TD 04 : ALGÈBRE LINÉAIRE

PSI 1 2024-2025 **vendredi 27 septembre 2024**

4.1 **a.** En notant u l'endomorphisme canoniquement associé à M, on cherche si u est un projecteur ou une symétrie, donc on calcule M^2 et on trouve aisément $M^2 = M$. Ainsi, $u^2 = u$ et u est un projecteur.
$I_3 - M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ est de rang 1 donc $F = \mathrm{Ker}(\mathrm{id} - u)$ est un plan d'après la formule du rang. En résolvant $MX = X$, on trouve que F est le plan d'équation $x + y + z = 0$. Comme on sait que $G = \mathrm{Ker}\, u$ est un supplémentaire de F, G est une droite et comme $(1, 1, -1) \in \mathrm{Ker}(u)$, on conclut que $G = \mathrm{Vect}((1, 1, -1))$.

b. Si $M = AB$, alors $\mathrm{Im}\,(M) \subset \mathrm{Im}\,(A)$ et donc $\mathrm{rang}\,(M) = 2 \leqslant \mathrm{rang}\,(A) \leqslant 2$ car pour une matrice $P \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a $\mathrm{rang}\,(P) \leqslant n$ et $\mathrm{rang}\,(P) \leqslant p$. On en déduit que $\mathrm{rang}\,(A) = 2$ et que, par inclusion et égalité des dimensions , $\mathrm{Im}\,(M) = \mathrm{Im}\,(A)$. Les colonnes de A sont donc des images par M. Autant prendre les plus simples, c'est-à-dire les colonnes de M. Il suffit donc de prendre $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (vérification simple). Ou alors $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (tout aussi simple).

c. Soit $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $M = AB$ (on vient de voir qu'il n'y avait pas unicité d'un tel couple (A, B)). Comme $M^2 = M$, $ABAB = AB$ qu'on peut aussi écrire $A(BA - I_2)B = 0$.
Notons $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ et $w \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ les applications linéaires canoniquement associées à A et B.
On a déjà vu que $\mathrm{rang}\,(M) = \mathrm{rang}\,(AB) \leqslant \mathrm{rang}\,(A) \leqslant 2$ donc $\mathrm{rang}\,(A) = \mathrm{rang}\,(v) = 2$ donc v est injective car son rang est égal à la dimension de son espace de départ. Or $v \circ (w \circ v - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}) \circ w = 0$, ainsi $(w \circ v - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}) \circ w = 0$ car $\{0\} \subset \mathrm{Im}\,((w \circ v - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}) \circ w) \subset \mathrm{Ker}(v) = \{0\}$. Mais on a aussi $\mathrm{rang}\,(M) = \mathrm{rang}\,(AB) \leqslant \mathrm{rang}\,(B) \leqslant 2$ d'où $\mathrm{rang}\,(B) = \mathrm{rang}\,(w) = 2$ donc w est surjective car son rang est égal à la dimension de son espace d'arrivée. Alors $(w \circ v - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}) \circ w = 0$ d'où $w \circ v - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2} = 0$ car $\mathrm{Im}\,(w) = \mathbb{R}^2 \subset \mathrm{Ker}(w \circ v - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}) \subset \mathbb{R}^2$. On conclut donc que $w \circ v = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ ce qui montre que $BA = I_2$.

4.2 **a.** Comme $f^2 = 0$, on a $\mathrm{Im}\,(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$ donc $\mathrm{rang}\,(f) = \dim(\mathrm{Im}\,(f)) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(f))$. Mais $f \neq 0$ donc $\mathrm{Im}\,(f) \neq \{0\}$ d'où $\mathrm{rang}\,(f) \geqslant 1$. D'après la formule du rang, $3 = \mathrm{rang}\,(f) + \dim(\mathrm{Ker}(f))$ donc forcément $\mathrm{rang}\,(f) = 1$ et $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$. Soit e_1 un vecteur directeur non nul de $\mathrm{Im}\,(f)$ qui est une droite. Par définition de l'image, il existe un vecteur e_3 tel que $e_1 = f(e_3)$. Comme $e_1 \neq 0_E$, forcément, $e_3 \neq 0_E$. Comme $e_1 \in \mathrm{Ker}(f)$ car $\mathrm{Im}\,(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$ et que $\mathrm{Ker}(f)$ est un plan, on peut compléter la famille libre (e_1) de $\mathrm{Ker}(f)$ en une base (e_1, e_2) de $\mathrm{Ker}(f)$ par le théorème de la base incomplète. Comme $f(e_3) = e_1 \neq 0_E$, $e_3 \notin \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ donc $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est aussi une famille libre de cardinal 3 donc c'est une base de E qui est de dimension 3. Par construction, $f(e_1) = f(e_2) = 0$ et $f(e_3) = e_1$ donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b. ($\Longleftarrow$) S'il existe $(g, h) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que $f = h \circ g$ et $g \circ h = 0$. Alors $f^2 = (h \circ g) \circ (h \circ g) = h \circ (g \circ h) \circ g = 0$.

