DEVOIR 04 : INTÉGRALES ET LINÉARITÉ

PSI 1 2024-2025 **mardi 24 septembre 2024**

QCM

1 *Conditions de convergence : soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continue et* $(u_n)_{n\geqslant 0}$ *une suite positive qui tend vers* $+\infty$

1.1 $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ CV $\iff \int_{-x}^{x} f \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$

1.2 $\int_{0}^{+\infty} f$ CV $\iff \int_{0}^{u_n} f \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$

1.3 (f paire et $\int_{-x}^{x} f \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}) \Longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f$ CV

1.4 (f positive et $\int_{0}^{u_n} f \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}) \Longrightarrow \int_{0}^{+\infty} f$ CV

2 *Intégrabilité : soit* I *un intervalle et* $f, g : I \to \mathbb{R}$ *continue par morceaux (quand on dit intégrable, c'est intégrable sur* I*)*

2.1 f intégrable $\Longrightarrow f^2$ intégrable

2.2 f^2 intégrable $\Longrightarrow f$ intégrable

2.3 si f intégrable sur I : $\left|\int_I f\right| \leqslant \int_I |f|$

2.4 si I est borné, f^2 intégrable $\Longrightarrow f$ intégrable

3 *Endomorphisme : soit* E *un espace de dimension finie,* $f \in \mathcal{L}(E)$ *et* S *un supplémentaire de* $\mathrm{Ker}(f)$

3.1 $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$

3.2 $f\big|_S^{\mathrm{Im}(f)}$ est un isomorphisme

3.3 $f^2 = f \Longrightarrow E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$

3.4 $f^2 \neq 0 \Longleftarrow \mathrm{Ker}(f) \not\subset \mathrm{Im}(f)$

4 *Noyaux et images : soit* E *un espace vectoriel et* $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$

4.1 $\mathrm{Ker}(f+g) \subset \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Ker}(g)$

4.2 $\mathrm{Im}(f+g) \subset \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$

4.3 $\mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Ker}(f \circ g)$

4.4 $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(f \circ g)$

Énoncé Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et S un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f)$ dans E. Que dit le théorème du rang (pas seulement la formule du rang en dimension finie) ?

Preuve Comparaison série/intégrale : on se donne une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue, décroissante et tendant vers 0 en $+\infty$. Établir un encadrement, pour $n \in \mathbb{N}^*$, de $S_n = \sum_{k=0}^{n} f(k)$ à l'aide d'intégrales. En déduire que $\sum_{n\geqslant 0} f(n)$ converge si et seulement si f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 1 Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha \geqslant \beta$. On définit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+$ par $f(t) = \dfrac{1}{t^\alpha + t^\beta}$.

a. Déterminer des équivalents simples de $f(t)$ au voisinage de 0^+ et de $+\infty$.

b. En déduire pour quelles valeurs de (α, β) la fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ défini par $\forall (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ f(x, y, z, t) = \big(x+y+z, -y-z-t, -x+t, x+y+z\big)$. On admet que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$. Trouver la dimension et une base de $\mathrm{Ker}(f)$. Calculer $f \circ f$. En déduire $\mathrm{Im}(f)$.

DEVOIR 04 NOM : PRÉNOM :

QCM Répondre dans le tableau ci-dessous au QCM : mettre une croix dans la case de la ligne i colonne j revient à déclarer la question $i.j$ vraie. Ne rien mettre revient à la déclarer fausse.

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1					
2					
3					
4					

Énoncé

Preuve

Exercice 1

Exercice 2

DEVOIR 04	NOM : COCO	PRÉNOM : SINUS

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1			X	X	
2			X	X	
3		X	X		
4		X	X		

