DEVOIR 05 : ALGÈBRE LINÉAIRE

PSI 1 2024-2025 **mardi 01 octobre 2024**

QCM

1 *Petit et grand O, équivalents*

1.1 $\dfrac{\ln(x)}{x^2-1} \underset{1}{\sim} 1$

1.2 $\dfrac{\ln(x)}{x^2} \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

1.3 $\ln(x) \underset{0}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$

1.4 $\ln(1+e^x) - x \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

2 *Projections et symétries : soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et deux sous-espaces F et G de E qui sont supplémentaires (c'est-à-dire $E = F \oplus G$), soit p la projection sur F parallèlement à G*

2.1 $\mathrm{id}_E - 2p$ est la symétrie par rapport à G parallèlement à F

2.2 $\mathrm{id}_E - p$ est la projection sur G parallèlement à F

2.3 $\forall x \in E,\ x \in F \Longleftrightarrow p(x) = x$

2.4 $\forall x \in E,\ x - p(x) \in F$

3 *Soit E un espace de dimension n, $(v_1, \dots, v_p)$ une famille de vecteurs de E et q tel que $1 \leqslant q \leqslant p$.*

3.1 $(v_1, \dots, v_p)$ libre $\Longrightarrow p \leqslant n$

3.2 $(v_1, \dots, v_q)$ libre $\Longrightarrow (v_1, \dots, v_p)$ libre

3.3 $\big((v_1, \dots, v_p)$ libre et $p = n\big) \Longleftrightarrow (v_1, \dots, v_p)$ base de E

3.4 $p = n \Longrightarrow (v_1, \dots, v_p)$ génératrice

4 *Théorème du rang : soit E et F 2 $\mathbb{K}$-evs de dimensions respectives n et p et $f \in \mathcal{L}(E, F)$*

4.1 $\big(n = p$ et f injective$\big) \Longrightarrow \big(f$ isomorphisme$\big)$

4.2 $\big(f$ injective$\big) \Longleftrightarrow \big(\mathrm{rg}(f) = n\big)$

4.3 $\big(f$ surjective$\big) \Longrightarrow \big(p \leqslant n\big)$

4.4 $\big(n \leqslant p\big) \Longrightarrow \big(f$ est injective$\big)$

Énoncé Soit E un $\mathbb{K}$-espace de dimension finie, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, f un endomorphisme de E. Définir les matrices A, A' et P et rappeler la classique formule de changement de bases les reliant toutes les trois.

Preuve Soit E un espace de dimension n, H un hyperplan de E et un vecteur $e \neq 0_E \in E$ tel que $E = H \oplus D$ où $D = \mathrm{Vect}(e)$. Soit φ et ψ deux formes linéaires non nulles telles que $H = \mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\psi)$.
Montrer qu'il existe un scalaire λ (que vous donnerez en fonction de φ, ψ et e) tel que $\psi = \lambda\varphi$.

Exercice 1 Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x, y, z) = \left(\dfrac{x - y - z}{2}, y, \dfrac{-x - y + z}{2}\right)$. On admet que f est linéaire. Prouver que f est une projection et déterminez le sous-espace (base et équation) sur lequel on effectue la projection et celui (base et équation) parallèlement auquel elle s'effectue (caractérisation géométrique).

Exercice 2 Soit un entier $n \geqslant 1$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. Soit $f : E \to E$ définie par $f(P) = P - P(0)X$.

a. Montrer que f est un endomorphisme injectif de E.

b. En déduire que $\forall Q \in E,\ \exists! P \in E,\ P - XP(0) = Q$. Exprimer P en fonction de Q.

DEVOIR 05 NOM : PRÉNOM :

QCM Répondre dans le tableau ci-dessous au QCM : mettre une croix dans la case de la ligne i colonne j revient à déclarer la question $i.j$ vraie. Ne rien mettre revient à la déclarer fausse.

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1					
2					
3					
4					

Énoncé

Preuve

Exercice 1

Exercice 2

DEVOIR 05	NOM : COCO	PRÉNOM : SINUS

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1			X	X	
2	X	X	X		
3	X		X		
4	X	X	X		

