

Correction du DS1

PROBLÈME (inspiré de Mines Sup 2003) : Partie I

1. a) Comme $k \neq 0$, $\int_0^\pi \cos(kx) dx = \left[\frac{\sin(kx)}{k} \right]_0^\pi = 0$ et, par linéarité de l'intégrale, $\int_0^\pi f_n(t) dt = 0$
- b) On a $f_n(x) = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^n e^{ikx} \right)$ et comme $e^{ix} \neq 1$, on a $\sum_{k=1}^n e^{ikx} = e^{ix} \frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}} = e^{i \frac{n+1}{2} x} \frac{-2i \sin \frac{nx}{2}}{-2i \sin \frac{x}{2}}$ d'où on déduit

$$f_n(x) = \frac{\cos \left(\frac{n+1}{2} x \right) \sin \left(\frac{n}{2} x \right)}{\sin \frac{x}{2}} = \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \left[\sin \left(\frac{2n+1}{2} x \right) - \sin \left(\frac{x}{2} \right) \right] = \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} g_n(x) \right]$$
Le résultat étant donné, on pouvait aussi le prouver par récurrence sur n .
- c) On a $\lim_0 g_n = \lim_0 (1 + 2f_n) = 2n + 1$ donc on prolonge par continuité g_n par $g_n(0) = \lim_{x \rightarrow 0} g_n(x) = 2n + 1$
On peut aussi déterminer cette limite à partir de l'expression de g_n et en utilisant $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$
- d) On a, pour $n \geq 1$, $g_n = 1 + 2f_n$ donc $u_n = \pi + 2 \int_0^\pi f_n(t) dt = \pi$ (avec **I.1.a**); comme $u_0 = \int_0^\pi dt = \pi$, on a
 $u_n = \pi$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
2. a) On a, pour $x \neq 0$, $g(x) = \frac{1 - \frac{x^2}{2\alpha^2} - 1 + o(x^2)}{\frac{x}{2} + o(x^2)} = -\frac{\frac{x}{\alpha^2} + o(x)}{1 + o(x)} = -\frac{x}{\alpha^2} + o(x)$. Comme $g(0) = 0$, on peut aussi écrire $g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} g(0) - \frac{x}{\alpha^2} + o(x)$ et ce DL₁(0) prouve que g est dérivable en 0 et $g'(0) = \frac{-1}{\alpha^2}$
- b) Comme $\sin \frac{x}{2} \neq 0$ si $x \in]0, \pi]$, g est \mathcal{C}^1 sur $]0, \pi]$ par opérations et $g'(x) = \frac{-\sin \frac{x}{\alpha}}{\alpha \sin \frac{x}{2}} + \left(\cos \frac{x}{\alpha} - 1 \right) \frac{-\cos \frac{x}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}}$
- c) Comme $\cos \frac{x}{\alpha} - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2\alpha^2}$, on obtient $\lim_0 g' = -\frac{2}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^2} = g'(0)$ donc g est \mathcal{C}^1 sur $[0, \pi]$
- d) Les fonctions g et \cos sont \mathcal{C}^1 sur $[0, \pi]$ donc $v_n = \left[g(x) \frac{-\cos(2n+1)\frac{x}{2}}{\frac{2n+1}{2}} \right]_0^\pi + \int_0^\pi g'(x) \frac{\cos(2n+1)\frac{x}{2}}{\frac{2n+1}{2}} dx$, donc
 $|v_n| = \frac{2}{2n+1} \left| \int_0^\pi g'(x) \cos(2n+1)\frac{x}{2} dx \right| \leq \frac{2}{2n+1} \int_0^\pi |g'(x)| dx$ par inégalité triangulaire sur les intégrales.
- e) On en déduit, par encadrement, $\lim v_n = 0$ puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$.
3. a) Avec **I.1.b**, par linéarité de l'intégrale, on a $X_n = -\frac{1}{2} \int_0^\pi \cos \frac{x}{\alpha} dx + \frac{1}{2} \int_0^\pi g_n(x) \cos \frac{x}{\alpha} dx = -\frac{\alpha}{2} \sin \frac{\pi}{\alpha} + \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{\sin \frac{2n+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}} \left(\cos \frac{x}{\alpha} - 1 + 1 \right) dx$ donc $X_n = -\frac{\alpha}{2} \sin \frac{\pi}{\alpha} + \frac{1}{2} (v_n + u_n)$
- b) Comme $\lim u_n = \pi$ et $\lim v_n = 0$ avec 1.d) et 2.e), on a $\lim X_n = -\frac{\alpha}{2} \sin \frac{\pi}{\alpha} + \frac{\pi}{2}$
- c) On a $\int_0^\pi \cos(kx) \cos \frac{x}{\alpha} dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi \left[\cos \left(k + \frac{1}{\alpha} \right) x + \cos \left(k - \frac{1}{\alpha} \right) x \right] dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin \left(k + \frac{1}{\alpha} \right) x}{k + \frac{1}{\alpha}} + \frac{\sin \left(k - \frac{1}{\alpha} \right) x}{k - \frac{1}{\alpha}} \right]_0^\pi$,
 car $k \pm \frac{1}{\alpha} \neq 0$, donc $\int_0^\pi \cos(kx) \cos \frac{x}{\alpha} dx = \frac{(-1)^k}{2} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{\alpha}}{k + \frac{1}{\alpha}} - \frac{\sin \frac{\pi}{\alpha}}{k - \frac{1}{\alpha}} \right) = \frac{(-1)^k \alpha \sin \frac{\pi}{\alpha}}{2} \left(\frac{1}{1 + k\alpha} + \frac{1}{1 - k\alpha} \right)$
- d) Avec l'expression de f_n , par linéarité de l'intégrale, on a $X_n = \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\pi}{\alpha} \sum_{k=1}^n (-1)^k \left(\frac{1}{1 + k\alpha} + \frac{1}{1 - k\alpha} \right)$