1.1 Faux : $f = \mathrm{id}$ **1.2** Faux : $u_n = n$ et $f(x) = \sin(2\pi x)$ **1.3** Vrai : $\int_{-x}^{x} f = 2\int_0^x f$ admet comme limite $\int_0^{+\infty} f$ qui vaut aussi $\int_{-\infty}^0 f$ **1.4** Vrai : par le TLM, $F : x \mapsto \int_0^x f$ admet une limite $\ell' \in \overline{\mathbb{R}}$ en $+\infty$ car F est croissante et $\ell' = \ell \in \mathbb{R}$ puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} F(u_n) = \ell$ est finie par hypothèse.
2.1 Faux : $I =]0;1]$ et $f(t) = t^{-1/2}$ **2.2** Faux : $I = [1;+\infty[$ et $f(t) = t^{-1}$ **2.3** Vrai : inégalité triangulaire
2.4 Vrai : inégalité de CAUCHY-SCHWARZ.
3.1 Faux : si $E = \mathbb{R}^2$ et $f(x,y) = (0,x)$ par exemple **3.2** Vrai : c'est le maintenant célèbre théorème du rang
3.3 Vrai : $f^2 = f \Longleftrightarrow f$ est un projecteur alors on sait que $E = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$ **3.4** Faux : avec par exemple $f(x,y,z) = (0,0,x)$, on a bien $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(e_2,e_3) \not\subset \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(e_3)$ et pourtant $f^2 = 0$.
4.1 Faux : c'est $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Ker}(f+g)$ **4.2** et **4.3** Vrais : vu en cours **4.4** Faux : c'est $\mathrm{Im}(f \circ g) \subset \mathrm{Im}(f)$.

Énoncé Avec ces notations, f induit un isomorphisme entre S et $\mathrm{Im}(f)$; c'est-à-dire que l'application restreinte $g = f|_S^{\mathrm{Im}(f)} : S \to \mathrm{Im}(f)$ définie par $g(x) = f(x)$ pour $x \in S$ est un isomorphisme.

Preuve Si $k \geqslant 1$, la croissance de l'intégrale montre que $\int_k^{k+1} f(t)dt \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^k f(t)dt$ qu'on somme (première inégalité valable si $k = 0$) pour $k \in [\![1;n]\!]$: $\int_0^{n+1} f(t)dt \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n} f(k) \leqslant f(0) + \int_0^n f(t)dt$ (dessin).

• Si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers S, $\left(\int_0^{n+1} f(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par S par la première inégalité donc $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ F(x) = \int_0^x f(t)dt \leqslant \int_0^{\lfloor x\rfloor+1} f(t)dt \leqslant S$ donc $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge et $f(\geqslant 0)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

• Si f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par $f(0) + \int_0^{+\infty} f$ par la seconde inégalité donc $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge par le théorème de la limite monotone et $\sum\limits_{n\geqslant 0} f(n)$ est donc convergente.

Par double implication, $\sum\limits_{n\geqslant 0} f(n)$ converge si et seulement si f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 1 La fonction f est bien continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
a. • Si $\alpha = \beta$, $f(t) = \dfrac{1}{2t^\alpha}$ d'où $f(t) \underset{0^+}{\sim} \dfrac{1}{2t^\alpha}$ et $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2t^\alpha}$. • Si $\alpha > \beta$, $f(t) \underset{0^+}{\sim} \dfrac{1}{t^\beta}$ et $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^\alpha}$.
b. Si $\alpha = \beta$, f n'est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ pour aucune valeur de α car f est non intégrable sur $]0;1]$ si $\alpha \geqslant 1$ et f est non intégrable sur $[1;+\infty[$ si $\alpha \leqslant 1$ par le critère de RIEMANN.
Si $\alpha > \beta$, par théorème de comparaison et critère de RIEMANN, f est intégrable sur $]0;1]$ si et seulement si $\beta < 1$ et f est intégrable sur $[1;+\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.
Au final, f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $\beta < 1 < \alpha$.

Exercice 2 Pour $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$, $f(x,y,z,t) = 0 \Longleftrightarrow (x = t$ et $y = -z-t) \Longleftrightarrow (x,y,z,t) = (t,-z-t,z,t)$ donc $(x,y,z,t) \in \mathrm{Ker}(f) \Longleftrightarrow (x,y,z,t) = z(0,-1,1,0) + t(1,-1,0,1)$. Ainsi $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(v_1,v_2)$ avec $v_1 = (0,-1,1,0)$ et $v_2 = (1,-1,0,1)$. Comme (v_1,v_2) libre, $\dim \mathrm{Ker}(f) = 2$. Par la formule du rang $\mathrm{Im}(f)$ est aussi un plan. De plus, par calculs, on trouve $f \circ f(x,y,z,t) = 0$ donc $f^2 = 0$ d'où $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
On en déduit que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f)$ (inclusion et égalité des dimensions).