1.1 Faux : $\dfrac{\ln(x)}{x^2-1} = \dfrac{\ln(1+(x-1))}{x-1} \times \dfrac{1}{1+x} \underset{1}{\sim} \dfrac{1}{2}$ **1.2** Faux : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$, par contre $\dfrac{\ln(x)}{x^2} \underset{+\infty}{=} O\Big(\dfrac{1}{x^{3/2}}\Big)$
1.3 Vrai : $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln(x) = 0$ **1.4** Vrai : $\ln(1+e^x) - x = \ln(1+e^{-x}) \underset{+\infty}{\sim} e^{-x} \underset{+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{x^2}\Big)$.
2.1 et **2.2** Vrais : si $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$, en notant $s = \mathrm{id}_E - 2p$ et $q = \mathrm{id}_E - p$, on a $s(y+z) = y + z - 2y = z - y$ et $q(y+z) = y + z - y = z$ **2.3** Vrai : $\mathrm{Ker}(\mathrm{id}_E - p) = \mathrm{Im}(p) = F$ **2.4** Faux : $x - p(x) \in G$.
3.1 Vrai : du cours **3.2** Faux : à l'envers, "une sous-famille d'une famille libre est libre" **3.3** Vrai : du cours **3.4** Faux : si $v_1 = \cdots = v_p$.
4.1 Vrai : cours **4.2** Vrai : $\mathrm{rg}(f) = \dim(E) \iff \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0$ par le théorème du rang **4.3** Vrai : f surjective donc $\mathrm{Im}(f) = F$ donc $n = \dim(E) = \dim(F) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = p + \dim(\mathrm{Ker}(f))$ **4.4** Faux : $f = 0$.

Énoncé On définit $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$. Soit aussi P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, c'est-à-dire aussi $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E)$. Alors on sait que P est inversible et que $A = PA'P^{-1}$.

Preuve Soit $(e_1, \cdots, e_{n-1})$ une base de H (il en existe car $\dim(H) = \dim(E) - 1 = n - 1$), comme $E = H \oplus D$, $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_{n-1}, e_n)$ est une base de E avec $e_n = e$. Si on avait $\varphi(e) = 0$, la forme linéaire φ s'annulerait en les $e_1, \cdots, e_{n-1}$ (car $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$) et en e_n par hypothèse donc elle s'annulerait sur $\mathcal{B}$ et serait nulle : non car $\mathrm{Ker}(0) = E \neq H$. Ainsi $\varphi(e) \neq 0$ et on pose $\lambda = \dfrac{\psi(e)}{\varphi(e)}$. La forme linéaire $\theta = \psi - \lambda\varphi$ s'annule par construction en tous les vecteurs de la base $\mathcal{B}$ car $\forall k \in [\![1; n-1]\!]$, $\theta(e_k) = 0 - \lambda.0 = 0$ car $H = \mathrm{Ker}(\psi) = \mathrm{Ker}(\psi)$ et $\theta(e_n) = \theta(e) = \psi(e) - \dfrac{\psi(e)}{\varphi(e)}\varphi(e) = 0$, elle est donc nulle en tout vecteur de E et on a $\psi = \lambda\varphi$.

Exercice 1 $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $f^2(x,y,z) = \Big(\dfrac{x-y-z-2y+x+y-z}{4}, y, \dfrac{-x+y+z-2y-x-y+z}{4}\Big)$ donc $f^2(x,y,z) = \big(\dfrac{x-y-z}{2}, y, \dfrac{-x-y+z}{2}\big) = f(x,y,z)$ donc f est un projecteur : la projection sur $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f)$. Or $f(x,y,z) = (0,0,0) \iff y = x - z = 0 \iff (x,y,z) = (x,0,x) = x(1,0,1)$. Ainsi $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(v_1)$ avec $v_1 = (1,0,1)$ donc $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$ et $\mathrm{Ker}(f)$ a pour équations : $x - z = y = 0$.
De plus, $(x,y,z) \in \mathrm{Im}(f) \iff f(x,y,z) = (x,y,z) \iff x + y + z = 0 \iff (x,y,z) = (x,y,-x,-y)$ donc $(x,y,z) \in \mathrm{Im}(f) \iff (x,y,z) = x(1,0,-1) + y(0,1,-1)$ ainsi $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(v_2, v_3)$ avec $v_2 = (1,0,-1)$ et $v_3 = (0,1,-1)$ et comme (v_2, v_3) est libre car v_2 et v_3 ne sont pas colinéaires, $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$ (on le savait déjà avec la formule du rang), (v_2, v_3) est une base de $\mathrm{Im}(f)$ qui a pour équation $x + y + z = 0$.

Exercice 2 **a.** Soit $(P,Q) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors f va clairement de E dans E car $n \geqslant 1$ et on calcule $f(\lambda P + Q) = \lambda P + Q - (\lambda P + Q)(0)X = \lambda P + Q - \lambda P(0)X - Q(0)X = \lambda(P - P(0)X) + (Q - Q(0)X) = \lambda f(P) + f(Q)$ donc f est linéaire. De plus, si $P \in \mathrm{Ker}(f)$, alors $P = P(X) = P(0)X$ (1) donc $P(0) = P(0).0 = 0$ et, en reportant cette valeur dans (1), on obtient $P = 0$. Ainsi $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ et f est injective.

b. Comme f est un endomorphisme injectif en dimension finie, on sait qu'alors f est un automorphisme de E donc f est surjectif ce qui montre que $\forall Q \in E$, $\exists! P \in E$, $Q = f(P) = P - P(0)X$.
Comme $Q(0) = P(0) - P(0)0 = P(0)$, on a donc $P = Q + Q(0)X$ donc $f^{-1} : Q \mapsto Q + Q(0)X$.