Partie II

1. a) Comme $u \mapsto \frac{1}{1+u^\alpha}$ est continue sur \mathbb{R}^+ , I_α est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^+ et $I'_\alpha(x) = \frac{1}{1+x^\alpha} > 0$ donc on en déduit
 I_α est croissante sur l'intervalle \mathbb{R}^+
- b) Si $u > 0$, on a $1 + u^\alpha \geq u^\alpha > 0$ donc $0 \leq \frac{1}{1+u^\alpha} \leq \frac{1}{u^\alpha}$ puis $I_\alpha(x) - I_\alpha(1) = \int_1^x \frac{du}{1+u^\alpha} \leq \int_1^x u^{-\alpha} du$, si $x \geq 1$
 par croissance de l'intégrale. Ce qui donne $I_\alpha(x) - I_\alpha(1) \leq \left[\frac{u^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_1^x \leq \frac{1}{\alpha-1}$ car $\alpha - 1 > 0$.

- c) I_α est croissante et majorée (sur \mathbb{R}^+) par $I_\alpha(1) + \frac{1}{\alpha - 1}$ donc I_α admet une limite finie en $+\infty$ par théorème de la limite monotone.
2. a) L'application $u \mapsto u^\alpha$ est une bijection \mathcal{C}^1 , strictement croissante de $[x^{1/\alpha}, 1]$ sur $[x, 1]$ donc par changement de variable, on a $\int_x^1 \varphi(t) dt = \int_{x^{1/\alpha}}^1 \frac{u^{\alpha(\beta-1)}}{1+u^\alpha} \alpha u^{\alpha-1} du = \alpha \int_{x^{1/\alpha}}^1 \frac{du}{1+u^\alpha}$
- b) On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/\alpha} = 0$ et I_α est continue en 0 avec 1.a) donc, par composition des limites, on a $\lim_0 J = \alpha I_\alpha(1)$
3. a) On pose cette fois $t = u^{-\alpha}$: la fonction $u \mapsto u^{-\alpha}$ est \mathcal{C}^1 bijective et strictement décroissante de $[x, 1]$ sur $[1, x^{-1/\alpha}]$ et on trouve $K(x) = \int_{x^{-1/\alpha}}^1 \frac{u^{\alpha\beta}}{1+u^{-\alpha}} (-\alpha) u^{-1-\alpha} du = -\alpha \int_{x^{-1/\alpha}}^1 \frac{du}{1+u^\alpha}$ donc on en conclut avec Chasles que $K(x) = \alpha(I_\alpha(x^{-1/\alpha}) - I_\alpha(1))$
- b) On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{-1/\alpha} = +\infty$ donc par composition des limites et 1.c), $\lim_0 K = \alpha(\lim_{+\infty} I_\alpha - I_\alpha(1))$
4. a) On a $\sigma_n(t) = \frac{1 - (-1)^{n+1} t^{n+1}}{1+t}$ (car $t \neq -1$) donc (avec $t \geq 0$) $\left| \sigma_n(t) - \frac{1}{1+t} \right| = \frac{t^{n+1}}{1+t} \leq t^{n+1}$
