TD 03 : ALGÈBRE LINÉAIRE

PSI 1 2024-2025 **vendredi 20 septembre 2024**

3.1 **a.** Si u est injectif, alors $u \in GL(E)$ car E est de dimension finie donc u^m est aussi un automorphisme de E.

Comme u^m est à fois injectif et surjectif, on a donc $K_m = \mathrm{Ker}(u^m) = \{0_E\}$ et $I_m = \mathrm{Im}\,(u^m) = E$.

b. Soit $m \in \mathbb{N}$ et $x \in K_m$, alors $u^m(x) = 0_E$ donc $u^{m+1}(x) = u(u^m(x)) = u(0_E) = 0_E$. Ainsi, $K_m \subset K_{m+1}$.

Si $y \in I_{m+1}$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = u^{m+1}(x)$ donc $y = u(u^m(x)) \in I_m$. Alors, $I_{m+1} \subset I_m$.

c. Si la suite $(K_m)_{0 \leqslant p \leqslant n+1}$ était strictement croissante, on aurait $\forall k \in [\![0;n]\!],\ \dim(K_{m+1}) \geqslant \dim(K_m) + 1$ ce qui impliquerait $\dim(K_{n+1}) = \dim(K_0) + \sum\limits_{m=0}^{n} \big(\dim(K_{m+1}) - \dim(K_m)\big) \geqslant n+1$ ce qui est impossible car $K_{n+1} \subset E$ et que $\dim(E) = n$. Par l'absurde, il existe donc un entier $p \in [\![0;n]\!]$ tel que $K_p = K_{p+1}$. Par la formule du rang, on a $\dim(I_{p+1}) = n - \dim(K_{p+1}) = n - \dim(K_p) = \dim(I_p)$ alors que $I_{p+1} \subset I_p$. On en conclut, par inclusion et égalité des dimensions, que $I_{p+1} = I_p$.

L'égalité $K_p = K_{p+q}$ est vraie pour $q = 0$ et $q = 1$. Soit $q \geqslant 1$ tel que $K_{p+q} = K_p$, alors on sait déjà que $K_p = K_{p+q} \subset K_{p+q+1}$. Réciproquement, si $x \in K_{p+q+1}$, on a $u^{p+q+1}(x) = 0_E = u^{p+1}(u^q(x))$ donc $u^q(x) \in K_{p+1} = K_p$ donc $u^p(u^q(x)) = 0_E$ et $x \in K_{p+q} = K_p$. Par double inclusion, on a donc $K_p = K_{p+q+1}$.

On conclut par principe de récurrence que $\forall q \in \mathbb{N},\ K_p = K_{p+q}$.

Comme à la question précédente, on déduit de la formule du rang que $\forall q \in \mathbb{N},\ I_{p+q} = I_p$.

Soit $x \in K_p \oplus I_p$. Alors $u^p(x) = 0_E$ et $\exists a \in E,\ x = u^p(a)$ donc $u^{2p}(a) = 0_E$. Mais comme $K_{2p} = K_p$, il vient $u^p(a) = x = 0_E$ donc K_p et I_p sont en somme directe.

Par la formule du rang, on a $\dim(K_p) + \dim(I_p) = \dim(E)$, et on en conclut que $K_p \oplus I_p = E$.

3.2 On pose $S_0(x) = \sum\limits_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} x^{2k} = \sum\limits_{\substack{p=0 \\ p \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{p} x^p$ et $S_1(x) = \sum\limits_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n}{2k+1} x^{2k+1} = \sum\limits_{\substack{p=0 \\ p \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{p} x^p$ pour $x \in \mathbb{C}$. Alors, d'après la formule du binôme de NEWTON : $S_0(x) + S_1(x) = \sum\limits_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^p = (1+x)^n$ et $S_0(x) - S_1(x) = \sum\limits_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{n}{p} x^p = (1-x)^n$. Ainsi $S_0(x) = \dfrac{(1+x)^n + (1-x)^n}{2}$. Il suffit de prendre $x = i\sqrt{3}$ de sorte que $x^{2k} = i^{2k} 3^k = (-3)^k$ pour avoir $\sum\limits_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} (-3)^k = \dfrac{(1+i\sqrt{3})^n + (1-i\sqrt{3})^n}{2} = \mathrm{Re}\,((1+i\sqrt{3})^n)$.

