# ÉNONCÉS EXERCICES CORRIGÉS 1 INTÉGRALES

## 1.1 Intégrales sur un segment et développements limités

**1.1** Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ continue telle que : $\forall x \in [a;b],\ f(a+b-x) = f(x)$.

Calculer $\displaystyle\int_a^b x f(x)dx$ en fonction de $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$. Application : calculer $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

**1.2** Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{1/n}$

**1.3** Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos\alpha\cos x + 1}dx$ pour $\alpha \in [0;\pi[$.

**1.4** On pose, pour $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, $J(p,q) = \displaystyle\int_0^1 x^p(1-x)^q dx$.

**a.** Pour $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, trouver une relation entre $J(p,q)$ et $J(q,p)$, puis entre $J(p+1,q)$ et $J(p,q+1)$.
**b.** Calculer $J(p,0)$ pour $p \in \mathbb{N}$ ; en déduire, pour $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, $J(p,q)$.

**1.5** Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue et positive telle que : $\exists k \geqslant 0,\ \forall t > 0,\ f(t) \leqslant k\displaystyle\int_0^t f(u)du$. On pose, pour $t \geqslant 0$, $F(t) = \displaystyle\int_0^t f(u)du$ ; montrer que $t \to e^{-kt}F(t)$ est décroissante. Que peut-on en déduire sur $F$ ? Et sur $f$ ?

**1.6** <u>*CCP PSI 2007 d'après RMS*</u> Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^{x\ln x}$.

**1.7** <u>*Mines PSI 2011 d'après RMS*</u> Soit $(p,n) \in \mathbb{N}^2$ avec $1 \leqslant p \leqslant n$.

En écrivant de deux façons le $DL_n(0)$ $x \mapsto (e^x-1)^n$ en 0, montrer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^p = \delta_{p,n}\, n!$.

**1.8** <u>*ENSIIE PSI 2008 d'après RMS*</u> Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ dérivable, strictement croissante et telle que $f(0) = 0$.

**a.** Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $x\,f(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt$.

**b.** En déduire : $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2$, $xy \leqslant \displaystyle\int_0^x f(t)dt + \int_0^y f^{-1}(t)dt$. Cas d'égalité ?

**1.9** <u>*CCP PSI 2008 d'après RMS*</u>

**a.** Justifier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+x^2+x+1}}$.

**b.** Donner un équivalent en $+\infty$ de $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{x^3+x^2+x+1}}$ puis de $\displaystyle\int_n^{2n} \frac{dx}{\sqrt{x^3+x^2+x+1}}$.

**1.10** Existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$ et équivalent de $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$ quand $x$ tend vers $+\infty$.

**1.11** <u>*Compléments OdlT 2016/2017 Centrale PSI planche 208*</u>

Montrer que si $\alpha > 1$, la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n+k)^\alpha}$, définie pour $n \in \mathbb{N}^*$, converge vers $0$.
Discuter de la limite de la suite suivant $\alpha$ quelconque.

**1.12** *Compléments OdlT 2016/2017 EIVP PSI planche 528I abordable dès la 1re année*

On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [n; +\infty[$, $g_n(x) = \displaystyle\int_n^x e^{t^2}\,dt$. Montrer que $\forall n \geqslant 1$, $\exists! x_n > n$, $g_n(x_n) = 1$.

Montrer que $n \leqslant x_n \leqslant n+1$ puis que $0 \leqslant x_n - n \leqslant e^{-n^2}$ ; qu'en déduit-on ?

**1.13** *Compléments OdlT 2016/2017 EIVP PSI planche 533II*

Pour $n > 0$, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^e \ln^n(t)\,dt$ et $a_n = (-1)^n (n!) \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.
Trouver une relation entre $I_n$ et $I_{n+1}$. Déterminer $b_n$ tel que $I_n = e a_n + b_n$ et en déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

## 1.2 Fonctions intégrables

**1.14** Étudier l'existence de $I_{\alpha,\beta} = \displaystyle\int_0^1 \frac{|\ln(t)|^\beta\,dt}{(t-t^2)^\alpha}$ selon les valeurs de $\alpha$ et $\beta$.

**1.15** Étudier selon les valeurs de $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ l'intégrabilité sur $[1; +\infty[$ de la fonction $f_{x,y} : t \mapsto \dfrac{\ln(1+t^x e^{-ty})}{1+t^x}$.

**1.16** *Mines PSI 2008 d'après RMS* Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Existence et calcul de $\displaystyle\int_a^b \ln\left(\frac{b-t}{t-a}\right)dt$.

**1.17** *Mines PSI 2008 d'après RMS* Donner le domaine de définition, puis calculer : $p \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^{2p+1}+1}}$.

**1.18** Étudier l'existence de $I_{\alpha,\beta} = \displaystyle\int_0^1 |1-t^\alpha|^\beta\,dt$ selon les valeurs de $\alpha$ et $\beta$.

**1.19** Étudier l'existence de $I_{\alpha,\beta} = \displaystyle\int_0^1 \frac{|\ln(t)|^\beta\,dt}{(t-t^2)^\alpha}$ selon les valeurs de $\alpha$ et $\beta$.

**1.20** *Centrale PSI 2012* Étudier l'existence de $I_{\alpha,\beta} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t^\alpha)\,dt}{t^\beta}$ selon les valeurs de $\alpha$ et $\beta$.

**1.21** *CCP PSI 2008 d'après RMS* Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. L'application $x \mapsto \dfrac{1-\operatorname{th} x}{x^\alpha}$ est-elle intégrable sur $]0; +\infty[$ ?

**1.22** Existence et calcul de $I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\ln(t)}{(1+t^2)^2}\,dt$ et de $I_2 = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t\ln(t)}{(1+t^2)^2}\,dt$.

**1.23** Existence et calcul de $I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{(1+t)^2}\,dt$ et de $I_2 = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{(1+t)^2}\,dt$.

**1.24** *Centrale PSI 2012* Existence et calcul de $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta)\ln\big(\tan(\theta)\big)\,d\theta$

**1.25** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ intégrable. On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $\widehat{f}(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-ixt}\,dt$.
**a.** Justifier que $\hat{f}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$. Calculer $\widehat{h}$ si $h : t \to e^{-|t|}$.
**b.** Si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sont intégrables et bornées, justifier l'existence, pour $x \in \mathbb{R}$ de $(f*g)(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)\,dt$ (produit de convolution). Calculer $(h*h)(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
**c.** On admet pouvoir intervertir à loisir les 2 variables d'intégration..., "établir" : $\widehat{(f*g)}(x) = \widehat{f}(x) \times \widehat{g}(x)$.

**1.26** Établir que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3+1} = \int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{x^3+1}$. En déduire la valeur exacte de I.

**1.27** Existence et calcul de $\displaystyle\int_{]0;1]} \left(\frac{1}{t} - \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor\right)dt$.

**1.28** *Compléments OdlT 2016/2017 Mines PSI planche 101II*

Existence de $I_\alpha = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1+\tan^\alpha(t)}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ (on pourra faire deux changements de variable). Commenter le choix de $\alpha$.

**1.29** *Compléments OdlT 2016/2017 Mines PSI planche 102I*

Soit $f$ de classe $C^\infty$ de $[a;b]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $f \geqslant 0 \iff \forall g \in C^\infty([a;b], \mathbb{R}_+), \int_a^b fg \geqslant 0$.

En déduire que $f > 0 \iff \exists m \in \mathbb{R}_+^*, \forall g \in C^\infty([a;b], \mathbb{R}_+^*), \int_a^b fg > m \int_a^b g$.

**1.30** *Compléments OdlT 2016/2017 ENSAM PSI planche 521II et compléments Mines-Télécom PSI 550II*

Existence et calcul de $I = \int_a^b \frac{dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}}$.

**1.31** *Compléments OdlT 2016/2017 Mines-Télécom PSI planche 566II abordable dès la 1re année incomplet*

Montrer que $I = \int_0^\pi \frac{dx}{1+\sin^2 x} = 2\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin^2 x}$ puis la calculer.

**1.32** *Classique* **a.** Justifier l'existence de $I = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)} dt$.

**b.** Montrer que $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x} dx$. Séparez cette intégrale en deux pour trouver $I$.

**1.33** Étudier l'existence de $I_{\alpha,\beta} = \int_0^1 |1-t^\alpha|^\beta dt$ selon les valeurs des réels $\alpha$ et $\beta$.

**1.34** Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \ln(t) + a\ln(t+1) + c\ln(t+2)$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $(a,b)$ pour que $\int_0^{+\infty} f$ converge et calculer alors la valeur exacte de cette intégrale.

**1.35** *Centrale PSI 2013* Déterminer un équivalent de $u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)+\cos^2(n)}$ $(n \geqslant 2)$ quand $n \to +\infty$.