- b) On a $|J(x) - J_n(x)| = \left| \int_x^1 \left(\frac{1}{1+t} - \sigma_n(t) \right) t^{\beta-1} dt \right| \leq \int_x^1 \left| \frac{1}{1+t} - \sigma_n(t) \right| t^{\beta-1} dt \leq \int_x^1 t^{n+\beta} dt = \left[\frac{t^{n+\beta+1}}{n+\beta+1} \right]_x^1$,
par inégalité triangulaire et car $x < 1$; donc $|J(x) - J_n(x)| \leq \frac{1}{n+\beta+1}$
- On trouve de même, $|K(x) - K_n(x)| \leq \int_x^1 t^{n-\beta} dt \leq \frac{1}{n-\beta+1}$
- c) $J_n(x) + K_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_x^1 t^{k+\beta-1} dt + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_x^1 t^{k-\beta} dt = \sum_{k=0}^n (-1)^k \left[\frac{t^{k+\beta}}{k+\beta} \right]_x^1 + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left[\frac{t^{k+1-\beta}}{k+1-\beta} \right]_x^1$
donc $\lim_0 (J_n + K_n) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{\alpha}{1+k\alpha} + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1} \frac{\alpha}{1-(k+1)\alpha} = \alpha + \alpha \sum_{k=1}^n (-1)^k \left(\frac{1}{1+k\alpha} + \frac{1}{1-k\alpha} \right)$ ce qui donne $\lim_0 (J_n + K_n) = \alpha + \frac{2X_n}{\sin \frac{\pi}{\alpha}}$
- d) On a $\lim_0 (J + K) = \alpha \lim_{+\infty} I_\alpha$ d'après II.2 et II.3 donc, en ajoutant les deux inégalités de II.4.b et en faisant tendre x vers 0, on obtient, par inégalité triangulaire, $\left| \alpha \lim_{+\infty} I_\alpha - \alpha - \frac{2X_n}{\sin \frac{\pi}{\alpha}} \right| \leq \frac{1}{n+1+\beta} + \frac{1}{n+1-\beta}$ pour tout n donc, en faisant tendre n vers $+\infty$ cette fois, on trouve $\alpha \lim_{+\infty} I_\alpha = \alpha + \frac{2}{\sin \frac{\pi}{\alpha}} \lim X_n$, ce qui donne, avec I.3.d,

$$\lim_{+\infty} I_\alpha = \frac{\pi}{\alpha \sin \frac{\pi}{\alpha}} = \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^\alpha}$$

Exercices :

1. On raisonne par récurrence sur $n \geq 1$:

- $\sum_{k=1}^1 k^3 = 1^3 = 1$ et $\frac{1^2 2^2}{4} = 1$ donc l'égalité est vraie pour $n = 1$.
- si on suppose l'égalité vraie au rang $n \in \mathbb{N}^*$ alors on obtient $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = (n+1)^3 + \sum_{k=1}^n k^3 \stackrel{\text{HR}}{=} (n+1)^3 + \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
puis $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2}{4} [4(n+1) + n^2] = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$ donc l'égalité est vraie au rang $n+1$.