Or $(1+i\sqrt{3}\,)^n = \big(2e^{\frac{i\pi}{3}}\big)^n = 2^n e^{\frac{n\pi}{3}}$. Ainsi $\sum\limits_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} (-3)^k = 2^n \cos\left(\dfrac{n\pi}{3}\right)$.

3.3 **a.** ($\Longrightarrow$) Par hypothèse, $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(f \circ g)$. L'autre inclusion $\mathrm{Im}(f \circ g) \subset \mathrm{Im}(f)$ est toujours vraie. Soit x un vecteur de E, posons donc $y = f(x) \in \mathrm{Im}(f)$, il existe donc $y' \in F$ tel que $y = f \circ g(y')$ ce qui fait que $y - y = f(x - g(y')) = 0_F$ donc $x - g(y') \in \mathrm{Ker}(f)$. Il suffit d'écrire $x = g(y') + (x - g(y'))$ pour avoir $E \subset \mathrm{Im}(g) + \mathrm{Ker}(f)$. L'inclusion $\mathrm{Im}(g) + \mathrm{Ker}(f) \subset E$ étant claire, on a bien $E = \mathrm{Im}(g) + \mathrm{Ker}(f)$.

($\Longleftarrow$) L'inclusion $\mathrm{Im}(f \circ g) \subset \mathrm{Im}(f)$ étant vraie en général, montrons la réciproque. Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$, on décompose $x = a + b$ avec $a \in \mathrm{Im}(g)$ (donc $a = g(c)$ avec $c \in E$) et $b \in \mathrm{Ker}(f)$ donc $y = f(a + b) = f(a) + f(b) = f \circ g(c) \in \mathrm{Im}(f \circ g)$. Par double inclusion, $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f \circ g)$.

b. ($\Longrightarrow$) Par hypothèse, $\mathrm{Ker}(g \circ f) \subset \mathrm{Ker}(f)$. L'autre inclusion $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$ est toujours vraie. Soit y un vecteur de $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ et $g(y) = 0_E$. Ainsi, $g(f(x)) = g \circ f(x) = 0_F$ donc $x \in \mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}(f)$ donc $f(x) = 0_F$ donc $x \in \mathrm{Ker}(f)$ d'où $y = 0_F$. Ainsi $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(g) \subset \{0_F\}$. L'inclusion $\{0_F\} \subset \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)$ étant claire, on a bien $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(g) = \{0_F\}$.

($\Longleftarrow$) L'inclusion $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$ étant vraie en général, montrons la réciproque. Soit $x \in \mathrm{Ker}(g \circ f)$, alors $g(f(x)) = 0_E$ donc $f(x) \in \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)$ d'où $f(x) = 0_F$ puisque $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(g) = \{0_F\}$. Ainsi $x \in \mathrm{Ker}(f)$ et on montré que $\mathrm{Ker}(g \circ f) \subset \mathrm{Ker}(f)$. Par double inclusion, on a bien $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g \circ f)$.

3.4 **a.** On constate d'abord que la condition $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ a_{i,j} = a_{n+1-i,n+1-j}$ d'appartenance à $C_n(\mathbb{R})$ pour une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ signifie que les cases de A sont symétriques par rapport au centre de la matrice A (centre incarné par une case si n est impair ou pas si n est pair).

La matrice nulle est clairement dans $C_n(\mathbb{R})$ donc $C_n(\mathbb{R}) \neq \emptyset$. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ deux matrices de $C_n(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$, et posons $D = \lambda A + B = (d_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, alors, pour tout couple (i,j) dans $[\![1;n]\!]^2$, on a la relation $d_{n+1-i,n+1-j} = \lambda a_{n+1-i,n+1-j} + b_{n+1-i,n+1-j} = \lambda a_{i,j} + b_{i,j} = d_{i,j}$ donc $D \in D_n(\mathbb{R})$. Ainsi $C_n(\mathbb{R})$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ deux matrices de $C_n(\mathbb{R})$ et posons $C = AB = (c_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. On sait que $c_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$ et $c_{n+1-i,n+1-j} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{n+1-i,k} b_{k,n+1-j} = \sum\limits_{\ell=1}^{n} a_{n+1-i,n+1-\ell} b_{n+1-\ell,n+1-j}$ avec le changement d'indice $k = n + 1 - \ell$. Ce qui devient $c_{n+1-i,n+1-j} = \sum\limits_{\ell=1}^{n} a_{i,\ell} b_{\ell,j} = c_{i,j}$ avec la propriété fondatrice de $C_n(\mathbb{R})$. Ainsi $C \in C_n(\mathbb{R})$ et $C_n(\mathbb{R})$ est bien stable par produit matriciel.