($\Longrightarrow$) Supposons que $f^2=0$. Alors $\mathrm{Im}\,(f)\subset \mathrm{Ker}(f)$. Si g et h vérifient les conditions $f=h\circ g$ et $g\circ h=0$, on doit avoir $\mathrm{Im}\,(f)=\mathrm{Im}\,(h\circ g)\subset \mathrm{Im}\,(h)$, puis $\mathrm{Im}\,(h)\subset \mathrm{Ker}(g)$ car $h\circ g=0$ et enfin $\mathrm{Ker}(g)\subset \mathrm{Ker}(h\circ g)=\mathrm{Ker}(f)$. C'est-à-dire $\mathrm{Im}\,(f)\subset \mathrm{Im}\,(h)\subset \mathrm{Ker}(g)\subset \mathrm{Ker}(f)$. Soit S un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f)$.

Méthode 1 : quitte à choisir, parce que g et h ne sont pas uniques, on va imposer $\mathrm{Im}\,(f)=\mathrm{Im}\,(h)$ et $\mathrm{Ker}(g)=\mathrm{Ker}(f)$. Par exemple posons $h=f$ et g projection sur S parallèlement à $\mathrm{Ker}(f)$.

- Si $x\in S$, $g(x)=x$ donc $h(g(x))=h(x)=f(x)$ et $g(h(x))=0$ car $h(x)\in \mathrm{Im}\,(h)\subset \mathrm{Ker}(g)$.
- Si $x\in \mathrm{Ker}(f)$, $g(x)=0_E$ donc $h(g(x))=h(0_E)=0_E=f(x)$ et $g(h(x))=0$ car $h(x)=f(x)\in \mathrm{Im}\,(h)\subset \mathrm{Ker}(g)$.

Comme f et $h\circ g$ (resp. $g\circ h$ et 0) coïncident sur S et $\mathrm{Ker}(f)$ et que $E=S\oplus \mathrm{Ker}(f)$, on a $f=h\circ g$ et $g\circ h=0$.

Méthode 2 : comme f induit un isomorphisme entre S et $\mathrm{Im}\,(f)$ par le théorème du rang, si on prend une base $(e_1,\cdots,e_r)$ de S, alors $(f(e_1),\cdots,f(e_r))$ en est une de $\mathrm{Im}\,(f)$. On peut ensuite compléter cette dernière famille libre de $\mathrm{Im}\,(f)\subset \mathrm{Ker}(f)$ en une base $(f(e_1,\cdots,f(e_r),v_1,\cdots,v_p)$ de $\mathrm{Ker}(f)$ de sorte que, comme $E=\mathrm{Ker}(f)\oplus S$, la famille $\mathcal{B}=(f(e_1),\cdots,f(e_r),v_1,\cdots,v_p,e_1,\cdots,e_r)$ est une base de E (dite adaptée à la décomposition $E=\mathrm{Im}\,(f)\oplus S'\oplus S$ en posant $S'=\mathrm{Vect}(v_1,\cdots,v_p)$). Par construction de cette base, la matrice de f dans $\mathcal{B}$ s'écrit par blocs $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)=\begin{pmatrix}0_r & 0_{r,p} & I_r\\ 0_{p,r} & 0_p & 0_{p,r}\\ 0_r & 0_{r,p} & 0_r\end{pmatrix}$ qui ressemble fortement (mais par blocs), à la matrice $E_{1,3}$ de la question **a.**. On peut donc chercher g et h sous forme matricielle. Mais comme $E_{1,3}=E_{1,3}E_{3,3}$ et $E_{3,3}E_{1,3}=0$, par analogie, si h et g sont les endomorphismes de E dont les matrices dans la base $\mathcal{B}$ sont $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g)=\begin{pmatrix}0_r & 0_{r,p} & 0_r\\ 0_{p,r} & 0_p & 0_{p,r}\\ 0_r & 0_{r,p} & I_r\end{pmatrix}$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(h)=\begin{pmatrix}0_r & 0_{r,p} & I_r\\ 0_{p,r} & 0_p & 0_{p,r}\\ 0_r & 0_{r,p} & 0_r\end{pmatrix}$, on a bien, par produit par blocs, $f=h\circ g$ et $g\circ h=0$ ... et le choix effectué redonne $h=f$ et g la projection sur S parallèlement à $\mathrm{Ker}(f)$.