## 1.3 Intégrales impropres convergentes

**1.36** *Centrale PSI 2013* Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{1}{n^a}\int_0^n \frac{\text{Arctan}(t)}{t^b} dt$ quand elle existe.

**a.** Déterminer les réels $b$ tels que $u_n$ existe pour tout entier $n \geqslant 1$.

**b.** Dans les cas précédents, déterminer la nature de la série numérique $\sum_{n\geqslant 1} u_n$.

**1.37** *Intégrale de* Dirichlet Soit $\varphi : [0;\pi] \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in ]0;\pi]$, $\varphi(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sin(x/2)}$ et $\varphi(0) = 0$.

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \frac{\sin(t)}{t}$ et $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ pour $x > 0$.

**a.** Montrer que $\varphi$ est de classe $C^1$ sur $[0;\pi]$.

**b.** Justifier que $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge. On note I sa valeur.

**c.** Montrer que la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est constante si $I_n = \int_0^\pi \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} dx$.

**d.** Trouver une relation entre $F\left((n+\frac{1}{2})\pi\right)$, $\varphi$ et $I_n$.

**e.** En se rappelant le lemme de LEBESGUE, déterminer la valeur exacte de I.

**1.38** Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \dfrac{\sin^3 t}{t^2}$. On pose $I(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)dt$.

**a.** Justifier l'existence $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$. On note $I$ sa valeur.

**b.** Exprimer $\sin^3 t$ en fonction de $\sin t$ et $\sin(3t)$.

**c.** Montrer que $I(x) = \dfrac{3}{4}\displaystyle\int_x^{3x} \dfrac{\sin t}{t^2}dt$.

**d.** Justifier que $\psi : t \mapsto \dfrac{\sin t}{t^2} - \dfrac{1}{t}$ est bornée au voisinage de $0$. En déduire la valeur exacte de $I$.

**1.39** *Intégrales de* Gauss Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt$ et $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2}(\sin\theta)^n d\theta$ pour $n \geqslant 0$.

**a.** Justifier que $f$ est bien définie, de classe $C^\infty$, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et qu'elle admet une limite finie en $+\infty$ qu'on note $I$ et qu'on appelle intégrale de Gauss.

**b.** Établir que $\forall x > -1,\ \ln(1+x) \leqslant x$. Puis que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [0; \sqrt{n}],\ :\ \left(1 - \dfrac{t^2}{n}\right)^n \leqslant e^{-t^2} \leqslant \dfrac{1}{\left(1 + \dfrac{t^2}{n}\right)^n}$.

**c.** Prouver : $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt = \sqrt{n}\, I_{2n+1}$ à l'aide du changement de variable à justifier $t = \sqrt{n}\cos(\theta)$.

**d.** À l'aide d'un changement de variable à trouver et à justifier, prouver que :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{\left(1 + \dfrac{t^2}{n}\right)^n}dt = \int_{\pi/2}^{\pi/4} \sin^{2n}(\theta) \times \left(\frac{-\sqrt{n}}{\sin^2(\theta)}\right)d\theta \leqslant \sqrt{n}\, I_{2n-2}\,.$$

**e.** Déduire de ce qui précède et de l'équivalent classique des intégrales de Wallis la valeur exacte de $I$.

**1.40** *Centrale PSI 2013*

Soit $f : [1\,; +\infty[ \to \mathbb{R}_+$ continue, décroissante et telle que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge.

**a.** Montrer que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} xf(x) = 0$. En déduire l'existence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} x\big(f(x) - f(x+1)\big)dx$ et calculer sa valeur.

**b.** Déterminer, pour $\alpha > 1$, la valeur de $\displaystyle\int_1^{+\infty} x\left(\frac{1}{x^\alpha} - \frac{1}{(x+1)^\alpha}\right)dx$.

**1.41** Montrer l'existence de $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}dx$ et déterminer sa valeur exacte par les changements de variable $x = \sin(\theta)$ puis $t = \tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ et enfin par IPP.

## 1.4 Exercices aux oraux des étudiants de PSI1

**1.42** *Mines PSI 2013* Jordan Diby I

Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer qu'il existe un unique réel $y$ tel que $\displaystyle\int_x^y e^{t^2}dt = 1$.

On pose alors $y = f(x)$ ce qui définit $f$. Étudier $f$.

**1.43** *Centrale PSI 2013* Mathieu Brandy

Soit $F : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par : $F(x) = \displaystyle\int_0^{1/x} \frac{dt}{x + \sin^2(t)}$.

**a.** Montrer que $F$ est bien définie, étudier sa monotonie.

**b.** Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} F(x)$. Puis $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} F(x)$.

**c.** Donner un équivalent simple de $F(x)$ lorsque $x$ tend vers $0$.

Indication : on pourra utiliser le changement de variable $u = \tan(t)$ sur des intervalles convenables.

**1.44** *Centrale PSI 2014 et CCP PSI 2014* Tanguy Cazalets et Nicolas Bourbon

Pour $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue, de carré intégrable, on définit $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$.

**a.** $g$ est-elle prolongeable en $0$ ? Soit $0 < a < b$, établir une relation entre $\int_a^b g(t)^2 dt$ et $\int_a^b f(t)g(t)dt$.

**b.** Établir dans un premier temps que $\int_a^b g(t)^2 dt \leqslant ag(a)^2 + 2\sqrt{\int_a^b g(t)^2 dt \int_0^{+\infty} f(t)^2 dt}$ puis en déduire ensuite la nouvelle majoration : $\sqrt{\int_a^b g(t)^2 dt} \leqslant \sqrt{\int_0^{+\infty} f(t)^2 dt} + \sqrt{ag(a)^2 + \int_0^{+\infty} f(t)^2 dt}$.

**c.** Montrer que $g^2$ et $fg$ sont intégrables. Trouver une inégalité entre $\int_0^{+\infty} g(t)^2 dt$ et $\int_0^{+\infty} f(t)^2 dt$. Déterminer aussi une relation simple entre $\int_0^{+\infty} g(t)^2 dt$ et $\int_0^{+\infty} f(t)g(t)dt$.

**1.45** *Centrale PSI 2015* Agatha Courtenay

Soit $a \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Soit $f$ une solution sur $\mathbb{R}_+$ de l'équation $(E)$ : $y'' + (1 + a)y = 0$. Posons $g : x \mapsto f(x) + \int_0^x \sin(x - t)a(t)f(t)dt$.

**a.** Est-ce que $\lim_{x\to+\infty} a(x) = 0$ ?

**b.** Montrer que $g'' + g = 0$.

**c.** Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $|f(x)| \leqslant C + \int_0^x |a(t)f(t)|dt$.

**d.** Conclure quant aux solutions de $(E)$ sur $\mathbb{R}_+$.

**1.46** *Centrale PSI 2015* Marie Trarieux

On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit $I(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t}}{\sqrt{t}} dt$ et $J(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t}}{\sqrt{t}} dt$.

**a.** Quelles sont les valeurs de $\alpha$ telles que $I(\alpha)$ converge ? Et pour $J(\alpha)$ ?

**b.** Calculer $J(\alpha)$. Donner un équivalent en l'infini pour $I(\alpha)$.

**1.47** *CCP PSI 2015* Marin de Bonnières

Soit $E = C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Si $f \in E$, soit $u(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ u(f)(x) = \int_0^x \cos(x - t)f(t)dt$.

**a.** Montrer que $u$ est un endomorphisme de $E$.

**b.** $u$ est-elle surjective ?

**c.** Étudier le noyau de $u$.

**1.48** *CCP PSI 2015* Arthur Lacombe

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue telle qu'il existe $C > 0$ et $a \in \mathbb{R}$ qui vérifient : $\forall t \geqslant 0,\ |f(t)| \leqslant Ce^{at}$.

**a.** Montrer que : $\forall x > a,\ F(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt$ converge.

**b.** On suppose ici que $a \leqslant 0$ et que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$, montrer que $\lim_{x\to 0^+} xF(x) = 1$.

**1.49** *E3A PSI 2015* Charlotte Sapaly

Existence et calcul de $I = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan(x)}dx$. Indication : poser $\tan(x) = u^2$.

**1.50** *ENS Cachan PSI 2016* Charly Castes

Soit $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction décroissante continue par morceaux telle que $\int_0^{+\infty} h(t)dt$ converge.

**a.** Montrer que $h$ est à valeurs positives.

**b.** Montrer que $\sum_{n\geqslant 0} h(nt)$ converge pour tout réel $t > 0$.

**1.51** *Centrale PSI 2016* Émilien Ouzeri

Étudier la convergence simple et absolue de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t\ln(1+t)}dt$.