Au final, $C_n(\mathbb{R})$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et il est stable par produit. Comme $I_n \in C_n(\mathbb{R})$, cet ensemble $C_n(\mathbb{R})$ est même une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ mais chut !

b. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R}) \cap C_n(\mathbb{R})$. Par stabilité de $C_n(\mathbb{R})$ par produit, l'application $\theta : C_n(\mathbb{R}) \to C_n(\mathbb{R})$ de l'énoncé est bien définie, et elle est linéaire par distributivité du produit par rapport à la somme dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc θ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(C_n(\mathbb{R}))$. Soit $M \in \mathrm{Ker}(\theta)$, alors $AM = 0$ donc $A^{-1}(AM) = M = 0$ d'où $\mathrm{Ker}(\theta) = \{0\}$ ce qui signifie que θ est injective. Comme $C_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie puisque sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui l'est (en fait $\dim(C_n(\mathbb{R})) = \dfrac{n^2}{2}$ si n est pair et $\dim(C_n(\mathbb{R})) = 1 + \dfrac{n^2-1}{2}$ puisque seule une case sur 2 est à choisir, sa symétrique par rapport au centre de la matrice est alors imposée - à part la case centrale si n est impair -), θ est un automorphisme de $\mathbb{C}_n(\mathbb{R})$. Comme $I_n \in C_n(\mathbb{R})$, I_n admet un antécédent par θ dans $C_n(\mathbb{R})$ donc $\exists B \in C_n(\mathbb{R}),\ \theta(B) = I_n = AB$. Par conséquent : $B = A^{-1} \in C_n(\mathbb{R})$.

3.5 **a.** <u>Méthode 1</u> : le polynôme $P = X^2 - \frac{X}{2} - \frac{1}{2}$ annule f par hypothèse. Soit $n \in \mathbb{N}$, on écrit $X^n = PQ_n + R_n$ la division euclidienne de X^n par P avec $R_n = a_nX + b_n$ (où $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^n$) car $\deg(R_n) < \deg(P) = 2$. Ainsi, en substituant l'endomorphisme f à X, on obtient $f^n = P(f) \circ Q_n(f) + R_n(f) = a_nf + b_n\text{id}_E$. Ceci justifie bien l'existence de deux suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ f^n = a_nf + b_n\text{id}_E$.

<u>Méthode 2</u> : $f^0 = \text{id}_E = 0.f + 1.\text{id}_E$ et $f^1 = f = 1.f + 0.\text{id}_E$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^n = a_nf + b_n\text{id}_E$, alors $f^{n+1} = a_nf^2 + b_nf = \frac{a_n}{2}(f + \text{id}_E) + b_nf = \left(\frac{a_n}{2} + b_n\right)f + \frac{a_n}{2}\text{id}_E$. En posant $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + b_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n}{2}$, on a bien $f^{n+1} = a_{n+1}f + b_{n+1}\text{id}_E$. Par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2,\ f^n = a_nf + b_n\text{id}_E$ ce qui justifie encore l'existence de deux suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ f^n = a_nf + b_n\text{id}_E$.

b. Si f est une homothétie, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f = \lambda\text{id}_E$ donc $\lambda^2 = \frac{\lambda+1}{2}$ d'après l'énoncé donc $P(\lambda) = 0$. Comme $P = (X-1)\left(X + \frac{1}{2}\right)$, on a $f = \text{id}_E$ ou $f = -\frac{\text{id}_E}{2}$. Dans ce cas, les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne sont pas uniques car la famille (f, id_E) est liée. Plus précisément, si $f = \text{id}_E$, alors $\forall n \in \mathbb{N},\ f^n = \text{id}_E$ donc une fois a_n quelconque choisi, on peut prendre $b_n = 1 - a_n$. De même, si $f = -\frac{\text{id}_E}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N},\ f^n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n\text{id}_E$ donc une fois a_n quelconque choisi, on peut prendre $b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{a_n}{2}$.

