PROGRAMME DE KHÔLLE SEMAINE 02

PSI 1 2024-2025 **du lundi 23/09 au vendredi 27/09**

1 Intégrales sur un segment : voir programme précédent

2 Comparaison locale des fonctions : voir programme précédent

3 Intégrales convergentes et divergentes : $f : I \to \mathbb{K}$ avec I intervalle et f continue par morceaux sur I

- définition de la convergence de $\int_{[a;b[} f$ et définition de la valeur de l'intégrale dans ce cas ;
- définition de la convergence de $\int_{]a;b[} f$ par l'existence de $\int_{]a;c]} f$ et de $\int_{[c;b[} f$ pour un certain $c \in]a;b[$: indépendance de cette définition par rapport à c et définition de la valeur de l'intégrale dans ce cas ;
- cas particulier des fonctions positives en bornant une "primitive" ;
- convergence des intégrales de RIEMANN sur $]0;1]$ ou $[1;+\infty[$, c'est-à-dire de $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ selon les valeurs de α, convergence de $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}dx$ selon les valeurs de λ ;
- Si $f \in C^0(]a;b[, \mathbb{K})$ et $\varphi :]\alpha;\beta[\to]a;b[$ bijection strictement croissante de classe C^1 alors $\int_a^b f(x)dx$ et $\int_\alpha^\beta f \circ \varphi(t)\varphi'(t)dt$ sont de même nature et $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f \circ \varphi(t)\varphi'(t)dt$; calcul en pratique ;
- Si $f, g : \widetilde{]a;b[} \to \mathbb{K}$ de classe C^1 et si $\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x)$ et $\lim\limits_{x \to b} f(x)g(x)$ existent et sont finies, $\int_a^b f'(x)g(x)dx$ et $\int_a^b f(x)g'(x)dx$ sont de même nature et $\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$; pratique ;
- techniques pour montrer qu'une intégrale converge ou diverge ;
- techniques pour calculer les intégrales généralisées ;

4 Fonctions intégrables :

- si $f : I \to \mathbb{C}$ continue par morceaux, on dit que $\int_I f$ converge absolument si $\int_I |f|$ converge ;
- l'absolue convergence d'une intégrale implique sa convergence et inégalité triangulaire associée ;
- on dit que $f : I \to \mathbb{C}$ continue par morceaux est intégrable si $\int_I f$ est absolument convergente ;
- CHASLES généralisé, caractérisation avec limite d'une "primitive" de $|f|$ aux bornes de l'intervalle ;
- théorème de comparaison : par $\sim$, O, o, majoration, minoration ;
- exemples d'intégrales convergentes associées à des fonctions non intégrables ;
- exemples de fonctions équivalentes dont les intégrales associées ne sont pas de même nature ;
- espaces $L^1(I, \mathbb{K})$, $L^2(I, \mathbb{K})$, produit scalaire sur les fonctions continues, inégalité de CAUCHY-SCHWARZ ;
- pratique de la comparaison série/intégrale : surtout le principe graphique général à utiliser pour toute fonction monotone pour l'obtention de convergences, de limites ou d'équivalents ;

QUESTIONS DE COURS :

1 énoncer le théorème de changement de variable sur des intervalles ouverts (th. 1.26)
2 énoncer le théorème d'intégration par parties sur des intervalles ouverts (th. 1.27)
3 prouver que pour f continue sur I, $u, v : J \to I$ dérivables, $x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$ est dérivable (prop. 1.7)
4 prouver que si f et g sont de carré intégrable sur I, alors fg est intégrable sur I (prop. 1.34)
1 énoncer le théorème du rang (th. 2.13)
2 énoncer les propriétés d'une projection p sur F parallèlement à G (th. 2.15)
3 prouver que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Ker}(f+g)$ et $\mathrm{Im}(f+g) \subset \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$ (rem. 2.20)

Prévision pour la prochaine semaine : révision intégration et suite de l'algèbre linéaire