4.3 **a.** D'abord, u est clairement linéaire et $\dim(\mathbb{C}_n[X])=\dim(\mathbb{C}^{n+1})=n+1$. Soit $P\in \mathrm{Ker}(u)$, il vient alors $\forall k\in [\![0;n]\!],\ P(\omega^k)=0$ donc P possède $n+1$ racines (les $n+1$ éléments de $\mathbb{U}_{n+1}$) alors que $\deg(P)\leqslant n$. On en déduit que $P=0$. Ainsi u est injective donc u est un isomorphisme avec l'égalité des dimensions.

b. La matrice de u dans les bases canoniques $(1,X,\ldots,X^n)$ de $\mathbb{C}_n[X]$ et $(e_1,\ldots,e_{n+1})$ de $\mathbb{C}^{n+1}$ est par construction la matrice de VANDERMONDE $M=V(1,\omega,\ldots,\omega^n)$ définie par $M=(m_{i,j})_{0\leqslant i,j\leqslant n}\in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ avec $m_{i,j}=\omega^{ij}$. On retrouve le fait que u est un isomorphisme car $\det(M)=\prod\limits_{0\leqslant i<j\leqslant n}(\omega^j-\omega^i)\neq 0$ car les racines $(n+1)$-ièmes de l'unité forment $n+1$ complexes distincts.

c. Soit $P=\sum\limits_{i=0}^{n}a_iX^i$ et $k\in [\![0;n]\!]$. Ainsi, $\sum\limits_{m=0}^{n}P(\omega^m)\omega^{-km}=\sum\limits_{m=0}^{n}\sum\limits_{i=0}^{n}a_i\omega^{mi}\omega^{-km}=\sum\limits_{m=0}^{n}\sum\limits_{i=0}^{n}a_i\omega^{m(i-k)}$.
On peut inverser cette somme double et avoir $\sum\limits_{m=0}^{n}P(\omega^m)\omega^{-km}=\sum\limits_{i=0}^{n}\Big(\sum\limits_{m=0}^{n}\omega^{m(i-k)}\Big)a_i=(n+1)a_k$.
En effet, si $i\neq k$, on a $\omega^{i-k}\neq 1$ donc $\sum\limits_{m=0}^{n}\omega^{m(i-k)}=\dfrac{1-\omega^{(i-k)(n+1)}}{1-\omega^{i-k}}=0$ car $\omega^{n+1}=1$ et, si $i=k$, comme $\forall m\in [\![0;n]\!],\ \omega^{m(i-k)}=\omega^0=1$, on a $\sum\limits_{i=0}^{n}a_i\omega^{m(i-k)}=n+1$. Pour $P=\sum\limits_{i=0}^{n}a_iX^i\in E$, on a donc $P=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kX^k=\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n}\Big(\sum\limits_{m=0}^{n}P(\omega^m)\omega^{-km}\Big)X^k=u^{-1}(u(P))=u^{-1}(P(1),P(\omega),\cdots,P(\omega^n))$. Ainsi, pour une famille $(z_0,\cdots,z_n)\in\mathbb{C}^n$, par surjectivité de u, on a $u^{-1}(z_0,\cdots,z_n)=\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n}\Big(\sum\limits_{m=0}^{n}z_m\omega^{-km}\Big)X^k$ ce qui se traduit par le fait que la matrice de u^{-1} dans les bases canoniques est $M^{-1}=\dfrac{1}{n+1}\big(\omega^{-ij}\big)_{0\leqslant i,j\leqslant n}$.

4.4 Analyse : soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commute avec toutes les matrices de rang 1 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, comme la matrice $E_{i,j}$ est de rang 1, il vient $ME_{i,j} = E_{i,j}M$. En posant le calcul, $ME_{i,j}$ est la matrice dont toutes les colonnes sont nulles sauf la j-ième qui contient la colonne C_i de la matrice M. De même, $E_{i,j}M$ est la matrice dont toutes les lignes sont nulles sauf la i-ième qui contient la ligne L_j de M.