Par contre, si f n'est pas une homothétie, (f, id_E) est libre donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de **a.** sont uniques.

c. <u>Méthode 1</u> : reprenons la division euclidienne $X^n = PQ_n + a_nX + b_n$ et évaluons en 1 et $-\frac{1}{2}$ (les racines de P). Alors $a_n + b_n = 1^n = 1$ car $P(1) = 0$ et $-\frac{a_n}{2} + b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ car $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$. On résout ce système et $a_n = \frac{2}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$ et $b_n = \frac{1}{3}\left(1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$. Ainsi, $\alpha = \lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{2}{3}$ et $\beta = \lim_{n\to+\infty} b_n = \frac{1}{3}$.

<u>Méthode 2</u> : pour $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{2} + b_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{2} + \frac{a_n}{2}$. L'équation caractéristique associée est $z^2 - \frac{z}{2} - \frac{1}{2} = 0$ donc les solutions sont 1 et $-\frac{1}{2}$. Ainsi, $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \lambda + \mu\left(-\frac{1}{2}\right)^n$. Comme $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$ d'après **a.**, on a $\lambda + \mu = 0$ et $\lambda - \frac{\mu}{2} = 1$ donc $\lambda = \frac{2}{3} = -\mu$ d'où $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{2}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$. Si $n \geqslant 1$, $b_n = \frac{a_{n-1}}{2} = \frac{1}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) = \frac{1}{3}\left(1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$. Cette formule marche encore pur $n = 0$ car $b_0 = 1$. On retrouve les relations de la première méthode donc les mêmes limites $\alpha = \frac{2}{3}$ et $\beta = \frac{1}{3}$.

d. Posons donc $p = \frac{2}{3}f + \frac{1}{3}\text{id}_E = \frac{1}{3}(2f + \text{id}_E)$. Alors p est un endomorphisme de E, c'est un projecteur de E car $p^2 = \frac{1}{9}(4f^2 + 4f + \text{id}_E) = \frac{1}{9}(2f + 2\text{id}_E + 4f + \text{id}_E) = \frac{1}{3}(2f + \text{id}_E) = p$. Les sous-espaces importants sont $\text{Im}(p) = \text{Ker}(p - \text{id}_E) = \text{Ker}(f - \text{id}_E) = E_1(f)$ et $\text{Ker}(p) = \text{Ker}(2f + \text{id}_E) = E_{-1/2}(f)$ (qui sont des sous-espaces propres de f) donc p est la projection sur $E_1(f)$ parallèlement à $E_{-1/2}(f)$ (p est un projecteur spectral car f est diagonalisable puisque le polynôme P annulateur de f est scindé à racines simples).

3.6 **a.** Posons $n = \dim(E)$, alors on sait que $\dim(\mathcal{L}(E)) = n^2$. Ainsi, dès que $q \geqslant n^2 + 1$, la famille $(u, u^2, \cdots, u^q)$ est une famille d'endomorphismes possédant strictement plus de vecteurs que la dimension de $\mathcal{L}(E)$, elle est donc liée. Par conséquent $n^2 + 1 \in A$ qui est donc non vide, le théorème fondamental de la relation d'ordre sur les entiers montre alors que cette partie A de $\mathbb{N}$ admet un minimum. Bien sûr, comme $\chi_u = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_kX^k$ est un polynôme annulateur de u par le théorème de Cayley-Hamilton, il suffit de composer par u pour avoir $u \circ \chi_u(u) = 0 = u^{n+1} + \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k u^{k+1}$ ce qui prouve qu'on a beaucoup mieux, à savoir $n+1 \in A$.

b. ($\Longrightarrow$) Supposons $\mathrm{Im}\,(u) = \mathrm{Im}\,(u^2)$. Prenons $m = \mathrm{Min}(A)$, alors par définition $(u, u^2, \cdots, u^m)$ est liée. Il existe donc $(\lambda_1, \cdots, \lambda_m) \neq (0, \cdots, 0) \in \mathbb{K}^m$ tel que $\sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k u^k = 0$. Si on avait $\lambda_1 = 0$, on aurait $u^2 \circ v = 0$ avec $v = \sum\limits_{k=2}^{m} \lambda_k u^{k-2}$. Or, avec la formule du rang, comme $\mathrm{rang}\,(u) = \mathrm{rang}\,(u^2)$, on en déduit que $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = \dim(\mathrm{Ker}(u^2))$. Mais on a toujours l'inclusion $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(u^2)$, et elle nous donne ici l'égalité $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^2)$. Comme $u^2 \circ v$ se traduit par $\mathrm{Im}\,(v) \subset \mathrm{Ker}(u^2)$, on a donc aussi $\mathrm{Im}\,(v) \subset \mathrm{Ker}(u)$ donc $u \circ v = 0$ ce qui montre que $\sum\limits_{k=2}^{m} \lambda_k u^{k-1} = 0$ avec $(\lambda_2, \cdots, \lambda_m) \neq (0, \cdots, 0)$, ce qui contredit la minimalité de m. Par l'absurde, $\lambda_1 \neq 0$ donc $u = \sum\limits_{k=2}^{m} \mu_k u^k \in \mathrm{Vect}\big(\{u^k \mid k \geqslant 2\}\big)$ en posant $\mu_k = -\dfrac{\lambda_k}{\lambda_1}$.