**1.52** *Centrale PSI 2016* Marine Saint-Mézard

Soit $a$ et $b$ des réels tels que $a < b$ et $f$ une fonction de classe $C^1$ sur $[a; b]$.

On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $I_n = \int_a^b f(t)\sin(nt)dt$.

**a.** Montrer que cette suite tend vers $0$.

**b.** Montrer l'existence de $A = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$. On admettra que cette intégrale vaut $\frac{\pi}{2}$.

**c.** On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $J_n = \frac{1}{n}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(nt)^2}{\sin(t)^2}dt$.

Montrer que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien définie. Calcul de son éventuelle limite.

**1.53** *Mines PSI 2016* Owain Biddulph III

Soit $f : x \mapsto \mathrm{Arctan}\left(\frac{1-\sin(x)}{1+\sin(x)}\right)$.

**a.** Domaine de définition de $f$.

**b.** Donner une expression simplifiée de $f$.

**1.54** *Mines PSI 2016* Pauline Bourda, Marie Rebière et Sébastien Sequeira I

Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt$.

**a.** Montrer que $f$ est bien définie et dérivable sur $I = \mathbb{R}_+^*$. Donner l'expression de $f'(x)$.

**b.** Donner des équivalents simples de $f(x)$ quand $x$ tend vers $0$ et quand $x$ tend vers $+\infty$.

**c.** Montrer que $f$ est intégrable sur $I$ et calculer $\int_0^{+\infty} f(x)dx$.

**1.55** *Mines PSI 2016* Matthieu Cadiot I

Montrer que l'équation $(E)\ :\ y' - y = \frac{1}{x}$ admet une unique solution bornée sur $[1; +\infty[$.

**1.56** *Mines PSI 2016* Arthur Robbe I

Soit $p \in \mathbb{R}_+$, montrer que : $\left(\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2,\ |x^p - y^p| \leqslant |x-y|^p\right) \iff p \leqslant 1$.

**1.57** *CCP PSI 2016* Rogelio Escalona I

Soit $f : [0; 1] \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$ telle que $f(1) = 0$. Montrer que $\int_0^1 f(t)^2dt \leqslant 4\int_0^1 t^2 f'(t)^2dt$.

**1.58** *Centrale PSI 2017* Élio Garnaoui

Soit $h > 0$, on définit l'ensemble $W_h = \left\{ f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R},\ \int_{x+h}^{x+2h} f(t)dt = 2\int_x^{x+h} f(t)dt \right\}$.

**a.** Montrer que $W_h$ est un espace vectoriel non réduit à $\{0\}$.

**a.** $W_h$ est-il de dimension finie ?

**c.** Montrer que $\bigcap_{h>0} W_h = \{0\}$.

Question de cours : inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, preuve et cas d'égalité.

**1.59** *Mines PSI 2017* Manon Bové I

Résoudre l'équation $(E)$ : $\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{1-x}\right) + \mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{1+x}\right) = \frac{\pi}{2}$.

**1.60** *Mines PSI 2017* Adrien Cassagne I

Existence et calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{th}\,(3x) - \mathrm{th}\,(2x)}{x} dx$.

**1.61** *Mines PSI 2017* Alexandre Chamley II

On définit $f$ par $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$. Justifier que $f$ se prolonge par continuité en $0$ et en $1$.

Tracer le graphe de $f$. Montrer l'existence et trouver la valeur de $\int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)} dx$.

**1.62** *Mines PSI 2017* Bastien Lamagnère II

Soit $\alpha > 1$ et $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{C}$ définie par $f(x) = \frac{(\ln(x))^\alpha}{x} e^{i\ln(x)}$.

**a.** Que dire de la convergence de $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ ?

**b.** Que dire de la nature de $\sum_{n \geqslant 1} f(n)$ ?

**1.63** *Mines PSI 2017* Clément Maurel II

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue telle que $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge. Montrer que $\int_0^x tf(t)dt \underset{+\infty}{=} o(x)$.

**1.64** *Mines PSI 2017* Grégoire Verdès II

Soit $f(x) = \int_0^1 \frac{dt}{x^3 + t^3}$.

**a.** Déterminer le domaine de définition de $f$.

**b.** Trouver la limite, puis un équivalent de $f$ en $+\infty$.

**c.** Trouver la limite, puis un équivalent de $f$ en $-1$.

**1.65** *CCP PSI 2017* Maxime Lacourcelle II

Soit $E$ l'espace des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et $2\pi$-périodiques.

On pose $c(f) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)dt$ et $g : t \mapsto f(t) - c(f)$ si $f \in E$.

**a.** Étudier la convergence, pour $\alpha > 1$ et $f \in E$, de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t^\alpha}dt$.

**b.** Si $f \in E$, montrer que $f$ a ses primitives $2\pi$-périodiques si et seulement si $c(f) = 0$.

**c.** Si $f \in E$, est-ce que $g \in E$ ? Calculer $c(g)$.

**d.** Montrer la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{g(t)}{t}dt$.

**e.** Trouver, si $c(f) \neq 0$, un équivalent en $+\infty$ de $\displaystyle\int_1^x \frac{f(t)}{t}dt$.

**f.** Déduire des questions précédentes la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}dt$.

**1.66** *E3A PSI 2017* Élio Garnaoui

Pour tout entier $n$, on note $u_n = \displaystyle\int_0^1 (\ln(1+t))^n dt$.

**a.** Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

**b.** Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

**c.** Trouver une relation entre $u_n$ et $u_{n+1}$.

**d.** Montrer que $(n+1)u_n \leqslant 2\ln^{n+1}(2) \leqslant (n+2)u_n$.

**e.** Trouver un équivalent de $u_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

**f.** Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{u_n}{\ln^n(2)}$.

**1.67** *ENS Ulm/Cachan PSI 2018* Cassandra Dailledouze

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $\forall t \in \mathbb{R},\ tf'(t) = f(t) - f(t-1)$.

**a.** Montrer que $f$ est $C^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ et que $\forall t \geqslant 1,\ f(t) = t\Big[f(1) - \displaystyle\int_1^t s^{-2}f(s-1)ds\Big]$.

On suppose dorénavant que $\displaystyle\int_1^{+\infty} u^{-2}f(u-1)du$ converge.

**b.** Montrer que $f(t) = t\displaystyle\int_t^{+\infty} s^{-2}f(s-1)ds$.

**c.** Calculer $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f'(t)$. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N},\ \displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^k f'(t) = 0$.

**d.** Montrer que $f$ possède une limite $\ell$ en $+\infty$ et que $\forall k \in \mathbb{N},\ \displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^k(f(t) - \ell) = 0$.

**1.68** *Mines PSI 2018* Colin Baumgard et Marion Lebrun I

Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt$.

**a.** Montrer que $f$ est bien définie et dérivable sur $I = \mathbb{R}_+^*$. Donner l'expression de $f'(x)$.

**b.** Donner des équivalents simples de $f(x)$ quand $x$ tend vers $0$ et quand $x$ tend vers $+\infty$.

**c.** Montrer que $f$ est intégrable sur $I$ et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$.

**1.69** *Mines PSI 2018* Victor Bourdeaud'hui II

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{(n!)^{1/n}}$.

**1.70** *Mines PSI 2018* Maëlle Casas I

Soit $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x \in [0;1],\ f(x) > 0$.

**a.** Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une subdivision $\sigma_n = (x_0 = 0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 1)$ telle que $\forall k \in [\![1;n]\!],\ \displaystyle\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)dt = \frac{A}{n}$ avec $A = \displaystyle\int_0^1 f$.

**b.** Soit $g : [0;1] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} g(x_k)$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{\int_0^1 fg}{\int_0^1 f}$.

**1.71** *Mines PSI 2018* Mathilde Dutreuilh I

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $D_n(x) = \dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(kx)$.

**a.** Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z},\ D_n(x) = \dfrac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$.

**b.** Montrer que $\forall \varphi \in C^1([0;\pi], \mathbb{R}),\ \lim\limits_{\lambda\to+\infty} \displaystyle\int_0^{\pi} \varphi(t)\sin(\lambda t)dt = 0$.

**c.** Écrire $\displaystyle\int_0^{\pi} xD_{2n}(x)dx$ sous la forme d'une somme et en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

**1.72** *Mines PSI 2018* Adrien Sarrade I

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \dfrac{1}{n}\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(k+n)\right)^{\frac{1}{n}}$.

**a.** Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge et déterminer sa limite $\ell$.

**b.** Trouver un équivalent de $u_n - \ell$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

**1.73** *Mines PSI 2018* Nicolas Ziegler II

On définit, pour tout $x > 0$, le réel $F(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$.

