DEVOIR MAISON 3:GIBIER DE NILPOTENCE

PSI 1 2024/2025 **pour le vendredi 04 octobre 2024**

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension* n *et soit* f *un endomorphisme de* E*. On suppose que* f *est nilpotent, c'est-à-dire qu'il existe un entier* m *tel que* $f^m = 0$ *où* $f^m = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{m \text{ fois}}$ *et où* 0 *est ici l'endomorphisme nul.*

On pose $p = \mathrm{Min}(k \in \mathbb{N} \mid f^k = 0) \in \mathbb{N}^*$ *qui est appelé l'indice de nilpotence de* f*.*

PARTIE 1 : IMAGES ET NOYAUX

1.1 Justifier que p est bien défini et que, pour $q \in \mathbb{N}$, on a : $\begin{cases} f^q = 0 & \text{si } q \geqslant p, \\ f^q \neq 0 & \text{si } q < p. \end{cases}$

Que peut-on dire de f si $p = 1$? Comparer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ si $p = 2$.

1.2 Ça monte et ça descend

1.2.1 Montrer que $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathrm{Ker}(f^k) \subset \mathrm{Ker}(f^{k+1})$.

1.2.2 Montrer que $\forall k \in \mathbb{N},\ \big(\mathrm{Ker}(f^k) = \mathrm{Ker}(f^{k+1}) \Longrightarrow \forall q \geqslant k,\ \mathrm{Ker}(f^q) = \mathrm{Ker}(f^k)\big)$.

1.2.3 Prouver les inclusions $\{0_E\} \subset \mathrm{Ker}(f) \subset \cdots \subset \mathrm{Ker}(f^{p-1}) \subset \mathrm{Ker}(f^p) = E$ et qu'elles sont strictes.

1.2.4 Établir que $\{0_E\} = \mathrm{Im}(f^p) \subset \mathrm{Im}(f^{p-1}) \subset \cdots \subset \mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f) \subset E$ et que ces inclusions sont strictes.

1.3 Majoration de p

1.3.1 Établir avec 1.2.3 que : $\forall k \in [\![0;p]\!],\ \dim \mathrm{Ker}(f^k) \geqslant k$.

1.3.2 En déduire alors que $p \leqslant n$.

"L'indice de f nilpotent est inférieur à la dimension de l'espace vectoriel sur lequel il est défini."

PARTIE 2 : ORDEM E PROGRESSO

Comme $f^{p-1} \neq 0$*, il existe un vecteur* $x_0 \in E$ *tel que* $f^{p-1}(x_0) \neq 0_E$*.*

2.1 Les bases de la liberté

2.1.1 Prouver que $(x_0, f(x_0), \cdots, f^{p-1}(x_0))$ est une famille libre.

2.1.2 Sans utiliser la partie 1, justifier qu'on a bien $p \leqslant n$.

2.1.3 Que peut-on dire de $(x_0, f(x_0), \cdots, f^{p-1}(x_0))$ si $p = n$?

2.2 Un exemple : soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = (x - y + z, 2x, x + y - z)$

2.2.1 Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$. Calculer $f^2(x,y,z)$ et montrer que f est nilpotent d'indice 3.

2.2.2 Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ (bases et équations), et aussi $\mathrm{Ker}(f^2)$ et $\mathrm{Im}(f^2)$.

2.2.3 Trouver un vecteur $x_0 \in \mathbb{R}^3$ tel que $(x_0, f(x_0), f^2(x_0))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

<u>On suppose pour la suite du devoir que $p = n$</u>.

PARTIE 3 : ESPACES STABLES PAR f

3.1 Noyaux et images : on reprend les notations de la partie précédente à propos du vecteur x_0. Soit $k \in [\![1; n]\!]$

3.1.1 Montrer que $(f^k(x_0), \cdots, f^{p-1}(x_0))$ est une base de $\mathrm{Im}(f^k)$. En déduire $\mathrm{rg}(f^k)$.

3.1.2 Quelle est donc la dimension de $\mathrm{Ker}(f^k)$? Donner une base de $\mathrm{Ker}(f^k)$.

3.2 Condition nécessaire de stabilité : soit F un sous-espace f-stable de dimension m et soit f_F définie par $\begin{cases} f_F \ : \ F & \to \ F \\ \quad x & \to \ f_F(x) = f(x) \end{cases}$; f_F est donc l'application induite par f dans F

3.2.1 Prouver que f_F est un endomorphisme nilpotent. En déduire avec la partie 1 que $F \subset \mathrm{Ker}(f^m)$.

3.2.2 Établir enfin que $F = \mathrm{Ker}(f^m)$.

3.3 Montrer qu'il existe $n + 1$ sous-espaces f-stables. Lesquels ?

PARTIE 4 : COMMUTANT DE f

On se place toujours sous l'hypothèse que $p = n$. On pose $\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid g \circ f = f \circ g\}$; c'est le commutant de f : l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec f.

4.1 Montrer que $\mathcal{C}(f)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.

4.2 Condition nécessaire de commutation : soit $g \in \mathcal{C}(f)$

4.2.1 Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0$ et que $(x_0, f(x_0), \cdots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E.

Il existe donc $(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $g(x_0) = a_0 x_0 + a_1 f(x_0) + \cdots + a_{n-1} f^{n-1}(x_0)$.

4.2.2 Montrer que $g = a_0 \,\mathrm{id}_E + a_1 f + \cdots + a_{n-1} f^{n-1}$.

4.3 Réciproquement, soit $(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ et $g = a_0 \,\mathrm{id}_E + a_1 f + \cdots + a_{n-1} f^{n-1}$, prouver que $g \in \mathcal{C}(f)$.

4.4 Donner enfin une base et la dimension de $\mathcal{C}(f)$ considéré comme $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

PARTIE 5 : APPLICATION ANALYTIQUE

Soit $E = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \varphi''' - 3\varphi'' + 3\varphi' - \varphi = 0\}$. Le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ *nous permet d'affirmer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 puisque l'equation différentielle que vérifie un élément de E est linéaire, normalisée et d'ordre 3. On définit alors* $\begin{cases} f \ : \ E & \to \ E \\ \quad \varphi & \to \ f(\varphi) = \varphi' - \varphi \end{cases}$

5.1 Justifier que f est un endomorphisme de E nilpotent d'indice inférieur ou égal à 3.

Soit $\varphi_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi_0(x) = x^2 e^x$.

5.2 Montrer que $\varphi_0 \in E$ et que $f^2(\varphi_0) \neq 0$. Donner enfin l'indice de f et une base de E.