($\Longleftarrow$) On suppose qu'il existe $p \geqslant 2$ et $(\lambda_2, \cdots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^{p-1}$ tels que $u = \sum\limits_{k=2}^{p} \lambda_k u^k$. On sait déjà qu'on a l'inclusion $\mathrm{Im}\,(u^2) \subset \mathrm{Im}\,(u)$. Soit $y \in \mathrm{Im}\,(u)$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$. On en déduit donc que $y = u(x) = \sum\limits_{k=2}^{p} \lambda_k u^k(x) = u^2\Big(\sum\limits_{k=2}^{p} \lambda_k u^{k-2}(x)\Big) \in \mathrm{Im}\,(u^2)$ et on a l'inclusion $\mathrm{Im}\,(u) \subset \mathrm{Im}\,(u^2)$.

Par double inclusion, on a établi que $\mathrm{Im}\,(u) = \mathrm{Im}\,(u^2)$.

Conclusion, par double implication, $\mathrm{Im}\,(u) = \mathrm{Im}\,(u^2) \Longleftrightarrow u \in \mathrm{Vect}\big(\{u^k \mid k \geqslant 2\}\big)$.

3.7 Traitons d'abord des cas simples :

- Si $a = 0$, alors $P = 0$ et tous les réels sont des racines de P.
- Si $n = 1$ et $a \neq 0$, alors $P = X + a - (X - a) = 2a$ est constant non nul.
- Si $n = 2$ et $a \neq 0$, alors $P = (X+a)^2 - (X-a)^2 = 4aX$ et seul 0 est racine de P.

Nous traiterons dorénavant le cas général où $n \geqslant 2$ et $a \neq 0$. On constate, avec le binôme de Newton, que $P = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k X^{n-k} - \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k a^k X^{n-k} = 2 \sum\limits_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} a^{2k+1} X^{n-2k-1}$ donc P est de degré $n-1$ et de coefficient dominant $\lambda = 2na$. Soit $z \in \mathbb{C}$ une racine de P, alors comme $P(a) = (2a)^n \neq 0$, on a $z \neq a$ et $(z+a)^n - (z-a)^n = 0 \Longleftrightarrow (z+a)^n = (z-a)^n \Longleftrightarrow \left(\dfrac{z+a}{z-a}\right)^n = 1 \Longleftrightarrow \left(\exists k \in [\![1; n-1]\!],\ \dfrac{z+a}{z-a} = e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)$. En effet, $k = 0$ est impossible car on ne peut pas avoir $\dfrac{z+a}{z-a} = 1$. Ainsi, il existe un entier $k \in [\![1; n-1]\!]$ tel que $\dfrac{z+a}{z-a} = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \Longleftrightarrow z = a\dfrac{e^{\frac{2ik\pi}{n}} + 1}{e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1} = a\dfrac{e^{\frac{ik\pi}{n}} + e^{\frac{ik\pi}{n}}}{e^{\frac{ik\pi}{n}} - e^{\frac{ik\pi}{n}}} = -ia\mathrm{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ (avec $\frac{k\pi}{n} \in]0; \pi[$). En remontant les calculs, on constate que les imaginaires purs $z_k = -ia\mathrm{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ sont des racines de P et, comme la fonction cotan est injective sur $]0; \pi[$, on a $z_1, \cdots, z_{n-1}$ distincts. Puisque P est de degré $n-1$, on a le compte de ses racines et, d'après le cours, $P = 2na \prod\limits_{k=1}^{n-1} \Big(X + ia\mathrm{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)\Big)$.