**a.** Montrer que $F$ est bien définie et de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

**b.** Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} F(x)dx$ converge et déterminer sa valeur.

**1.74** *CCP PSI 2018* Mathilde Dutreuilh I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

**a.** Déterminer un équivalent simple de $S_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

**b.** Proposer une autre méthode pour trouver cet équivalent.

**1.75** *CCP PSI 2018* Adrien Sarrade II

On définit le réel $\alpha = \ln(1+\sqrt{2})$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le réel $I_n = \int_0^{\alpha} (\operatorname{sh} t)^n \,dt$.

**a.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\operatorname{sh}(x) = 1$.

**b.** Trouver la limite de la suite $(I_n)_{n \geqslant 0}$.

**c.** Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$.

**d.** Montrer que $\forall n \geqslant 2,\ nI_n + (n-1)I_{n-2} = \sqrt{2}$.

**e.** En déduire un équivalent de $I_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

**1.76** *E3A PSI 2018* Peio Betbeder

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2}\,dx$.

**a.** Calculer $I_0$ et $I_1$. Étudier le sens de variation de $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

**b.** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = \dfrac{n}{3} \int_0^1 x^{n-1}(1-x^2)^{3/2}\,dx$. En déduire une relation entre $I_{n+1}$ et $I_{n-1}$.

**c.** Montrer que $\forall n \geqslant 1,\ 0 < \dfrac{n}{n+3} I_{n-1} < I_n < I_{n-1}$. En déduire que $I_n \underset{+\infty}{\sim} I_{n-1}$.

On pose, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, le réel $u_n = n(n+1)(n+2)I_n I_{n-1}$.

**d.** Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante. En déduire que $I_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}\sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

**1.77** *E3A PSI 2018* Julien Langlais

Soit $(k,n) \in \mathbb{N}^*$ avec $k \leqslant n$, on définit $f[0;1] \to \mathbb{R}$ par $f(x) = \dbinom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$.

**a.** Justifier que $f$ est un polynôme. Donner son coefficient dominant et son degré.

**b.** Étudier $f$ sur $[0;1]$. Trouver une symétrie de son graphe pour $n = 2k$.

**c.** Déterminer un équivalent de $f(x)$ quand $x \in ]0;1[$ et $n$ tend vers $+\infty$. Et si $k$ tend vers $+\infty$ ?

**d.** Calculer $I_{n,k} = \int_0^1 f(x)\,dx$.

**1.78** *Petites Mines PSI 2018* Baptiste Egreteau I

Existence et signe de $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2 - \pi t}\,dt$.

**1.79** *ICNA PSI 2018* Quentin Meynieu I

Soit $F$ définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{x^2 + t^2}\,dt$.

**a.** Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_F$ de $F$.

**b.** Calculer $F(1)$. Indication : on pourra poser $u = \dfrac{1}{t}$.

**c.** En déduire la valeur de $F(x)$ pour $x \in \mathcal{D}_F$.

**1.80** *Centrale Maths1 PSI 2019* Carla Chevillard

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(nt)}{\sin(t)}\,dt$.

**a.** Montrer que $J_n$ est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Calculer $J_0$, $J_1$, $J_2$, $J_3$.

**b.** Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $J_{n+2} - J_n$ en fonction de $n$. En déduire une expression de $J_n$.

**c.** Soit $f \in C^1([a;b], \mathbb{R})$. Montrer que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_a^b f(t)\cos(xt)\,dt = 0$.

**d.** Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} (J_{n+1} - J_n)$. En déduire la nature de la suite $(J_n)_{n \geqslant 0}$.

**1.81** *Centrale Maths1 PSI 2019* Pierre Fabre

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n}$.

**a.** Déterminer des équivalents de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et de $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ en $+\infty$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \underset{+\infty}{=} O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$.

**b.** Montrer que $u_n$ existe pour tout entier $n \geqslant 1$.

**c.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer une relation entre $u_n$ et $u_{n+1}$.

**d.** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $v_n = \alpha \ln(n) + \ln(u_n)$ pour $n \geqslant 1$. Déterminer la valeur de $\alpha$ pour que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell$. Donner un équivalent de $u_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

**1.82** *Mines PSI 2019* Axel Brulavoine I

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\frac{1}{n^a}\int_0^{n} \frac{\mathrm{Arctan}(t)}{t^b}dt$.

**a.** Si $b > 0$ et $b \neq 1$, à quelles conditions sur $a$ et $b$ est-ce que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge ?

**b.** Si $b \leqslant 0$, à quelles conditions sur $a$ et $b$ est-ce que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge ?

**c.** Si $b = 1$, à quelle condition sur $a$ est-ce que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge ?

**1.83** *Mines PSI 2019* Tanguy Sommet II

Soit $y \in \mathbb{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. On suppose que $y^2$ et $y''^2$ sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$.

**a.** Trouver une primitive de $y^2 - y'^2 + y''^2 - (y+y'+y'')^2$.

**b.** Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} yy''$ converge. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} y'^2$ converge.

**c.** Établir que $\displaystyle\int_0^{+\infty} yy'$ converge. En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$.

**d.** Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} y'(x) = 0$.

**e.** Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} y'^2 \leqslant \int_0^{+\infty} y^2 + \int_0^{+\infty} y''^2$.

**f.** Quelles sont les fonctions pour lesquelles $\displaystyle\int_0^{+\infty} y'^2 = \int_0^{+\infty} y^2 + \int_0^{+\infty} y''^2$.

Questions de cours :

- démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les intégrales.
- exemple de fonction continue, intégrable et positive sur $\mathbb{R}_+$ qui ne tend pas vers $0$ en $+\infty$.

**1.84** *CCP PSI 2019* Elaia Mugica I

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, une fonction continue $f : [a;b] \to \mathbb{C}$ telle que $\forall x \in [a;b],\ f(x) = f(a+b-x)$.

**a.** Montrer que $\displaystyle\int_a^b tf(t)dt = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(t)dt$.

**b.** En déduire la valeur exacte de $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{t\sin(t)}{1+\cos^2(t)}dt$.

**1.85** *Petites Mines PSI 2019* Thibault Maury I

**a.** Justifier l'existence de $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x^2-x^3)^{1/3}}$.

**b.** On admet que $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{du}{u^2-u+1}$. Calculer une valeur exacte de $I$.

**1.86** *ICNA PSI 2019* Léa Deveyneix I

**a.** Pour quels réels $a$ et $b$ l'intégrale $\int_0^{+\infty}(\sqrt{t}+a\sqrt{t+1}+b\sqrt{t+2})\mathrm{d}t$ converge ?

**b.** Si cette condition est réalisée, calculer $I=\int_0^{+\infty}(\sqrt{t}+a\sqrt{t+1}+b\sqrt{t+2})\mathrm{d}t$.

**1.87** *X PSI 2020* Victor Barberteguy I

Déterminer toutes les fonctions $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ de classe $C^1$ qui vérifient les conditions suivantes :

- $f(0)=0$,
- $f'$ croissante et strictement positive sur $\mathbb{R}_+$,
- $\forall x\geqslant 0,\ \int_0^x f'(t)^2\mathrm{d}t\geqslant f(x+f(x))-f(x)$.

**1.88** *X PSI 2021* Antoine Greil I

Soit une fonction $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, de classe $C^1$ et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ telle que $f'$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Montrer que $f$ tend vers $0$ en $+\infty$.

**1.89** *ENS Cachan PSI 2021* Baptiste Pozzobon I

Déterminer la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{t^\alpha\mathrm{d}t}{1+t}$ selon les valeurs de $\alpha\in\mathbb{R}$.

**1.90** *Centrale Maths1 PSI 2021* Clotilde Cantini

On admet la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$. On note $I$ sa valeur.

On définit, en cas de convergence, $f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{t\sin(xt)}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

**a.** Montrer que $f$ est définie sur $\mathbb{R}$.

**b.** Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=I$ et calculer la limite de $f$ en $+\infty$.

**c.** Montrer que $I=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\int_0^{\pi}\frac{\sin(u)}{u+k\pi}\mathrm{d}u$.

**d.** En déduire que $f$ n'est pas continue en $0$.

**1.91** *Mines PSI 2021* Aloïs Doucet II

**a.** Montrer qu'il existe un unique $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $\int_1^{+\infty}\frac{\lambda-\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ converge.

Soit $T>0$ et $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue et $T$-périodique.

**b.** Montrer qu'il existe un unique $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $\int_1^{+\infty}\frac{\lambda-f(t)}{t}\mathrm{d}t$ converge.

**1.92** *Mines PSI 2021* Esteban Poupinet I

**a.** Montrer que la fonction $\cos$ admet un unique point fixe sur $\mathbb{R}$.

**b.** Montrer qu'il n'existe aucune fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivable telle que $f\circ f=\cos$.