• En identifiant les deux pour $i = j = k$, on déduit que tous les termes de la ligne et de la colonne k sont nuls sauf éventuellement le terme $m_{k,k}$. La matrice M est donc déjà diagonale.

• Prenons maintenant $i \neq j$, alors $ME_{i,j} = E_{i,j}M$ se résume à $m_{i,i}E_{i,j} = m_{j,j}E_{i,j}$ donc à $m_{i,i} = m_{j,j}$ car $E_{i,j} \neq 0$ et la matrice M est même scalaire : $M = \lambda I_n$ avec $\lambda = m_{1,1}$.

Synthèse : réciproquement, une matrice de la forme $M = \lambda I_n$ commute avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Ainsi, les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent avec toutes les matrices de rang 1 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont les matrices λI_n avec $\lambda \in \mathbb{C}$ qui sont dites matrices scalaires (elles représentent les homothéties de rapport λ).

4.5 **a.** Pour $p \in \mathbb{N}^*$, posons $\mathcal{P}(p) =$ "$\forall(\lambda_1,\cdots,\lambda_p) \in \mathbb{R}^p \setminus \{(0,\cdots,0\}, f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k x^{\beta_k}$ s'annule au plus $p-1$ fois pour tout $(\beta_1,\cdots,\beta_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $\beta_1,\cdots,\beta_p$ sont deux à deux distincts".

• Initialisation : comme $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \lambda_1 x^{\beta_1}$ ne s'annule jamais (donc au plus $1-1=0$ fois) sur $\mathbb{R}_+^*$ si $\lambda_1 \neq 0$ et $\beta_1 \in \mathbb{R}$ car $x^{\beta_1} = e^{\beta_1 \ln(x)}$, l'assertion $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

• Soit $p \in \mathbb{N}^*$, supposons $\mathcal{P}(p)$ vraie. Soit $(\lambda_1,\cdots,\lambda_p,\lambda_{p+1}) \in \mathbb{R}^{p+1} \setminus \{(0,\cdots,0\}$ et $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{p+1} \lambda_k x^{\beta_k}$ avec $\beta_1,\cdots,\beta_p,\beta_{p+1}$ deux à deux distincts. Traitons deux cas :

• Si $(\lambda_1,\cdots,\lambda_p) = (0,\cdots,0)$, alors $f : x \mapsto \lambda_{p+1}x^{\beta_{p+1}}$ ne s'annule jamais car $\lambda_{p+1} \neq 0$ et $0 \leqslant (p+1)-1$.

• Sinon, par l'absurde, supposons que f s'annule au moins $p+1$ fois sur $\mathbb{R}$. Soit la fonction $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x \mapsto x^{-\beta_{p+1}}f(x) = \sum\limits_{k=1}^{p+1} \lambda_k x^{\beta_k-\beta_{p+1}} = \lambda_{p+1} + \sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k x^{\beta_k-\beta_{p+1}}$ qui s'annule aussi au moins $p+1$ fois sur $\mathbb{R}_+^*$ par hypothèse, disons en $z_1 < z_2 < \cdots < z_p < z_{p+1}$. Comme g est dérivable, avec Rolle, g' s'annule au moins p fois sur $\mathbb{R}$ puisque $\forall k \in [\![1;p]\!]$, $\exists z'_k \in]z_k;z_{k+1}[$ tel que $g'(z'_k) = 0$. Or $g'(x) = \sum\limits_{k=1}^{p} (\beta_k - \beta_{p+1})\lambda_k x^{\beta_k-\beta_{p+1}-1}$. Comme $(\lambda_1,\cdots,\lambda_p) \neq (0,\cdots,0)$, comme $\beta_1,\cdots,\beta_{p+1}$ sont distincts, $((\beta_1-\beta_{p+1})\lambda_1,\cdots,(\beta_p-\beta_{p+1})\lambda_p) \neq (0,\cdots,0)$ et $\beta_1-\beta_{p+1}-1,\cdots,\beta_p-\beta_{p+1}-1$ sont aussi deux à deux distincts. L'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}(p)$ s'applique à g' et on obtient une contradiction. On en déduit que f s'annule au plus $(p+1)-1$ fois sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ainsi, dans les deux cas, f s'annule au plus $(p+1)-1$ fois sur $\mathbb{R}$ et on a établi $\mathcal{P}(p+1)$ d'où l'hérédité !