3.8 On sait que $z \in \mathbb{C}$ est racine au moins double de P_n si et seulement si $P_n(z) = P'_n(z) = 0$.

Analyse : soit $n \geqslant 2$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que l'on ait $P_n(z) = P'_n(z) = 0$, alors $P_n(z) = (z-1)^n - z^n + 1 = 0$ et $P'_n(z) = n\big((z-1)^{n-1} - z^{n-1}\big) = 0$ donc $z \neq 0$. Comme $n \geqslant 2$ et $\left(\dfrac{z-1}{z}\right)^{n-1} = 1$, il existe $k \in [\![1; n-2]\!]$ tel que $\dfrac{z-1}{z} = 1 - \dfrac{1}{z} = e^{\frac{2ik\pi}{n-1}}$ ($k \neq 0$ car $1 - \frac{1}{z} \neq 1$). Alors, $\left(\dfrac{z-1}{z}\right)^n - 1 + \left(\dfrac{1}{z}\right)^n = 0$ d'où, comme $\left(\dfrac{z-1}{z}\right)^{n-1} = 1$ donc $\left(\dfrac{z-1}{z}\right)^n = \dfrac{z-1}{z} = e^{\frac{2ik\pi}{n-1}}$ puis $\dfrac{1}{z} = 1 - e^{\frac{2ik\pi}{n-1}} = e^{\frac{ik\pi}{n-1}}\left(e^{\frac{-ik\pi}{n-1}} - e^{\frac{ik\pi}{n-1}}\right) = -2i\sin\left(\dfrac{k\pi}{n-1}\right)e^{\frac{ik\pi}{n-1}}$ d'où $\left(\dfrac{1}{z}\right)^n = (-1)^n 2^n i^n \left(\sin\left(\dfrac{k\pi}{n-1}\right)\right)^n e^{\frac{ikn\pi}{n-1}}$ et $\left(\dfrac{z-1}{z}\right)^n - 1 = e^{\frac{2ik\pi}{n-1}} - 1 = 2i\sin\left(\dfrac{k\pi}{n-1}\right)e^{\frac{ik\pi}{n-1}}$, on arrive à $2i\sin\left(\dfrac{k\pi}{n-1}\right)e^{\frac{ik\pi}{n-1}} + (-1)^n(-1)^k 2^n i^n \left(\sin\left(\dfrac{k\pi}{n-1}\right)\right)^n e^{\frac{ik\pi}{n-1}} = 0$ car $e^{\frac{ikn\pi}{n-1}} = e^{ik\pi}e^{\frac{ik\pi}{n-1}} = (-1)^k e^{\frac{ik\pi}{n-1}}$ donc, en simplifiant par $2ie^{\frac{ik\pi}{n-1}} \neq 0$, en factorisant par $\sin\left(\dfrac{k\pi}{n-1}\right)$, et comme $\sin\left(\dfrac{k\pi}{n-1}\right) \neq 0$ car $0 < \dfrac{k\pi}{n-1} < \pi$, il ne reste que $1 + (-1)^{n+k}2^{n-1}i^{n-1}\left(\sin\left(\dfrac{k\pi}{n-1}\right)\right)^{n-1} = 0 \quad (1)$.

Ceci impose que $n-1$ est pair pour que $i^{n-1} \in \mathbb{R}$. On écrit $n = 2p+1$ et on a $(-1)^{k+p}2^{2p}\sin^{2p}\left(\dfrac{k\pi}{2p}\right) = 1$. On a donc $\sin\left(\dfrac{k\pi}{2p}\right) = \dfrac{1}{2}$ car $\dfrac{k\pi}{2p} \in]0;\pi[$. Ainsi, $\dfrac{k\pi}{2p} = \dfrac{\pi}{6}$ ou $\dfrac{5\pi}{6}$ donc $p = 3k$ ou $5p = 3k$. Dans les deux cas, comme 3 et 5 sont premiers entre eux, p est un multiple de 3 par le lemme de Gauss. Ainsi, $n = 6m+1$.