Par principe de récurrence, on a bien $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

2. a) On a $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ donc $\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$
- b) On en déduit $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} \leq 0$ donc (u_n) décroît.

De même, $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+2} + 2\sqrt{n+1} \geq 0$ et (v_n) croît.

Enfin, $0 \leq u_n - v_n = 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc (u_n) et (v_n) sont adjacentes ce qui permet de montrer qu'elles convergent vers $\ell \in \mathbb{R}$

c) $w_n = S_{4n} - S_n = u_{4n} + 4\sqrt{n} - u_n - 2\sqrt{n} = u_{4n} - u_n + 2\sqrt{n}$; de plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{4n} - u_n) = \ell - \ell = 0$ donc $\lim w_n = +\infty$ et $\frac{w_n}{2\sqrt{n}} = 1 + \frac{u_{4n} - u_n}{2\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ donc $w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$

3. a) $e^x - 1 - \ln(1+x) \underset{0}{=} \left(1+x + \frac{x^2}{2}\right) - 1 - \left(x - \frac{x^2}{2}\right) + o(x^2) = x^2 + o(x^2)$ donc $e^x - 1 - \ln(1+x) \underset{0}{\sim} x^2$

b) On en déduit $e^{x^2} - 1 - \ln(1+x^2) \underset{0}{\sim} x^4$ donc on cherche un DL₄(0) du numérateur :

$\cos(x) - (1-x^2)^{1/2} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \left(1 - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{8}x^4\right) + o(x^4) = \frac{x^4}{6} + o(x^4) \sim \frac{x^4}{6}$. Par quotient d'équivalents,

on a $\frac{\cos(x) - \sqrt{1-x^2}}{e^{x^2} - 1 - \ln(1+x^2)} \sim \frac{x^4/6}{x^4}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - \sqrt{1-x^2}}{e^{x^2} - 1 - \ln(1+x^2)} = \frac{1}{6}$

4. a) sh, ch et arctan sont \mathcal{C}^0 sur \mathbb{R} ; arccos est \mathcal{C}^0 sur $[-1, 1]$ et on a $\frac{1}{\text{ch}(x)} \in]0, 1]$ pour $x \geq 0$ donc par composition $x \mapsto \arccos \frac{1}{\text{ch}(x)}$ est \mathcal{C}^0 sur \mathbb{R}^+ et $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+)$

b) sh, ch et arctan sont \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} ; arccos est \mathcal{C}^1 sur $] -1, 1[$ et on a $\frac{1}{\text{ch}(x)} \in]0, 1[$ pour $x \neq 0$ donc par composition $x \mapsto \arccos \frac{1}{\text{ch}(x)}$ est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* et $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^*)$

c) On a $f'(x) = \frac{\text{ch}(x)}{1 + \text{sh}^2(x)} - \frac{-\text{sh}(x)}{\text{ch}^2(x)} \times \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\text{ch}^2(x)}}} = \frac{\text{ch}(x)}{\text{ch}^2(x)} - \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}^2(x)} \times \frac{|\text{ch}(x)|}{\sqrt{\text{ch}^2(x) - 1}}$ puis $(\text{ch}^2 - \text{sh}^2 = 1)$

$f'(x) = \frac{1}{\text{ch}(x)} - \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)} \times \frac{1}{\sqrt{\text{sh}^2(x)}} = 0$ et $\sqrt{\text{sh}^2(x)} = |\text{sh}(x)|$. On en déduit $f'(x) = 0$ si $x > 0$ et $f'(x) = \frac{2}{\text{ch } x}$ si $x < 0$.

