TD 04 : ALGÈBRE LINÉAIRE

PSI 1 2024-2025 **vendredi 27 septembre 2024**

4.1 *OdlT 2015/2016 ENSEA planche 283I*

a. Caractériser géométriquement l'endomorphisme canoniquement associé à $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

b. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $M = AB$.

c. Montrer avec les conditions de la question précédente que $BA = I_2$.

4.2 *Centrale Maths1 PSI 2016* Owain Biddulph

Soit E un espace de dimension n, f un endomorphisme E.

a. Si $n = 3$, $f^2 = 0$ et $f \neq 0$, montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b. Montrer que : $f^2 = 0 \iff (\exists (g, h) \in \mathcal{L}(E)^2,\ f = h \circ g \text{ et } g \circ h = 0)$.

4.3 *Mines PSI 2016* Mathieu Perrin I

Soit $n \geqslant 1$, $E = \mathbb{C}_n[X]$, $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n+1}}$ et $u : E \to \mathbb{C}^{n+1}$ défini par $u(P) = (P(1), P(\omega), \cdots, P(\omega^n))$.

a. Montrer que u définit un isomorphisme d'espaces vectoriels.

b. Déterminer la matrice de u dans les bases canoniques.

c. Déterminer $\sum\limits_{m=0}^{n} P(\omega^m)\omega^{-km}$. En déduire u^{-1}.

4.4 *Mines PSI 2017* Alexis Trubert I

Soit $n \geqslant 1$, trouver les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent avec toutes les matrices de rang 1.

4.5 *Mines PSI 2018* Victor Bourdeaud'hui I

Soit des réels $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ deux à deux distincts et $t_1, \cdots, t_n$ deux à deux distincts et strictement positifs.

a. Soit des réels $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ non tous nuls et $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k x^{\beta_k}$ avec $\beta_1, \cdots, \beta_p$ deux à deux distincts. Montrer que f s'annule au plus $p - 1$ fois sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Montrer que la matrice $A = (t_i^{\alpha_j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible.

4.6 *ENS Cachan PSI 2019 (OdlT 2019/2020 X-ENS PSI planche 37)* Léo Simplet

Soit ABC un triangle du plan. On note a, b, c les affixes respectives des points A, B, C.
On note, pour tout entier $n \geqslant 2$, $\omega_n = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et plus particulièrement $j = \omega_3 = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.
Pour un entier $n \geqslant 3$, on note $V_n = (\omega_n^{i(j-1)})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n-2 \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in \mathcal{M}_{n-2,n}(\mathbb{C})$.

a. Montrer que ABC est équilatéral direct si et seulement si $a + bj + cj^2 = 0$ avec $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

b. Déterminer, pour $n \geqslant 3$, le rang de la matrice V_n.

c. Montrer que $\forall k \in [\![1; n-1]\!]$, $\sum\limits_{j=0}^{n-1} \omega_n^{jk} = 0$.

d. Trouver une base de $\mathrm{Ker}(V_n)$.

e. On se donne $n \geqslant 3$ points $A_1, \ldots, A_n$ du plan d'affixes respectives $a_1, \ldots, a_n$, montrer que $A_1 \cdots A_n$ est un polygone régulier direct à n côtés si et seulement si $\forall k \in [\![1; n-2]\!]$, $a_1 + a_2\omega_n^k + \cdots + a_n\omega_n^{k(n-1)} = 0$.

4.7 *Mines PSI 2021* Quentin Granier II

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $A_n = \left(\binom{j}{i}\right)_{0\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$. Par exemple, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note d_k le nombre de permutations de $[\![1;k]\!]$ (bijections de $[\![1;k]\!]$ dans $[\![1;k]\!]$) qui n'ont aucun point fixe. Par convention, on pose $d_0 = 1$.

a. Calculer A_n^{-1}. Indication : considérer un endomorphisme bien choisi de $\mathbb{R}_n[X]$.

b. Montrer que $\forall p \in [\![0;n]\!],\ p! = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} d_k$.

c. Trouver une relation entre A_n^T et les matrices colonnes $\begin{pmatrix} d_0 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0! \\ \vdots \\ n! \end{pmatrix}$.

d. En déduire une expression de d_n sous forme de somme.

e. Si on note p_n la probabilité, en choisissant une permutation de $[\![1;n]\!]$ au hasard, d'obtenir une permutation sans point fixe, quelle est la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$?

4.8 *Mines PSI 2021* Johan Haramboure I

Soit un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ telles que $A \neq 0$, B nilpotente et $AB = BA$, montrer que $\operatorname{rang}(AB) < \operatorname{rang}(A)$.

b. Soit $A_1, \cdots, A_n$ des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent 2 à 2, montrer que $A_1 \cdots A_n = 0$.

c. La propriété de **b.** est-elle encore vraie si on ne suppose plus que les matrices commutent deux à deux ?

4.9 *Mines PSI 2023* Alban Dujardin II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$. Soit $D : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ définie par $D(P) = P'$.

a. Trouver toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telles que $AM = MA$.

b. Trouver tous les sous-espaces de $\mathbb{R}_n[X]$ qui sont stables par D.

c. Déterminer la dimension de l'ensemble des endomorphismes f de $\mathbb{R}_n[X]$ tels que $D \circ f = f \circ D$.

4.10 *Mines-Télécom PSI 2023* Olivier Farje I

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$.

a. Montrer qu'il existe un vecteur $a \in E$ tel que $\mathcal{B} = (a, f(a), \cdots, f^{n-1}(a))$ est une base de E.

b. L'application f est-elle bijective ?

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M^2 \neq 0$ et $M^3 = 0$.

c. Montrer que M est semblable à $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

d. Montrer que les matrices qui commutent avec M sont des polynômes en M.