Par principe de récurrence, $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(p)$ est vraie.

b. Méthode 1 : on sait que A est inversible si $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$, donc si le seul vecteur colonne X tel que $AX = 0$ est $X = 0$. Soit donc $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = 0$ avec $X^T = (\lambda_1 \ \cdots \ \lambda_p)$. En effectuant le produit matriciel, on trouve $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j t_i^{\alpha_j} = 0$. Si on suppose $(\lambda_1,\cdots,\lambda_n) \neq (0,\cdots,0)$, comme les $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ sont distincts, la question **a.** nous dit $f : x \mapsto \sum\limits_{j=1}^{p} \lambda_j x^{\alpha_j}$ s'annule au plus $n-1$ fois alors qu'elle s'annule en $t_1,\cdots,t_n$ distincts par hypothèse et on a une contradiction : ainsi $X = 0$. On a bien A inversible.

Méthode 2 : posons, pour tout $j \in [\![1;n]\!]$, la fonction $f_j : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ telle que $f_j(x) = x^{\alpha_j}$. Définissons aussi $\varphi : E \to \mathbb{R}^n$ par $\varphi(f) = (f(t_1), \cdots, f(t_n))$ où $E = \mathrm{Vect}(f_1, \cdots, f_n)$. $\mathcal{B} = (f_1, \cdots, f_n)$ est libre car si $f = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j = 0$ et qu'on suppose $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, \cdots, 0)\}$, on a une contradiction avec la question **a.** car f s'annule une infinité de fois. Ainsi, $\dim(E) = n$. De plus, si $f = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, alors f s'annule en $t_1, \cdots, t_n$ par hypothèse donc $f = 0$ toujours d'après la question **a.**.

L'application φ est donc injective, donc φ est un isomorphisme car $\dim(E) = \dim(\mathbb{R}^n) = n$ et on en déduit que $A = (f_j(t_i))_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = (t_i^{\alpha_j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}_0}(\varphi)$ est inversible (si $\mathcal{B}_0$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$).

4.6 **a.** Le triangle ABC est équilatéral direct si et seulement si $\left(AB = AC \text{ et } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}\right)$. Or, d'après le cours sur les complexes, $\dfrac{c-a}{b-a} = \dfrac{AC}{AB} e^{i(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}$. Ainsi, ABC est un triangle équilatéral direct si et seulement si l'on a $\dfrac{c-a}{b-a} = e^{\frac{i\pi}{3}} = -j^2 \iff (c-a) = -j^2(b-a) \iff c + j^2 b - (1+j^2)a = 0 \iff c + j^2 b + ja = 0$ car $1 + j + j^2 = 0$. De même, $(ABC$ est équilatéral indirect$) \iff \dfrac{c-a}{b-a} = e^{\frac{-i\pi}{3}} = -j \iff c + jb + j^2 a = 0$.

On a mis à part le cas où les trois points A, B, C sont confondus $(b = a)$: triangle ponctuel... mais équilatéral.

b. La matrice V_n possède $n-2$ lignes et n colonnes donc $\mathrm{rang}\,(V_n) \leqslant \mathrm{Min}(n-2, n) = n-2$. De plus, si on considère la matrice $V_n' \in \mathcal{M}_{n-2}(\mathbb{C})$ obtenue en ne gardant que les $n-2$ premières colonnes de V_n, alors $V_n' = (\omega_n^{i(j-1)})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n-2 \\ 1 \leqslant j \leqslant n-2}}$ est la matrice de VANDERMONDE associée aux $n-2$ complexes $\omega_n, \omega_n^2, \cdots, \omega_n^{n-2}$. Si $1 \leqslant p < q \leqslant n-2$, $0 < \dfrac{2q\pi}{n} - \dfrac{2p\pi}{n} = \dfrac{2(q-p)\pi}{n} \leqslant \dfrac{2(n-3)\pi}{n} < 2\pi$ donc $\dfrac{2q\pi}{n} \not\equiv \dfrac{2p\pi}{n}$ $[2\pi]$ ce qui prouve que $\omega_n^p = e^{\frac{2ip\pi}{n}} \neq e^{\frac{2iq\pi}{n}} = \omega_n^q$. Ainsi, ces $n-2$ complexes sont distincts deux à deux donc V_n' est inversible et son déterminant D' vaut $\prod_{1 \leqslant p < q \leqslant n-2} (\omega_n^q - \omega_n^p) \neq 0$ d'après le cours. Les $n-2$ premières colonnes de V_n forment donc une famille libre ce qui justifie que $\mathrm{rang}\,(V_n) \geqslant n-2$. Par conséquent, $\mathrm{rang}\,(V_n) = n-2$.