d) Comme \mathbb{R}^{+*} est un intervalle, on en déduit que f est constante sur \mathbb{R}^{+*} donc sur \mathbb{R}^+ par continuité en 0. Comme $f(0) = -\arccos(1) = 0$, on en déduit $f = 0$ sur \mathbb{R}^+ . On en déduit $\forall x \geq 0, \arctan(\text{sh } x) = \arccos\left(\frac{1}{\text{ch } x}\right)$. Enfin, comme $x \mapsto \arctan(\text{sh } x)$ est impaire et $x \mapsto \arccos\left(\frac{1}{\text{ch } x}\right)$ est paire, on a $\arctan(\text{sh } x) = -\arccos\left(\frac{1}{\text{ch } x}\right)$, pour $x < 0$.

5. a) $f(x+2) = [x+2] - \left[\frac{x}{2} + 1\right] - \left[\frac{x+1}{2} + 1\right] = [x] + 2 - \left[\frac{x}{2}\right] - 1 - \left[\frac{x+1}{2}\right] - 1 = f(x)$ car 1 et 2 sont des entiers. Ainsi f est 2-périodique

b) Si $x \in [0, 1[$, on a $f(x) = 0 - 0 - 0 = 0$ et si $x \in [1, 2[$, $f(x) = 1 - 0 - 1 = 0$. Ainsi, f est nulle sur $[0, 2[$ donc sur \mathbb{R} par 2-périodicité, ce qui donne $\forall x \in \mathbb{R}, [x] = \left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x+1}{2}\right]$

6. Les solutions de l'équation homogène $y' - \tan(x)y = 0$ sont de la forme $y(x) = \alpha \exp(-\ln|\cos(x)|) = \frac{\alpha}{\cos(x)}$ avec une constante $\alpha \in \mathbb{R}$.

On peut remarquer qu'une solution particulière de l'équation complète est $y_p(x) = \tan(x)$ (que l'on peut aussi déterminer par variation de la constante, ie en la cherchant sous la forme $y_p(x) = \frac{\lambda(x)}{\cos(x)}$ avec λ dérivable)

Les solutions sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ de l'équation complète sont donc définies par $y(x) = \frac{\alpha}{\cos(x)} + \tan(x)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$

7. a) $P(1) = 3 - \alpha$ donc $P(1) = 0$ si et seulement si $\alpha = 3$

b) On vérifie $P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$ et $P'''(1) \neq 0$ donc 1 est racine triple de P

c) Après calculs, on trouve $P = (X-1)^3(X^3 + X + 1)$

d) On a $X^3 + X + 1 = (X-x_1)(X-x_2)(X-x_3)$ (racines éventuellement complexes) donc $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ (examiner le coefficient de X^2) et $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3}{x_1x_2x_3} = \frac{1}{-1} = -1$ (avec les coefficients de X et constant cette fois)

8. a) On résout le système linéaire $\begin{cases} x - y + z - t = 0 \\ x + y + 2z - 3t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z - t = 0 \\ 2y + z - 2t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2t - 2y \\ x = 3y - t \end{cases}$ donc on en déduit $u \in F \Leftrightarrow \exists(y, t) \in \mathbb{R}^2, u = (3y - t, y, 2t - 2y, t) = y(3, 1, -2, 0) + t(-1, 0, 2, 1)$ puis, par définition d'une combinaison linéaire, $F = \text{Vect}\{(3, 1, -2, 0), (-1, 0, 2, 1)\}$. Les deux vecteurs $(3, 1, -2, 0)$ et $(-1, 0, 2, 1)$ sont linéairement indépendants car non colinéaires donc constituent une base de F et $\boxed{\dim(F) = 2}$

b) Si on écrit P sous la forme $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ alors $P \in G \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ d = -a - b \end{cases}$ donc $P \in G \Leftrightarrow \exists(a, b) \in \mathbb{R}^2, P = aX^3 + bX^2 - a - b = a(X^3 - 1) + b(X^2 - 1)$ puis $G = \text{Vect}\{X^3 - 1, X^2 - 1\}$. La famille $(X^3 - 1, X^2 - 1)$ est libre (polynômes de degrés étagés) donc constitue une base de G et $\boxed{\dim(G) = 2}$

