TD 03 : ALGÈBRE LINÉAIRE

PSI 1 2024-2025 **vendredi 20 septembre 2024**

3.1 *CCP PSI 2016 et CCP PSI 2017* Sylvin Bielle II et Élisa Gressier-Monard I

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$. Soit u un endomorphisme de E et $m \geqslant 0$.

On notera $K_m = \mathrm{Ker}(u^m)$ et $I_m = \mathrm{Im}\,(u^m)$.

a. On suppose uniquement dans cette question u injectif. Déterminer K_m et I_m.

b. On revient au cas général. Montrer que : $\forall m \geqslant 0,\ K_m \subset K_{m+1}$ et $I_{m+1} \subset I_m$.

c. Montrer qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ avec $0 \leqslant p \leqslant n$ tel que $K_p = K_{p+1}$ et $I_{p+1} = I_p$. Montrer ensuite que : $\forall q \in \mathbb{N},\ K_p = K_{p+q}$ et $I_{p+q} = I_p$ et enfin $K_p \oplus I_p = E$.

3.2 *Mines PSI 2017* Vincent Meslier I

Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k}(-3)^k$ pour $n \geqslant 2$.

3.3 *Petites Mines PSI 2017* Cléa Maricourt II

Soit E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,E)$.

a. Montrer que : $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Im}\,(f \circ g) \Longleftrightarrow E = \mathrm{Im}\,(g) + \mathrm{Ker}(f)$.

b. Montrer que : $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g \circ f) \Longleftrightarrow \mathrm{Im}\,(f) \cap \mathrm{Ker}(g) = \{0_F\}$.

3.4 *Mines PSI 2018* Maëlle Casas II

Soit $C_n(\mathbb{R}) = \left\{A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ a_{i,j} = a_{n+1-i,n+1-j}\right\}$.

a. Montrer que $C_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel stable par produit matriciel.

b. Soit une matrice $A \in GL_n(\mathbb{R}) \cap C_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\theta : C_n(\mathbb{R}) \to C_n(\mathbb{R})$ défini par $\theta(M) = AM$ est un endomorphisme de $C_n(\mathbb{R})$ et en déduire que $A^{-1} \in C_n(\mathbb{R})$.

3.5 *E3A PSI 2015 et Mines PSI 2019* Vincent Barrère et Victor Margueritte I

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = \dfrac{1}{2}\Big(f + \mathrm{id}_E\Big)$.

a. Montrer qu'il existe deux suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ f^n = a_n f + b_n \mathrm{id}_E$.

b. Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont-elles uniques ?

On suppose dans la suite de cet exercice que f n'est pas une homothétie.

c. Montrer que ces deux suites convergent et calculer leurs limites $\alpha = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ et $\beta = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

d. On pose $p = \alpha f + \beta \mathrm{id}_E$. Montrer que p est un projecteur. Le caractériser.

3.6 *Mines PSI 2021* Robin Gondeau II

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.

a. Montrer que $A = \{q \in \mathbb{N} \mid (u, u^2, \cdots, u^q) \text{ est liée } \}$ est non vide et qu'elle admet un élément minimal.

b. Montrer que $\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Im}(u^2) \iff u \in \underset{k \geqslant 2}{\operatorname{Vect}}(u^k)$.

3.7 *X PSI 2023* Raphaël Déniel I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$, factoriser le polynôme $P = (X + a)^n - (X - a)^n$.

3.8 *Mines PSI 2023* Maddie Bisch II

Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ et $P_n = (X - 1)^n - X^n + 1$.

Déterminer les valeurs de n pour lesquelles P_n admet une racine double.

3.9 *CCINP PSI 2023* Juan Dupierris II et Gabriel Hofman II

Soit E un espace de dimension finie et $(p, q) \in (\mathcal{L}(E))^2$ tel que $p + q = \mathrm{id}_E$ et $\operatorname{rang}(p) + \operatorname{rang}(q) \leqslant \dim(E)$.

a. Montrer que $E = \operatorname{Im}(p) \oplus \operatorname{Im}(q)$.

b. Montrer que p et q sont des projecteurs.