Synthèse : supposons que $n = 6m+1$ avec $m \in \mathbb{N}^*$, alors $P_n = P_{6m+1} = (X-1)^{6m+1} - X^{6m+1} + 1$ et $P'_n = (6m+1)\big((X-1)^{6m} - X^{6m}\big)$. Prenons $k = m$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que $1 - \dfrac{1}{z} = e^{\frac{2ik\pi}{n-1}} = e^{\frac{2im\pi}{6m}} = e^{\frac{i\pi}{3}} = -j^2$ de sorte que $\dfrac{1}{z} = 1 + j^2 = -j$ donc $z = -j^2$. Alors $P_n(-j^2) = (-j^2-1)^{6m+1} - (-j^2)^{6m+1} + 1 = j^{6m+1} + (j^2)^{6m+1} + 1$ donc $P_n(-j^2) = j + j^2 + 1 = 0$ et $P'_n(-j^2) = (6m+1)\big((-j^2-1)^{6m} - (-j^2)^{6m}\big) = (6m+1)\big((j)^{6m} - (j^2)^{6m}\big)$ donc on a $P'_n(-j^2) = (6m+1)(1-1) = 0$. Par conséquent, $-j^2$ est racine au moins double de P_n. Comme $P''_n = (6m+1)(6m)\big((X-1)^{6m-1} - X^{6m-1}\big)$, on a $P''_n(-j^2) = (6m+1)(6m)\big((-j^2-1)^{6m-1} - (-j^2)^{6m-1}\big)$ d'où $P''_n(-j^2) = (6m+1)(6m)\big((j)^{6m-1} + (j^2)^{6m-1}\big) = (6m+1)(6m)(j^2+j) = -(6m+1)(6m) \neq 0$ donc $-j^2$ est racine d'ordre exactement 2 de P_n. Comme $P_n \in \mathbb{R}[X]$, $-j = \overline{-j^2}$ est aussi racine double de P_n.

Conclusion : les valeurs de n telles que P_n admet une racine double sont exactement les entiers de la forme $6m+1$ avec $m \in \mathbb{N}^*$. Les racines doubles de P_n sont alors $-j^2$ et $-j$.

3.9 **a.** Soit $x \in E$, comme $\mathrm{id}_E = p + q$, on a $x = p(x) + q(x) \in \mathrm{Im}\,(p) + \mathrm{Im}\,(q)$ donc on a déjà $E = \mathrm{Im}\,(p) + \mathrm{Im}\,(q)$.

D'après la formule de GRASSMANN, on a $\dim(E) = \dim(\mathrm{Im}\,(p)) + \dim(\mathrm{Im}\,(q)) - \dim(\mathrm{Im}\,(p) \cap \mathrm{Im}\,(q))$ (1) donc, comme $\dim(\mathrm{Im}\,(p) \cap \mathrm{Im}\,(q)) \geqslant 0$, on en déduit que $\dim(E) \leqslant \mathrm{rang}\,(p) + \mathrm{rang}\,(q)$. Or on a l'hypothèse $\mathrm{rang}\,(p) + \mathrm{rang}\,(q) \leqslant \dim(E)$ ainsi on a $\mathrm{rang}\,(p) + \mathrm{rang}\,(q) = \dim(E)$ par double inégalité donc, avec (1), on a $\dim(\mathrm{Im}\,(p) \cap \mathrm{Im}\,(q)) = 0$ qui montre que $\mathrm{Im}\,(p) \cap \mathrm{Im}\,(q) = \{0_E\}$. Par conséquent, $E = \mathrm{Im}\,(p) \oplus \mathrm{Im}\,(q)$.

b. Méthode 1 : soit $x \in E$, en écrivant $x = p(x) + q(x)$ avec $p(x) = y \in \mathrm{Im}\,(p)$ et $q(x) = z \in \mathrm{Im}\,(q)$. Par construction, $p(x) = y$ donc p est la projection sur $\mathrm{Im}\,(p)$ parallèlement à $\mathrm{Im}\,(q)$. Par symétrie, $q(x) = z$ donc q est la projection sur $\mathrm{Im}\,(q)$ parallèlement à $\mathrm{Im}\,(p)$.

Méthode 2 : $q = \mathrm{id}_E - p$ donc $\mathrm{Ker}(q) = \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_E - p) \subset \mathrm{Im}\,(p)$ car $\forall x \in \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_E - p)$, $x = p(x) \in \mathrm{Im}\,(p)$. Avec la formule du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(q)) = \dim(E) - \mathrm{rang}\,(q) = \mathrm{rang}\,(p) = \dim(\mathrm{Im}\,(p))$ avec la question **a.** donc, par inclusion et égalité des dimensions, $\mathrm{Ker}(q) = \mathrm{Im}\,(p)$. Ainsi, $p^2 = p \circ p = p \circ (\mathrm{id}_E - q) = p - p \circ q) = p$ donc p est un projecteur. Par symétrie, q est un projecteur.