c. Pour $k \in [\![1; n-1]\!]$, comme $\omega_n^k \neq 1$, on a $\sum_{j=0}^{n-1} \omega_n^{jk} = \dfrac{(\omega_n^k)^n - 1}{\omega_n^k - 1} = 0$ car $(\omega_n^k)^n = (\omega_n^n)^k = 1^k = 1$.

d. D'après la formule du rang et le résultat de la question **b.**, comme $\mathrm{rang}\,(V_n) = n-2$, on en déduit que $n = \dim(\mathbb{C}^n) = \dim(\mathrm{Ker}(V_n)) + \mathrm{rang}\,(V_n)$ donc $\mathrm{Ker}(V_n)$ est un plan (de dimension 2). Soit $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $U^T = (1\ 1 \cdots\ 1)$ et $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $V^T = (1\ \omega_n \cdots \omega_n^{n-1})$.

• Comme $\forall i \in [\![1; n-2]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} \omega_n^{i(j-1)} \times 1 = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{ik} = 0$ d'après la question **c.** car $i \in [\![1; n-2]\!] \subset [\![1; n-1]\!]$ avec le changement d'indice $k = j-1$, on a $U \in \mathrm{Ker}(V_n)$.

• Comme $\forall i \in [\![1; n-2]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} \omega_n^{i(j-1)} \times \omega_n^{j-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{(i+1)k} = 0$ d'après **c.** car $i+1 \in [\![2; n-1]\!] \subset [\![1; n-1]\!]$ avec le même changement d'indice, on conclut que $V \in \mathrm{Ker}(V_n)$.

Comme (U, V) est une famille libre de vecteurs de $\mathrm{Ker}(V_n)$ qui est un plan, on a $\mathrm{Ker}(V_n) = \mathrm{Vect}(U, V)$.

e. $(\Longleftarrow)$ Si $A_1 \cdots A_n$ est un polygone régulier direct à n côtés, en notant Ω son centre d'affixe $m = \dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$, alors il existe un rayon $r \geqslant 0$ et un angle θ tel que $\forall p \in [\![1; n]\!]$, $a_p = m + re^{i\theta}\omega_n^{p-1}$ par définition et on trouve alors (en posant $j = p-1$), pour $k \in [\![1; n-2]\!]$:

$$a_1 + a_2\omega_n^k + \cdots + a_n\omega_n^{k(n-1)} = \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1}\omega_n^{jk} = m\sum_{j=0}^{n-1} \omega_n^{jk} + re^{i\theta}\sum_{j=0}^{n-1} \omega_n^{j(k+1)} = m \times 0 + re^{i\theta} \times 0 = 0$$

d'après la question **c.** puisque $(k, k+1) \in [\![1; n-1]\!]^2$.

($\Longrightarrow$) Réciproquement, $\forall k \in [\![1;n-2]\!]$, $a_1+a_2\omega_n^k+\cdots+a_n\omega_n^{k(n-1)}=0$, alors $(a_1,\cdots,a_n)\in \mathrm{Ker}(V_n)$ donc, d'après la question **d.**, il existe $(a,b)\in\mathbb{C}^2$ tel que $(a_1\cdots a_n)^T = aU^T+bV^T = a(1\cdots 1)+b(1\ \omega_n \cdots \omega_n^{n-1})$. En notant $b=re^{i\theta}$, on a donc $\forall k\in[\![1;n]\!]$, $a_k = a+re^{i\theta}\omega_n^{k-1}$ ce qui montre bien que $A_1\cdots A_n$ est un polygone régulier direct à n côtés (avec le cas particulier où $b=0$ et où tous ces points sont confondus).

Par double implication, pour $n\geqslant 3$ points $A_1,\ldots,A_n$ du plan d'affixes respectives $a_1,\ldots,a_n$: $A_1\cdots A_n$ est un polygone régulier direct à n côtés si et seulement si $\forall k\in[\![1;n-2]\!]$, $a_1+a_2\omega_n^k+\cdots+a_n\omega_n^{k(n-1)}=0$.