**c.** Montrer qu'il n'existe aucune fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue telle que $f\circ f=\cos$.

**1.93** *Mines PSI 2021* Adèle Robert I

On pose $\omega = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{\omega x} dx$.

**a.** Calculer $I_n$. En déduire une fonction $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ non nulle telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^{+\infty} g(t)t^n dt = 0$.

**b.** Soit $f : [a;b] \to \mathbb{C}$ continue (avec $a < b$ réels) telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ \int_a^b f(t)t^n dt = 0$.

Montrer que $f = 0$. Indication : on admet que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists P \in \mathbb{C}[X],\ \forall t \in [a;b],\ |f(t) - P(t)| \leqslant \varepsilon$.

**1.94** *Mines PSI 2021* Arthur Sureau II

Soit $m \in \mathbb{R}_+$, calculer $\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + m\sin^2(t)}$ en posant $u = \tan(t)$.

**1.95** *Centrale Maths1 PSI 2022* Jade Mirassou

Pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^x\sqrt{t}(1+t)}$.

**a.** Montrer que le domaine de définition de $f$ est $I = \left] -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right[$.

**b.** Montrer que $f$ est paire.

On admet que $f$ est de classe $C^2$ sur $I$ et que $f''(x)$ s'obtient par la formule de LEIBNIZ.

**c.** Montrer que $\forall x \in I,\ f(x) \geqslant \pi$.

**d.** Montrer que $\forall x \in I \cap \mathbb{R}_+,\ \left| \int_0^1 \frac{dt}{t^x\sqrt{t}(1+t)} - \frac{1}{(1/2) - x} \right| \leqslant 1$.

**e.** En déduire que $f(x) \underset{\frac{1}{2}^-}{\sim} \frac{1}{(1/2) - x}$.

**1.96** *Mines PSI 2022* Tony Géreaud II

Soit une fonction continue $f : ]0; +\infty[ \to \mathbb{R}$ telle que $\forall (x,y) \in ]0; +\infty[^2,\ f(xy) = f(x) + f(y)\ \ (1)$.

**a.** Calculer $f(1)$. Pour $x \in ]0; +\infty[$, comparer $f(x)$ et $f\left(\frac{1}{x}\right)$.

**b.** Montrer que $\forall x \in ]0; +\infty[,\ f(x) = \frac{1}{x}\int_x^{2x} f(t)dt - \int_1^2 f(t)dt$.

**c.** Montrer que $f$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et en déduire $f$.

**1.97** *Mines PSI 2022* Colin Herviou-Laborde I

**a.** Montrer que la fonction $\cos$ admet un unique point fixe sur $\mathbb{R}$.

**b.** Montrer qu'il n'existe aucune fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f \circ f = \cos$.

**c.** Montrer qu'il n'existe aucune fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $f \circ f = \cos$.

**1.98** *Mines PSI 2022* Thomas Lanne II

Étudier les convergences des intégrales $\int_{2/\pi}^{+\infty} \ln\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)dx$ et $\int_{2/\pi}^{+\infty} \ln\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)dx$.

**1.99** *Mines PSI 2022* Anatole Rousset I

Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

**a.** Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{ik\theta}}{k} = \int_0^1 e^{i\theta} \times \frac{1 - e^{in\theta}t^n}{1 - e^{i\theta}t}\mathrm{d}t$.

**b.** En déduire que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{e^{ik\theta}}{k}$ converge et montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ik\theta}}{k} = \int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}t}\mathrm{d}t$.

**c.** Établir $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(\theta) - t + i\sin(\theta)}{t^2 - 2t\cos(\theta) + 1}\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\ln\big(2 - 2\cos(\theta)\big) + i\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{1-\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right) + i\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)$.

**d.** En déduire que si $\theta \in ]0;\pi[$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(k\theta)}{k} = -\ln\left(2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k\theta)}{k} = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$.

**1.100** *Mines PSI 2022* Guillaume Tran-Ruesche II

Soit $n \in \mathbb{N}$.

**a.** Montrer l'existence et donner la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(1-i)t}t^n\mathrm{d}t$.

**b.** Trouver la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^{1/4}}\sin(t^{1/4})t^n\mathrm{d}t$.

**1.101** *X PSI 2023* Raphaël Déniel II

Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ paire et de classe $C^4$.
Montrer qu'il existe une fonction $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe $C^2$ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x^2) = f(x)$.

**1.102** *ENS Cachan PSI 2023* Mathys Bureau

On se donne un réel $p \geqslant 1$. Si $p > 1$, on lui associe $q \in \mathbb{R}$ tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction strictement positive et continue telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} (f(t))^p e^t\mathrm{d}t$ converge.

En cas de convergence, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n f(t)\mathrm{d}t$.

**a.** Soit $t \in ]0;1[$, $(u,v) \in (\mathbb{R}_+)^2$, montrer que $u^t v^{1-t} \leqslant tu + (1-t)v$. Indication : on pourra utiliser une convexité ou montrer que $\forall u \in \mathbb{R}_+,\ \forall t \in ]0;1[,\ u^t \leqslant tu + (1-t)$.

**b.** Soit $A \in \mathbb{R}_+$, $g, h : [0;A] \to \mathbb{R}$ continues. Montrer que $\displaystyle\int_0^A |g(t)h(t)|\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{p}\int_0^A |g(t)|^p\mathrm{d}t + \frac{1}{q}\int_0^A |h(t)|^q\mathrm{d}t$ si $p > 1$. En déduire que $\displaystyle\int_0^A |g(t)h(t)|\mathrm{d}t \leqslant \left(\int_0^A |g(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{1/p} \times \left(\int_0^A |h(t)|^q\right)^{1/q}$.

**c.** Si $p > 1$, montrer que $u_n$ est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et qu'il existe une constante $K \in \mathbb{R}_+$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant K\left(\frac{p}{q}\right)^n((nq)!)^{1/q}$. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} |u_n|^{-1/n}$ diverge.

**d.** Si $p = 1$, montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} |u_n|^{-1/n}$ diverge.

**1.103** *ENS Cachan PSI 2023* Alban Dujardin II

Soit $a > 0$ et, en cas de convergence, $I(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp\left(-t^2 - \frac{a^2}{t^2}\right)\mathrm{d}t$ et $J(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{a}{t^2}\exp\left(-t^2 - \frac{a^2}{t^2}\right)\mathrm{d}t$.

On rappelle la valeur de l'intégrale de Gauss : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

**a.** Montrer l'existence de $I(a)$ et $J(a)$.

**b.** Montrer que $I(a) = J(a)$.

**c.** Montrer que $I(a) = \dfrac{e^{-2a}}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{a}{t^2}\right)\exp\left(-\left(t - \frac{a}{t}\right)^2\right)\mathrm{d}t$.

**d.** En déduire que $I(a) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2a}$.

**1.104** *Centrale Maths1 PSI 2023* Elae Terrien

**a.** Pour tout réel $x \in ]-1;+\infty[$, montrer la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^x \ln(t)dt}{t-1}$.

On définit $H : ]-1;+\infty[ \to \mathbb{R}$ par $H(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x \ln(t)dt}{t-1}$.

**b.** Montrer que $H$ est décroissante sur $]-1;+\infty[$.

**c.** Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} H(x) = 0$.

**d.** Donner un équivalent simple de $H(x)$ quand $x$ tend vers $-1^+$. Indication : considérer $H(x) - H(x+1)$.

**e.** Donner un équivalent simple de $H(x)$ quand $x$ tend vers $+\infty$. Indication : considérer $H(x) - H(x+1)$.

**1.105** *Mines PSI 2023* Maddie Bisch I

**a.** Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ converge.

**b.** Montrer que $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

**c.** Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}dt$.

**1.106** *Mines PSI 2023* Marius Desvalois II

**a.** Soit $f : [0;1] \to \mathbb{R}_+$ continue. Montrer que $\left(\displaystyle\int_0^1 f^3\right)^2 \leqslant \int_0^1 f^5 \times \int_0^1 f$. Cas d'égalité ?

**b.** Soit $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$ telle que $f(0) = 0$ et $\forall x \in [0;1],\ f'(x) \in [0;1]$. Montrer $\displaystyle\int_0^1 f^3 \leqslant \left(\int_0^1 f\right)^2$.

**c.** Quel est le cas d'égalité dans l'inégalité de la question précédente ?

**1.107** *Mines PSI 2023* Jonathan Filocco II

**a.** Montrer qu'il existe un unique $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\lambda - \sin(t)}{t}dt$ converge.

Soit $T > 0$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $T$-périodique.

**b.** Montrer qu'il existe un unique $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\lambda - f(t)}{t}dt$ converge.

**1.108** *Mines PSI 2023* Clément Gallice I et Chloé Vagner I

Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ continue et strictement positive.

**a.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe une unique subdivision $(x_0, \cdots, x_n)$ du segment $[a;b]$ qui vérifient les conditions $\forall k \in [\![1;n]\!],\ \displaystyle\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)dt = \frac{1}{n}\int_a^b f(t)dt$.

**b.** Montrer la convergence de $\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(x_k)\right)_{n\geqslant 1}$ et calculer sa limite.

**1.109** *Mines PSI 2023* Gabriel Hofman I

On pose $\omega = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{i\sqrt{3}}{2}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{\omega x}dx$.

**a.** Calculer $I_n$. En déduire une fonction $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ non nulle telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)t^n dt = 0$.

**b.** Soit $f : [a;b] \to \mathbb{C}$ continue (avec $a < b$ réels) telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\int_a^b f(t)t^n dt = 0$.

Montrer que $f = 0$. Indication : on admet que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists P \in \mathbb{C}[X],\ \forall t \in [a;b],\ |f(t) - P(t)| \leqslant \varepsilon$.

Question subsidiaire : montrer que si $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ est continue et positive et que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = 0$, alors $f = 0$.

**1.110** *Mines PSI 2023* Marie-Lys Ruzic I

On pose, pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{|\sin(t)|}{t}\,dt$.

Trouver un équivalent simple de $f(x)$ quand $x$ tend vers $+\infty$.

**1.111** *CCINP PSI 2023* Paul Bats II

En cas de convergence, on pose $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln\big(\sin(x)\big)dx$ et $J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln\big(\sin(x)\cos(x)\big)dx$.

**a.** Montrer que $I$ existe.
**b.** Montrer que $J = 2I$.
**c.** Calculer $I$.

**1.112** *CCINP PSI 2023* Pierre Dobeli I

Pour $n \in \mathbb{N}$, en cas de convergence, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{nt}}{(1+e^t)^{n+1}}\,dt$.

**a.** Montrer l'existence de $I_n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
**b.** Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, on a $I_n = \dfrac{1}{n2^n} + \dfrac{n-1}{n} I_{n-1}$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = nI_n$.

**c.** Trouver une relation entre $J_n$ et $J_{n-1}$.
**d.** Calculer $J_1$. En déduire que $\forall n \geqslant 1,\ I_n = \dfrac{1}{n}\Big(1 - \dfrac{1}{2^n}\Big)$.
**e.** Déterminer un équivalent de $I_n$ en $+\infty$.

## 1.5 Officiel de la Taupe

**1.113** *OdlT 2012/2013 X-Cachan PSI planche 73*

Soit $f$ et $g$ de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$, $g$ étant 1-périodique.

Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(x)g(nx)dx = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1 f\Big(\frac{s+k}{n}\Big)g(s)ds$.

Montrer que si $f$ est lipschitzienne sur $[0;1]$, en déduire que $\displaystyle\int_0^1 f(x)g(nx)dx - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1 f\Big(\frac{k}{n}\Big)g(s)ds \underset{+\infty}{=} O\Big(\frac{1}{n}\Big)$.

Montrer alors que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\frac{k}{n}\Big) = \int_0^1 f(x)dx$. Puis que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(n\int_0^1 f(x)dx - \sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\frac{k}{n}\Big)\right) = \frac{f(1)-f(0)}{2}$.

**1.114** *OdlT 2012/2013 Centrale PSI planche 122 I*

À quelle condition sur $a > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{1 + x^\alpha\big(\sin(x^2)\big)^2}\,dx$ est-elle convergente ?

**1.115** *OdlT 2012/2013 CCP PSI planche 219 I*

Intégrabilité sur $]0;+\infty[$ de $f : x \mapsto \dfrac{(x+1)^{\frac{1}{4}} - x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{3}}}\ln(x)$ ?

**1.116** *OdlT 2013/2014 X-Cachan PSI planche 76*

**a.** Donner l'ensemble de définition de $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(x^2+t^2)(1+t^2)}}$.

**b.** Montrer que $f$ y est de classe $C^1$. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{x^2+t^2}}$.

**c.** Donner les limites et un équivalent de $f$ en $0^+$ et en $+\infty$.

**1.117** *OdlT 2013/2014 Centrale PSI planche 123 II*

On note $F$ l'ensemble des fonctions continues de $[a;b]$ dans $\mathbb{R}$ et $G$ celui des fonctions $g$ de classe $C^2$ de $[a;b]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $g(a) = g(b) = g'(a) = g'(b) = 0$.

Soit $f \in F$, montrer qu'il existe $g \in G$ telle que $f = g''$ si et seulement si $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b xf(x)dx = 0$.

Soit $h$ affine, montrer que : $\forall g \in G,\ \int_a^b h(x)g''(x)dx = 0$.

Soit $h \in F$ telle que $\forall g \in G,\ \int_a^b h(x)g''(x)dx = 0$. Montrer que : $\exists (u,v) \in \mathbb{R}^2,\ \int_a^b (h(x) - u - vx)dx = 0$ et $\int_a^b x(h(x) - u - vx)dx = 0$. En déduire que $h$ est affine.

**1.118** *OdlT 2013/2014 Mines PSI planche 199 II*

Montrer que $(E)\ :\ y' - y = f$, où $f$ est une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}$, admet une unique solution $F$ bornée sur $\mathbb{R}$. Montrer que $F$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et trouver une relation entre $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} F$.

**1.119** *OdlT 2013/2014 CCP PSI planche 261 II*

Pour $t \in \mathbb{R}_+$, on pose $d(t) = t + \cos(t)$ et $f(t) = \dfrac{1}{d(t)}$. Pour $x > 0$, on pose aussi $g(x) = \dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$.

**a.** Montrer que $g$ admet une limite finie en $0^+$. On prolonge alors $g$ par continuité en $0$.

**b.** Montrer que pour $x \in ]0;+\infty[$, on a $\int_0^x g(t)^2dt = 2\int_0^x f(t)g(t)dt - xg(x)^2$.

**c.** En déduire que $g^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

**1.120** *OdlT 2014/2015 X-Cachan PSI planche 59*

**a.** Montrer que $f : x \mapsto \sin(2\pi x\sqrt{2}) + \sin(2\pi x)$ n'est pas périodique.

**b.** Pour $q > 0$, construire $p \in \mathbb{N}$ tel que que $0 \leqslant p - q\sqrt{2} < 1$, puis, avec le principe des tiroirs, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists (p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ \left|p - q\sqrt{2}\right| < \dfrac{1}{n}$.

**c.** Montrer que pout tout $\varepsilon > 0$, il existe une infinité de couples $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que $\left|p - q\sqrt{2}\right| < \varepsilon$.

**d.** Soit $\varepsilon > 0$ et $N_\varepsilon = \{q \in \mathbb{N}^* \mid \exists p \in \mathbb{N}^*,\ \left|p - q\sqrt{2}\right| < \varepsilon\}$.
Montrer l'existence d'un réel $\ell$ strictement positif tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ N_\varepsilon \cap [n; n+\ell]$ soit non vide.

**e.** On note $R_\varepsilon = \{r \in \mathbb{R}_+^* \mid \forall x \in \mathbb{R},\ |f(x+r) - f(x)| < \varepsilon\}$.
Soit $a > 0$, montrer l'existence d'un réel $\ell$ strictement positif tel que $R_\varepsilon \cap [a; a+\ell]$ soit non vide.

**1.121** *OdlT 2014/2015 Mines PSI planche 155 I*

Soient $M$ l'ensemble des parties minorées non vides de $\mathbb{R}$, et $\Phi$ une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

**a.** Montrer que : $\Phi$ est croissante $\Longleftrightarrow \forall P \in M,\ \Phi(\mathrm{Inf}(P)) \leqslant \mathrm{Inf}(\Phi(P))$.

**b.** Montrer que : $\Phi$ croit et est continue à droite $\Longleftrightarrow \forall P \in M,\ \Phi(\mathrm{Inf}(P)) = \mathrm{Inf}(\Phi(P))$.

**1.122** *OdlT 2014/2015 Mines PSI planche 162 I*

**a.** Justifier l'existence de $A = \int_0^{+\infty} \dfrac{\sin(t)}{\sqrt{t}}dt$.

**b.** En écrivant $A = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n$ où la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est à termes strictement positifs, montrer que $A > 0$.

