PROGRAMME DE KHÔLLE SEMAINE 03

PSI 1 2024-2025 **du lundi 30/09 au vendredi 04/10**

1 Intégrales sur un segment : voir programme précédent

2 Comparaison locale des fonctions : voir programme précédent

3 Intégrales convergentes et divergentes : voir programme précédent

4 Fonctions intégrables : voir programme précédent

5 Révisions d'algèbre linéaire :

- espaces et sous-espaces vectoriels, sous-espaces engendrés ;
- somme de deux sous-espaces, somme directe, sous-espaces supplémentaires ;
- applications linéaires, noyau et image, caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité ;
- projecteurs et symétries : passage de l'algébrique au géométrique ;
- famille libre, génératrice, base, propriétés de ces familles ;
- sous-espace stables par un endomorphismes et endomorphismes induits ;
- théorème du rang (isomorphisme entre un supplémentaire du noyau et l'image) ;
- application donnée par ses restrictions à des sous-espaces en somme directe ;
- familles libres, génératrices, liées, bases éventuellement infinies (hors programme néanmoins) ;
- définition des hyperplans (prog. en dimension finie) : supplémentaire droite ou dimension $\mathsf{dim}(\mathsf{E})-1$;
- les hyperplans sont les noyaux des formes linéaires non nulles ;
- les hyperplans n'ont qu'une seule équation à un coefficient multiplicatif près ;
- calcul matriciel : somme, produit, espace vectoriel, anneau, matrices élémentaires, dimension ;
- transposée, matrices symétriques, antisymétriques, diagonales, triangulaires, trace ;
- inverses de matrices, calcul de puissances, matrices de Gauss ;
- représentations matricielles : famille, matrice d'application linéaire, d'endomorphisme ;
- isomorphisme matrice-applications linéaires, relation avec le produit, l'inverse ;
- matriciellement : image d'un vecteur, changement de bases, matrices de passage entre bases ;
- changement de bases pour une application linéaire, matrices équivalentes, matrices semblables ;

QUESTIONS DE COURS :

1. énoncer le théorème du rang (th. 2.13)
2. énoncer les propriétés d'une projection p sur F parallèlement à G (th. 2.15)
3. énoncer la caractérisation géométrique d'un projecteur (th. 2.16)
4. énoncer la dualité liant les hyperplans et les formes linéaires non nulles en dimension finie (th. 2.36)
5. énoncer la formule de changement de bases dans sa forme "endomorphisme" (th. 2.53)
6. prouver que $\mathsf{Ker}(f) \cap \mathsf{Ker}(g) \subset \mathsf{Ker}(f+g)$ et $\mathrm{Im}\,(f+g) \subset \mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Im}\,(g)$ (rem. 2.20)
7. prouver que $\mathrm{rang}\,(g \circ f) \leqslant \mathsf{Min}(\mathrm{rang}\,(f), \mathrm{rang}\,(g))$ (prop. 2.35)
8. prouver que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ et donner les dimensions et bases de chaque sev (prop. 2.39)

Prévision pour la prochaine semaine : suite de l'algèbre linéaire