4.7 **a.** Par le binôme de Newton, $\forall j\in[\![0;n]\!]$, $(X+1)^j=\sum\limits_{i=0}^{j}\binom{j}{i}X^i$, la matrice A_n est la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_n=(1,\cdots,X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ de l'endomorphisme $f_n:\mathbb{R}_n[X]\to\mathbb{R}_n[X]$ défini par $f_n(P)=P(X+1)$ (clairement linéaire et allant de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$) . Si on définit $g_n:\mathbb{R}_n[X]\to\mathbb{R}_n[X]$ par $g_n(P)=P(X-1)$, alors $f_n\circ g_n=g_n\circ f_n=\mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]}$ donc f_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et $g_n=f_n^{-1}$. Par conséquent, $A_n^{-1}=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_n}(g_n)$ et, comme $\forall j\in[\![0;n]\!]$, $(X-1)^j=\sum\limits_{i=0}^{j}(-1)^{j-i}\binom{j}{i}X^i$, $A_n^{-1}=B_n=\left((-1)^{j-i}\binom{j}{i}\right)_{0\leqslant i,j\leqslant n}$.

b. Pour $p\in[\![0;n]\!]$, on note S_p l'ensemble de toutes les permutations de $[\![1;p]\!]$. On sait que $\mathrm{card}(S_p)=p!$. On partitionne (ou plutôt on partage) S_p selon le nombre de points fixes des permutations. Notons donc $S_{p,i}$ l'ensemble des permutations de S_p qui ont exactement i points fixes. Alors $S_p=\bigcup\limits_{i=0}^{p}S_{p,i}$ (réunion disjointe) avec $S_{p,p-1}=\emptyset$ car si une permutation de S_p a au moins $p-1$ points fixes, c'est forcément l'identité donc elle a en fait p points fixes. On a donc $\mathrm{card}(S_p)=p!=\sum\limits_{i=0}^{p}\mathrm{card}(S_{p,i})$. Pour dénombrer $S_{p,i}$, on choisit les i points fixes parmi les éléments de $[\![1;p]\!]$ ce qui fait $\binom{p}{i}$ choix ; ensuite on choisit une permutation des $p-i$ éléments restants sans point fixe, elles sont au nombre de d_{p-i} par définition (le nombre de dérangements, c'est le nom des permutations de $S_{p,0}$, ne dépend que du nombre d'éléments de l'ensemble qu'on "dérange"). On obtient donc $\mathrm{card}(S_{p,i})=\binom{p}{i}d_{p-i}$. Par conséquent, on a $p!=\sum\limits_{i=0}^{p}\binom{p}{i}d_{p-i}$ et le changement d'indice $k=p-i$ donne bien le résultat attendu, à savoir $p!=\sum\limits_{k=0}^{p}\binom{p}{k}d_k$ car $\binom{p}{p-k}=\binom{p}{k}$.

c. Les $n+1$ relations trouvées à la question précédente s'écrivent matriciellement $A_n^T\begin{pmatrix}d_0\\ \vdots\\ d_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0!\\ \vdots\\ n!\end{pmatrix}$.

d. Comme A_n est inversible et que $(A_n^T)^{-1}=(A_n^{-1})^T=B_n^T$, on a donc $\begin{pmatrix}d_0\\ \vdots\\ d_n\end{pmatrix}=B_n^T\begin{pmatrix}0!\\ \vdots\\ n!\end{pmatrix}$. On en déduit donc, en regardant la dernière ligne de ce produit, que $d_n=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k!=n!\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}$.

e. Comme la loi sur S_n est la loi uniforme par hypothèse ("au hasard"), on a $p_n=\frac{\mathrm{card}(S_{n,0})}{\mathrm{card}(S_n)}=\frac{d_n}{n!}$ donc $p_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}=\sum\limits_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j}{j!}$ en posant $j=n-k$. Classiquement, avec la fonction exponentielle écrite sous forme de série entière, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}p_n=\sum\limits_{j=0}^{+\infty}\frac{(-1)^j}{j!}=e^{-1}\sim 0,36$.

4.8 **a.** Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ telles que $A \neq 0$, B nilpotente et $AB = BA$. On sait d'après le cours que $\text{Im}\,(AB) \subset \text{Im}\,(A)$. Si on avait $\text{rang}\,(AB) = \text{rang}\,(A)$, par inclusion et égalité des dimensions, on aurait $\text{Im}\,(AB) = \text{Im}\,(A)$. Comme $A \neq 0$, il existe $X_1 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $AX_1 \neq 0 \in \text{Im}\,(A)$. On a donc $AX_1 \in \text{Im}\,(AB)$ d'où l'existence de X_2 tel que $AX_1 = ABX_2 = BAX_2$ car $AB = BA$. De même, comme $AX_2 \in \text{Im}\,(A) = \text{Im}\,(AB)$ il existe X_3 tel que $AX_2 = ABX_3 = BAX_3$ donc $AX_1 = B^2AX_3$. Si $B^r = 0$, on continue comme ceci pour avoir l'existence de $X_{r+1} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $AX_1 = B^rAX_{r+1}$ ce qui fournit une contradiction car $B^rAX_{r+1} = 0$ alors que $AX_1 \neq 0$.