**1.123** *OdlT 2014/2015 Mines PSI planche 165 II*

**a.** Existence et domaine de définition de $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}e^{-tx}dt$.

**b.** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

**1.124** *OdlT 2014/2015 Mines PSI planche 173 II*

**a.** Existence et domaine de définition de $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{e^t - 1} dt$.

**b.** Calculer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

**1.125** *OdlT 2014/2015 Centrale PSI planche 228 I*

Soit $\alpha > -1$ et $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$, décroissante, telle que $t \mapsto t^\alpha f(t)$ soit intégrable sur $[1; +\infty[$.
**a.** Montrer que $t \mapsto t^\alpha f(t)$ et $t \mapsto t^{\alpha+1} f'(t)$ sont intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$.

**b.** Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\alpha+1} f'(t) dt = -(\alpha + 1) \int_0^{+\infty} t^\alpha f(t) dt$.

**1.126** *OdlT 2014/2015 Centrale PSI planche 229 I*

Soit $f : [0; 1] \to \mathbb{R}$ continue.

**a.** Montrer que si $\displaystyle\int_0^1 f(t) dt = 0$, $f$ s'annule au moins une fois sur $]0; 1[$.

**b.** Montrer que si $\displaystyle\int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2}$, $f$ admet au moins un point fixe sur $]0; 1[$.

**1.127** *OdlT 2014/2015 CCP PSI planche 283 II*

Soit $f : [0; 1] \to \mathbb{R}$ dérivable en $0$.

Étudier la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

**1.128** *OdlT 2014/2015 CCP PSI planche 288 I*

Trouver $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x \sin^2(t) dt$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x |\sin(t)| dt$.

**1.129** *OdlT 2014/2015 ENTPE-EIVP PSI planche 325 I*

Montrer que : $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \Big|\mathrm{Arctan}\left(\mathrm{sh}\,(x)\right)\Big| = \alpha + \beta\, \mathrm{Arccos}\left(\dfrac{1}{\mathrm{ch}\,(x)}\right)$.

**1.130** *OdlT 2014/2015 Télécom Sud Paris PSI planche 331 II*

Vérifier que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x) - \ln(1 - e^{-x})}{x} e^{-\alpha x} dx$ existe pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

**1.131** *OdlT 2015/2016 Mines PSI planche 118I*

Montrer que $I_n = \displaystyle\int_0^\pi \ln\left(2 \sin \frac{x}{2}\right) \cos(nx) dx$ et $J_n = \displaystyle\int_0^\pi \sin(nx) \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} dx$ existent pour $n \in \mathbb{N}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, trouver une relation entre $I_n$ et $J_n$. Pour $n \in \mathbb{N}$, trouver une relation entre $J_n$ et $J_{n+1}$.

Calculer $I_0$. Indication : on montrera que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\cos x) dx = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx$. Calculer $I_n$.

**1.132** *OdlT 2015/2016 Mines PSI planche 119II*

Pour $f$ continue de $[0; 1]$ dans $\mathbb{R}_+^*$, étudier la suite de terme général $u_n = \left(\displaystyle\int_0^1 f(t)^n dt\right)^{\frac{1}{n}}$.

**1.133** *OdlT 2015/2016 Mines PSI planche 120II*

Domaine de définition de $f(x) = \displaystyle\int_0^\pi \ln(1 - 2x \cos t + x^2) dt$. Expliciter $f$.

**1.134** *OdlT 2015/2016 Mines PSI planche 122II*

Montrer que $(E)\ :\ y' - y = f$ où $f$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$, admet une unique solution $h$ bornée. Montrer que $h$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et exprimer cette intégrale en fonction de celle de $f$.

**1.135** *OdlT 2015/2016 Mines PSI planche 128I* Convergence et calcul de $I(x) = \displaystyle\int_0^x \sqrt{\frac{1}{\sin(2\theta)} - 1}\, d\theta$.

**1.136** *OdlT 2015/2016 Mines PSI planche 130I*

Montrer que $\tan(x) = x$ admet une solution unique sur $I_n = \left]-\frac{\pi}{2} + n\pi\,;\, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$. Trouver un équivalent de $x_n$ en $+\infty$ puis en calculer le développement asymptotique avec une précision $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

**1.137** *OdlT 2015/2016 Mines PSI planche 133I*

Justifier l'existence et l'unicité d'une suite réelle vérifiant $u_n^5 + nu_n - 1 = 0$.
Étudier cette suite et en donner un développement asymptotique à deux termes.

**1.138** *OdlT 2015/2016 CCP PSI planche 249I* Montrer que $\Phi(x) = \displaystyle\int_{1/x}^x e^{-t^2}\, dt$ est définie sur $\mathbb{R}^*$.

Montrer que $\Phi$ est $C^1$, étudier sa parité et calculer sa limite en $+\infty$.
Justifier que $\Phi$ n'est pas prolongeable par continuité en $0$ puis donner son signe sur $]0;1]$ et $[1;+\infty[$.

**1.139** *OdlT 2015/2016 ENSAM PSI planche 276II*

Soit $f$ de classe $C^2$ sur $[0;a]$ telle que $f'(0) = f(0) = 0$.
Montrer que $\displaystyle\int_0^a |f(t)f''(t)|dt \leqslant \frac{a^2}{2}\int_0^a f''^2(t)dt$.
Peut-on obtenir une meilleure majoration ?

**1.140** *OdlT 2015/2016 ENTPE-EIVP planche 277II*

Soit $g : [0;1] \to \mathbb{R}$ continue.
**a.** Montrer que $G : x \to \displaystyle\frac{1}{2}\int_0^1 |x-t|g(t)dt$ est de classe $C^2$ sur $[0;1]$ et calculer $G''$.
**b.** Montrer qu'il existe deux réels $a$ et $b$ tels que $f(x) = G(x) + ax + b$ vérifie $f'' = g$ et $f(0) = f(1) = 0$.
**c.** Existe-t-il d'autres fonctions $f$ vérifiant ces conditions ?

**1.141** *OdlT 2015/2016 Télécom SudParis planche 285I* Montrer que $(e^{-x^2})^{(n)} = P_n(x)e^{-x^2}$ avec $P_n \in \mathbb{C}[X]$.

Montrer la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P_n(x)P_m(x)e^{-x^2}dx$ et la calculer.

**1.142** *OdlT 2015/2016 Télécom SudParis planche 287I* Convergence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt$.

**1.143** *OdlT 2016/2017 Mines PSI planche 105I abordable dès la 1ère année*
Résoudre dans $\mathbb{R}$, $\mathrm{Arctan}(x-1) + \mathrm{Arctan}\, x + \mathrm{Arctan}(x+1) = \frac{\pi}{2}$.

**1.144** *OdlT 2016/2017 Mines PSI planche 109I*

Existence et valeur de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{th}\,(3x) - \mathrm{th}\, x}{x}dx$.

**1.145** *OdlT 2016/2017 Mines PSI planche 111I abordable dès la 1ère année*

Montrer que $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt$ peut être prolongée en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$.
Montrer qu'elle est alors de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ mais pas sur $\mathbb{R}_+$.

**1.146** *OdlT 2016/2017 Mines PSI planche 112I*

Déterminer la nature puis la valeur de $I_{\alpha,n} = \int_a^b (b-t)^\alpha (t-a)^n dt$ où $a$, $b$ et $\alpha$ sont réels et $n \in \mathbb{N}$.

**1.147** *OdlT 2016/2017 Mines PSI planche 116I*

Nature et calcul de $I = \int_0^{+\infty} \left( \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \right) dx$.

**1.148** *OdlT 2016/2017 Mines PSI planche 120I abordable dès la 1ère année*

Montrer que si une fonction $f$ est de classe $C^n$ sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et s'annule $n$ fois, $\forall k \in [\![0; n]\!]$, $f^{(n-k)}$ s'annule au moins $k$ fois.
Qu'en déduit-on, au mieux, en fonction du degré de $P \in \mathbb{R}[X]$, sur le nombre de fois où $P(x) = e^x$ ?

**1.149** *OdlT 2016/2017 Centrale PSI planche 161 abordable dès la 1ère année*

Montrer que pour, $n \geqslant 3$, $P_n(X) = X^n - nX + 1$ admet une unique racine $x_n \in ]0; 1[$.
Trouver un équivalent $a_n$ de $x_n$ de la forme $\frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ; puis un équivalent simple de $x_n - a_n$.

