DEVOIR 02 : INTÉGRALES

PSI 1 2024-2025 **mardi 10 septembre 2024**

QCM

1 *Continuité par morceaux : soit* $f, g : [a;b] \to \mathbb{R}$ *deux fonctions continues par morceaux sur* $[a;b]$.

1.1 $\exp(f)$ est continue par morceaux sur $[a;b]$

1.2 $\tan(f)$ est continue par morceaux sur $[a;b]$

1.3 $|f|$ est continue par morceaux sur $[a;b]$

1.4 $\lfloor f+g \rfloor$ est continue par morceaux sur $[a;b]$

2 *Égalités et inégalités classiques : soit* $a < b$ *et* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *deux fonctions continues*

2.1 $\displaystyle\int_a^b fg = \left(\int_a^b f\right) \times \left(\int_a^b g\right)$

2.2 $\displaystyle\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$

2.3 $\displaystyle\int_a^b fg \leqslant ||f||_{\infty,[a;b]} \int_a^b |g|$

2.4 $\displaystyle\int_a^b f = 0 \Longrightarrow f = 0$

3 *Propriétés ; soit* $f : [0;1] \to \mathbb{R}_+$ *continue et on note* $||f||_\infty = \underset{[0;1]}{\mathrm{Max}} |f|$

3.1 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)dt$

3.2 $\forall x \in [0;1]$, $\displaystyle\left(\int_x^{x^2} f(t)dt\right)' = f(x^2) - f(x)$

3.3 $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt = 0 \Longrightarrow f = 0$

3.4 $\displaystyle\int_0^1 tf(t)dt \leqslant \frac{1}{2}||f||_\infty$

4 *Convergence : soit* $f :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ *continue par morceaux (CV pour converge et DV pour diverge)*

4.1 $\displaystyle\left(\int_0^{+\infty} f \text{ DV} \Longrightarrow \left(\int_0^1 f \text{ DV et } \int_1^{+\infty} f \text{ DV}\right)\right.$

4.2 $\displaystyle\left(\int_0^{+\infty} f \text{ CV} \Longleftrightarrow \left(\int_0^1 f \text{ CV et } \int_3^{+\infty} f \text{ CV}\right)\right.$

4.3 $\displaystyle\int_0^{+\infty} f \text{ DV} \Longrightarrow \int_1^{+\infty} f \text{ DV}$

4.4 $\displaystyle\int_1^{+\infty} f \text{ CV} \Longrightarrow \int_1^{+\infty} f^2 \text{ CV}$

Énoncé Formule de TAYLOR reste intégral avec $f : \widetilde{[a;b]} \to \mathbb{K}$ de classe C^{n+1} sur $\widetilde{[a;b]}$.
Compléter la formule : $f(b) = f(a) + \cdots$.

Preuve Pour $f, g : [a;b] \to \mathbb{R}$ continues par morceaux telles que $\displaystyle\int_a^b f^2(t)dt > 0$ et $\displaystyle\int_a^b g^2(t)dt > 0$, montrer l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)g(t)dt\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(t)dt}\sqrt{\int_a^b g^2(t)dt}$.

Exercice 1 Montrer l'existence et déterminer la valeur de $\displaystyle\lim_{x\to0+} f(x)$ où $\displaystyle f(x) = \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t}dt$.
Indication : on pourra encadrer $f(x)$.

Exercice 2 Justifier l'existence de $\displaystyle I = \int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$. Effectuer le changement de variable $x = \pi - t$ pour exprimer I en fonction de $\displaystyle J = \int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$. En déduire la valeur exacte de I en fonction de π.

DEVOIR 02 NOM : PRÉNOM :

QCM Répondre dans le tableau ci-dessous au QCM : mettre une croix dans la case de la ligne i colonne j revient à déclarer la question $i.j$ vraie. Ne rien mettre revient à la déclarer fausse.

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1					
2					
3					
4					

Énoncé

Preuve

Exercice 1

Exercice 2

DEVOIR 02	NOM : COCO	PRÉNOM : SINUS

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1	X		X		
2		X	X		
3	X		X	X	
4		X			

1.1 Vrai : $\exp$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc les limites et la continuité se conservent **1.2** Faux : $f = \mathrm{id}$ sur $[0;\pi/2[$ et $f(\pi/2) = 0$ **1.3** Vrai : $x \mapsto |x|$ est aussi continue sur $\mathbb{R}$ **1.4** Faux : $f = g : x \mapsto x\sin(1/x)$ sur $]0;1]$ avec $f(0) = g(0) = 0$, alors $\lfloor f + g \rfloor$ n'admet pas de limite en 0.
2.1 Faux : par exemple pour $f = g = 1$ si $b - a \neq 1$ **2.2** Vrai : linéarité de l'intégrale **2.3** Vrai : car $\displaystyle\int_a^b fg \leqslant \left|\int_a^b fg\right|$ puis inégalité triangulaire sur les intégrales (car $a < b$) **2.4** Faux : on n'a rien imposé sur le signe de f ; par exemple si $a = -1$, $b = 1$ et $f : x \mapsto x$.
3.1 Vrai : sommes de RIEMANN **3.2** Faux : c'est $\displaystyle\left(\int_x^{x^2} f(t)\mathrm{d}t\right)' = 2xf(x^2) - f(x)$ **3.3** Vrai : du cours **3.4** Vrai : $\displaystyle\int_0^1 tf(t)\mathrm{d}t \leqslant ||f||_\infty \int_0^1 t\mathrm{d}t = \frac{1}{2}||f||_\infty$ (inégalité triangulaire sur les intégrales).
4.1 Faux : la définition est $\displaystyle\left(\int_0^{+\infty} f \text{ diverge} \iff \left(\int_0^1 f \text{ diverge ou } \int_1^{+\infty} f \text{ diverge}\right)\right.$ **4.2** Vrai : on a vu que $\displaystyle\int_3^{+\infty} f$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_1^{+\infty} f$ converge **4.3** Faux : on pourrait avoir $\displaystyle\int_1^{+\infty} f$ convergente et $\displaystyle\int_0^1 f$ divergente **4.4** Faux : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ CV (ex. 36) et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)\mathrm{d}t}{t}$ DV car $\displaystyle\frac{\sin^2(t)}{t} = \frac{1}{2t} - \frac{\cos(2t)}{t}$.

Énoncé Avec ces conditions, $\displaystyle f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$.

Preuve Soit $\varphi : [a;b] \to \mathbb{R}$ définie par $\displaystyle\varphi(x) = \int_a^b (f(t) + xg(t))^2\mathrm{d}t$ (bien définie car $f + xg$ est continue par morceaux sur le segment $[a;b]$). Alors, en développant et par linéarité de l'intégrale, on a $\varphi(x) = Ax^2 + 2BX + C$ avec $\displaystyle A = \int_a^b g^2(t)\mathrm{d}t$, $\displaystyle B = \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle C = \int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t$. Comme φ est une fonction polynomiale de degré 2 telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) \geqslant 0$ (par positivité de l'intégrale), le discriminant $\Delta = 4B^2 - 4AC$ de φ est négatif, ce qui donne $\displaystyle\left(\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t\right) \times \left(\int_a^b g^2(t)\mathrm{d}t\right)$. Et on passe à la racine.

Exercice 1 • Pour tout réel $x > 0$, comme la fonction $t \mapsto e^{-t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ par composition, on a $\forall t \in [x;2x],\ e^{-2x} \leqslant e^{-t} \leqslant e^{-x}$ donc $\displaystyle\frac{e^{-2x}}{t} \leqslant \frac{e^{-t}}{t} \leqslant \frac{e^{-x}}{t}$. Puis, par croissance de l'intégrale, on obtient : $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^{-2x}\mathrm{d}t}{t} \leqslant \int_x^{2x} \frac{e^{-t}\mathrm{d}t}{t} \leqslant \int_x^{2x} \frac{e^{-x}\mathrm{d}t}{t}$ donc $e^{-2x}\ln(2) \leqslant f(x) \leqslant e^{-x}\ln(2)$ car $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t} = [\ln(t)]_x^{2x} = \ln(2)$. Par encadrement, comme $\displaystyle\lim_{x\to 0} e^{-2x}\ln(2) = \lim_{x\to 0} e^{-x}\ln(2) = \ln(2)$, on obtient $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = \ln(2)$.
• Ou $\displaystyle\frac{e^{-t}}{t} = \frac{1}{t} + \frac{e^{-t}-1}{t}$ et $\displaystyle g : t \mapsto \frac{e^{-t}-1}{t}$ se prolonge par continuité en 0 avec $g(0) = -1$ car $e^{-t} - 1 \underset{0}{\sim} -t$. Or $\displaystyle f(x) = \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t = \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_x^{2x} g(t)\mathrm{d}t = \ln(2) + [G(t)]_x^{2x} = \ln(2) + G(2x) - G(x)$ en notant G une primitive de g sur $\mathbb{R}_+$ et, par continuité de G sur $\mathbb{R}_+$, $\displaystyle\lim_{x\to 0} G(2x) = \lim_{x\to 0} G(x) = G(0)$ donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = \ln(2)$.

Exercice 2 $\displaystyle x \mapsto \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}$ est continue sur le segment $[0;\pi]$ donc I existe. De plus, $t \mapsto \pi - t$ est de classe C^1 de $[0;\pi]$ dans $[0;\pi]$ donc $\displaystyle I = \int_\pi^0 \frac{(\pi-t)\sin(\pi-t)}{1+\cos(\pi-t)^2}(-1)\mathrm{d}t = \int_0^\pi \frac{(\pi-x)\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\mathrm{d}x = \pi J - I$ par changement de variable $x = \varphi(t)$. Ainsi, $I = \frac{\pi}{2}J$. Or $\displaystyle J = \int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x = \Big[-\mathrm{Arctan}(\cos x)\Big]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$. D'où, $\displaystyle I = \frac{\pi^2}{4}$.