9. a) $\boxed{u(x, y, z) = (2x - y + 2z, x + 2z, -2x + 2y - 3z)}$

b) $w = (x, y, z) \in \ker(u - id) \Leftrightarrow x - y + 2z = 0$ donc $w = (y - 2z, y, z) = y(1, 1, 0) + z(-2, 0, 1)$; il suffit donc de prendre $\boxed{w_1 = (1, 1, 0)}$ et $\boxed{w_2 = (-2, 0, 1)}$ par exemple.

De même $w = (x, y, z) \in \ker(u - id) \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - y + 2z = 0 \\ x + 3y + 2z = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$ donc $w = (x, x, -2x)$, ie

$w = x(1, 1, -2)$ donc il suffit de prendre $\boxed{w_3 = (1, 1, -2)}$

c) $\det_{\mathcal{B}_c}(w_1, w_2, w_3) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$ donc $\boxed{\mathcal{B}$ est une base de \mathbb{R}^3 }

Comme $u(w_1) = w_1, u(w_2) = w_2$ et $u(w_3) = 3w_3$, on a $\boxed{D = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$

d) $\boxed{M = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

e) On a $M^n = PD^nP^{-1}$ avec $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$. On vérifie alors que $M^n = a_n I_3 + b_n M = P(a_n I_3 + b_n D)P^{-1}$

si et seulement si $aI_3 + bD = D^n$. On cherche donc a_n, b_n de sorte que $\begin{cases} a_n + b_n = 1 \\ a_n + 3b_n = 3^n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_n = \frac{3 - 3^n}{2} \\ b_n = \frac{3^n - 1}{2} \end{cases}$

On a donc $\boxed{M^n = \frac{3 - 3^n}{2} I_3 + \frac{3^n - 1}{2} M}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

10. a) En développant par la première colonne, on a $D_n = \alpha D_{n-1} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \alpha & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \alpha & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \alpha \end{vmatrix}_{n-1}$ donc en développant

de dernier déterminant par sa première ligne, on trouve $\boxed{D_n = \alpha D_{n-1} - D_{n-2}}$

b) La suite $(D_n)_{n \geq 1}$ vérifie une relation de récurrence linéaire à deux termes dont l'équation caractéristique est la suivante : $X^2 - 2X \cos \theta + 1 = 0$; $\Delta = 4(\cos^2 \theta - 1) = -4 \sin^2 \theta < 0$ car $\theta \in]0, \pi[$. Les racines de cette équation sont donc $X = \cos \theta \pm i \sin \theta = e^{\pm i \theta}$. Ainsi il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que, pour $n \geq 1$, on ait $D_n = a \cos(n\theta) + b \sin(n\theta)$; on trouve alors a et b à partir de $D_1 = 2 \cos \theta$ et $D_2 = 4 \cos^2 \theta - 1$. Ainsi a et b sont solutions de $\begin{cases} a \cos \theta + b \sin \theta = 2 \cos \theta \\ a \cos 2\theta + b \sin 2\theta = 4 \cos^2 \theta - 1 \end{cases}$; comme $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$, on en déduit (avec

$2 \cos \theta L_1 - L_2$) l'égalité $a(2 \cos^2 \theta - \cos 2\theta) = 1$ donc $a = 1$ puis $b = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$ (avec $\sin \theta > 0$ car $\theta \in]0, \pi[$). On

déduit donc $D_n = \cos(n\theta) + \frac{\cos \theta \sin(n\theta)}{\sin \theta}$ donc $\boxed{D_n = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}}$

c) A_n est inversible si et seulement si $D_n \neq 0$ donc si et seulement si $(n+1)\theta \notin \pi \mathbb{Z}$ ce qui donne la condition

nécessaire et suffisante $\boxed{\theta \neq \frac{k\pi}{n+1}}$ avec $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$