**1.150** *OdlT 2016/2017 Centrale PSI planche 164*

Montrer que $(E)\ :\ y'' = (x^4 + 1)y$ admet une unique fonction $f$ solution telle que $f(0) = f'(0) = 1$.
On admet que $\frac{1}{f^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ ; montrer que $g(x) = f(x) \int_x^{+\infty} \frac{dt}{f(t)^2}$ est solution de $(E)$.
Montrer que $\frac{1}{f^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

**1.151** *OdlT 2016/2017 CCP PSI planche 205I abordable dès la 1ère année*

Montrer que, pour $n \geqslant 3$, l'équation $e^x = nx$ admet deux solutions $0 \leqslant x_n < y_n$.
Étudier la monotonie de $(x_n)_{n\geqslant 3}$ et $(y_n)_{n\geqslant 3}$. En déduire qu'elles convergent vers une limite à déterminer.
Montrer que $x_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. Trouver un équivalent de $x_n - \frac{1}{n}$ et en déduire un développement asymptotique à deux termes de $x_n$. Soit $\varepsilon > 0$ fixé ; montrer qu'à partir d'un certain rang, $y_n \leqslant (1+\varepsilon)\ln(n)$.

**1.152** *OdlT 2016/2017 CCP PSI planche 209I*

Nature de $I = \int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin t}}{t} dt$ et $J = \int_0^{+\infty} \sin t \sin \frac{1}{t} dt$.

**1.153** *OdlT 2016/2017 CCP PSI planche 218I*

Trouver $a$, $b$ et $c$ tels que $\frac{2x+1}{x(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$.
On admet que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ ; montrer que $I = \int_0^1 t \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor dt$ existe et la calculer.

**1.154** *OdlT 2016/2017 EIVP PSI planche 245III abordable dès la 1ère année*

Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt$.

**1.155** *OdlT 2017/2018 Mines PSI planche 124III, abordable dès la première année*

Calculer $I = \int_0^{\ln 2} \frac{\operatorname{sh}^2(x)}{\operatorname{ch}^3(x)} dx$.

**1.156** *OdlT 2017/2018 Centrale PSI planche 163, abordable dès la première année*

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k^\alpha}{n^2}\right)$. Si $\alpha = 2$, convergence et limite de $(u_n^{1/n})_{n\in\mathbb{N}}$. Limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Soit $\alpha \in [0;1]$, convergence et limite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^\alpha}{n^2}$. Et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ? Et si $\alpha > 1$ ?

**1.157** *OdlT 2017/2018 CCP PSI planche 209II, abordable dès la première année*

Montrer que $\forall n \geqslant 3$, $e^x = nx$ admet deux solutions $0 \leqslant x_n < y_n$.
Étudier la monotonie des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire qu'elles admettent une limite à déterminer.
Montrer que $x_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, trouver un équivalent de $x_n - \frac{1}{n}$ en $+\infty$ et donner un développement asymptotique de $x_n$ à deux termes. Soit $\varepsilon > 0$ ; montrer qu'à partir d'un certain rang, $y_n \leqslant (1+\varepsilon)\ln n$.

**1.158** *OdlT 2017/2018 EIVP PSI planche 250I, abordable dès la première année*

Montrer que la suite de terme général $I_n = \int_0^1 (1-x)^n e^{-2x} dx$ converge et donner sa limite.

Trouver une relation entre $I_n$ et $I_{n+1}$ et en déduire un équivalent de $nI_n$ en $+\infty$.
Trouver $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $I_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

**1.159** *OdlT 2017/2018 Mines-Télécom PSI planche 252II*

Montrer que les suites de terme général $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \frac{1}{n} - \ln n$ et $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n} - \ln n$ (pour $n \geqslant 2$) sont adjacentes.

**1.160** *Compléments OdlT 2017/2018 Mines PSI planche 181II*

Domaine de définition de $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt$.

Donner un équivalent de $F(x)$ en $0$.

**1.161** *Compléments OdlT 2017/2018 CCP PSI planche 447I*

Montrer que $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t) dt$ converge et en déduire que $J = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos t) dt$ converge aussi ; montrer que $I = J$. Calculer $I + J$, en déduire la valeur de $I$ et $J$.

**1.162** *Compléments OdlT 2017/2018 ENSAM PSI planche 544II*

Convergence de $I = \int_0^{+\infty} \frac{x - \operatorname{Arctan} x}{x(1+x^2)\operatorname{Arctan} x} dx$.

Décomposition en éléments simples de $\frac{1}{(x^2+1)x}$ sous la forme $\frac{a}{x} + \frac{bx+c}{1+x^2}$ et calcul de $I$.

**1.163** *Compléments OdlT 2017/2018 Mines-Télécom PSI planche 562I*

Domaine de définition de $f(x) = x^2 + \left\lfloor \frac{1}{1 - \lfloor x \rfloor} \right\rfloor$. Étudier la continuité de $f$ en $\pm 2$ et $\pm 1$.

Expliciter $f$ sur les intervalles où elle est définie.

**1.164** *Compléments OdlT 2017/2018 Mines-Télécom PSI planche 563I*

Déterminer les fonctions continues sur $[0;1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, telles que $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{3} + \int_0^1 \big(f(x^2)\big)^2 dx$ (on pourra écrire $\frac{1}{3}$ de manière naturelle).

**1.165** *Compléments OdlT 2017/2018 Mines-Télécom PSI planche 565II*

Soit $f$ de classe $C^1$ sur $[a;b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que $f(a)=0$.

Montrer que $\int_a^b f^2(x)dx \leqslant \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b f'^2(x)dx$.

**1.166** *Compléments OdlT 2017/2018 Mines-Télécom PSI planche 575I*

Convergence et calcul de $f(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{Min}\big(x, \frac{1}{\sqrt{t}}, \frac{1}{t^2}\big)dt$.

Montrer la continuité et la dérivabilité de $f$.

**1.167** *OdlT 2018/2019 Mines PSI planches 108I et 114I*

Étudier, en fonction de $\alpha > 0$, l'existence de $\int_0^{+\infty} \big(e^{\frac{\sin^2(t)}{t^\alpha}} - 1\big)dt$.

**1.168** *OdlT 2018/2019 Centrale PSI planche 167*

On note $E = \{f \in C^2([0;1], \mathbb{C}) \mid f(0) = f(1) = 0\}$, $F = C^0([0;1], \mathbb{C})$ et $\phi : f \mapsto f''$.

**a.** Montrer que $\phi$ est un isomorphisme de $E$ dans $F$.

**b.** Si $g \in F$, montrer que $G : [0;1] \to \mathbb{C}$ définie par $G(x) = \int_0^1 \frac{|x-t|}{2} g(t)dt$ est $C^2$ et calculer $G''$.

**c.** Montrer qu'il existe une fonction $k : [0;1]^2 \to \mathbb{R}$ telle que : $\forall g \in F$, $\phi^{-1}(g)(x) = \int_0^1 k(x,t)g(t)dt$.

**d.** Calculer $\underset{[0;1]^2}{\mathrm{Sup}}\, |k|$. En déduire la continuité de $\phi^{-1}$ si on munit $E$ et $F$ de la norme infinie.

**1.169** *OdlT 2018/2019 Centrale PSI planche 168*

**a.** Étudier la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du$.

**b.** Soit $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Étudier l'existence de $I(\alpha,\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha u) - \cos(\beta u)}{u} du$. En donner la valeur.

**1.170** *Compléments OdlT 2018/2019 Mines PSI planche 107I*

Existence et calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{th}\,(3x) - \mathrm{th}\,(x)}{x} dx$.

**1.171** *Compléments OdlT 2018/2019 CCP PSI planche 348I*

**a.** Montrer que $f : ]-1;+\infty[ \to \mathbb{R}$ définie $f(x) = x + \ln(1+x)$ est une bijection et justifier que sa fonction réciproque $g$ est $C^\infty$.

**b.** Calculer $g(0)$ et $g'(0)$.

**c.** Justifier que $g$ admet un développement limité à l'ordre $3$ en $0$ et le calculer.

**1.172** *Compléments OdlT 2018/2019 CCP PSI planche 350II*

**a.** Montrer que $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)dt$ est convergente. Montrer que $J = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos t)dt$ aussi et que $I = J$.

**b.** Déterminer la valeur de $I$.

**1.173** *Compléments OdlT 2018/2019 E3A PSI planche 402II*

**a.** Pour $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de $I_n = \displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\tan^n x}$.

**b.** Réécrire $I_n$ à l'aide d'un changement de variable "logique".

**c.** Trouver des réels $a, b, c, d$ tels que $\dfrac{1}{t^2(1+t^2)} = \dfrac{a}{t^2} + \dfrac{b}{t} + \dfrac{ct+d}{1+t^2}$.

**d.** En déduire le calcul de $I_2$ puis celui de $I_3$ et celui de $I_4$.

**1.174** *Compléments OdlT 2018/2019 ENTPE PSI planche 431I*

**a.** Montrer que $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ et $I_2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{t\,dt}{\sqrt{1-t^2}}$ existent et les calculer.

**b.** Montrer que $I_3 = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} dt$ existe puis la calculer en effectuant le changement de variable $t = \sin u$.