TD 05 : ALGÈBRE LINÉAIRE

PSI 1 2024-2025 **vendredi 04 octobre 2024**

5.1 *Mines PSI 2013* Adrien Le Graët

Soit E un $\mathbb{R}$-espace de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que f admet une droite ou un plan stable.

5.2 *Mines PSI 2014* Tanguy Cazalets

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall i \in [\![1;n]\!],\ |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$.

a. Montrer que A est inversible.

b. On suppose de plus que $\forall i \in [\![1;n]\!],\ a_{i,i} > 0$, montrer que $\det(A) > 0$.

5.3 *Mines PSI 2016* Antoine Badet I

Soit $a = (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ et $A = (A_0, \ldots, A_n) \in \mathbb{K}_n[X]^{n+1}$ avec $\forall k \in [\![0;n]\!],\ A_k = (X - a_k)^n$.

a. Montrer que : A est une base de $\mathbb{K}_n[X] \iff (a_0, \ldots, a_n)$ deux à deux distincts.

b. Donner le rang de A dans le cas général.

5.4 *École Navale PSI 2016* Hugo Tarlé II

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{i,j} = 1$ si $i < j - 1$ et $a_{i,j} = i + j$ sinon. Calculer $\det(A)$.

5.5 *Mines PSI 2017* Claire Raulin II

Soit deux entiers p et q dans $\mathbb{N}^*$ et deux matrices $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.
Montrer que $\det(I_q - AB) = \det(I_p - BA)$.

5.6 *Mines PSI 2021* Maxime Brachet II

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et u un endomorphisme de E tel qu'il existe un entier $m \in \mathbb{N}^*$ pour lequel $u^m = \mathrm{id}_E$. On pose $p = \dfrac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} u^k$.

a. Montrer que si $v \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur, $\mathrm{rang}(v) = \mathrm{Tr}\,(v)$. La réciproque est-elle vraie ?

b. Montrer que $p^2 = p$.

c. Prouver que $\dfrac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \mathrm{Tr}\,(u^k) = \dim(\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E))$.

d. Caractériser la projection p.

5.7 *CCINP PSI 2021* Thomas Boudaud II

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que $f^3 + f = 0$ et $f \neq 0$.

a. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ et que $\mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) \neq \{0\}$.

b. Soit un vecteur non nul $x \in \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$, montrer que $(x, f(x))$ est libre.

c. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

d. Montrer que $\{g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) \mid g \circ f = f \circ g\} = \mathrm{Vect}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}, f, f^2)$.

5.8 *ENS Cachan PSI 2023* Alban Dujardin III

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = -\mathrm{id}_E$.

a. Donner un exemple de tel endomorphisme u si $\dim(E) = 2$.

b. Montrer que u n'a aucune valeur propre réelle. Montrer que $\dim(E) = 2p$ est pair.

c. Montrer l'existence de $(e_1, \cdots, e_p) \in E^p$ telle que $\mathcal{B} = (e_1, u(e_1), \cdots, e_p, u(e_p))$ est une base de E.

5.9 *Mines PSI 2023* Jonathan Filocco I

a. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, A un sous-espace vectoriel de $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$. On suppose que $\displaystyle\bigcap_{\ell \in A} \mathrm{Ker}(\ell) = \{0_E\}$. Montrer que $A = E^*$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(f_1, \cdots, f_n)$ une famille de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que $(f_1, \cdots, f_n)$ est libre si et seulement s'il existe une famille $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ telle que la matrice $\big(f_i(x_j)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible.