\,\mathrm{Arctan}(t)$ admet une limite finie en $+\infty$: $\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right)dt=\int_0^{+\infty}\dfrac{2dt}{1+t^2}=[2\,\mathrm{Arctan}(t)]_0^{+\infty}=\pi$.