On a donc montré que si $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ vérifie $A \neq 0$, B nilpotente et $AB = BA$, alors $\text{rang}\,(AB) < \text{rang}\,(A)$.

b. Soit $A_1, \cdots, A_n$ des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent 2 à 2.

- Si $A_1 \cdots A_{n-1} = 0$, alors on a bien $A_1 \cdots A_n = 0$.
- Si $A_1 \cdots A_{n-1} \neq 0$, comme A_n est nilpotente et commute avec $A_1 \cdots A_{n-1}$ par hypothèse, on a l'inégalité $\text{rang}\,(A_1 \cdots A_n) < \text{rang}\,(A_1 \cdots A_{n-1})$. Comme $A_1 \cdots A_{n-2} \neq 0$ car $A_1 \cdots A_{n-1} \neq 0$, que A_{n-1} commute avec $A_1 \cdots A_{n-2}$ et que A_{n-2} est nilpotente, on a encore $\text{rang}\,(A_1 \cdots A_{n-1}) < \text{rang}\,(A_1 \cdots A_{n-1})$. On continue ainsi de suite pour avoir $\text{rang}\,(A_1 \cdots A_n) < \text{rang}\,(A_1 \cdots A_{n-1}) < \cdots \text{rang}\,(A_1A_2) < \text{rang}\,(A_1)$. Mais comme A_1 est nilpotente, $\text{rang}\,(A_1) < n$ car A_1 est non inversible et on montre par une simple récurrence à partir des inégalités ci-dessus que $\forall k \in [\![0; n-1]\!]$, $\text{rang}\,(A_1 \cdots A_{n-k}) < k+1$. En prenant $k = 0$, on a donc $\text{rang}\,(A_1 \cdots A_n) < 1$ donc $\text{rang}\,(A_1 \cdots A_n) = 0$ et $A_1 \cdots A_n = 0$.

Ainsi, dans tous les cas, on a $A_1 \cdots A_n = 0$.

c. Soit $n = 2$ et posons $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E_{2,1}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{1,2}$. A_1 et A_2 sont nilpotentes. On a $A_1A_2 = E_{2,2}$ et $A_2A_1 = E_{1,1}$. Les matrices A_1 et A_2 ne commutent pas et $A_1A_2 \neq 0$.

On peut généraliser avec $n \geqslant 3$ en prenant $A_1 = E_{2,1}$, $A_2 = E_{2,3}, \cdots, A_n = E_{n,1}$ car $A_1 \cdots A_n = E_{1,1} \neq 0$ alors que toutes les matrices A_k sont nilpotentes.

4.9 **a.** On calcule $AM = \begin{pmatrix} m_{2,1} & \cdots & \cdots & m_{2,n+1} \\ \vdots & & & \vdots \\ m_{n+1,1} & \cdots & \cdots & m_{n+1,n+1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ et $MA = \begin{pmatrix} 0 & m_{1,1} & \cdots & m_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & m_{n+1,1} & \cdots & m_{n+1,n} \end{pmatrix}$ pour une matrice $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n+1} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$. Ainsi, pour $M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$, on a $AM = MA$ si et seulement si $m_{2,1} \cdots = m_{n+1,1} = m_{n+1,1} = \cdots = m_{n+1,n} = 0$ et $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![2;n+1]\!]$, $m_{i+1,j} = m_{i,j-1}$. Par conséquent, les matrices $M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telles que $AM = MA$ sont exactement celles de la forme

$$M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \cdots & \cdots & m_{1,n+1} \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & m_{1,2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & m_{1,1} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n+1} m_{1,k} \Big(\sum_{i=1}^{n+2-k} E_{i,i+k-1} \Big).$$

On en déduit que le commutant de A, c'est-à-dire $C(A) = \{M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}) \;\; AM = MA\}$ vérifie $C(A) = \text{Vect}\Big(\sum_{i=1}^{n+1} E_{i,i}, \cdots, E_{1,n+1} \Big)$ et, puisque la famille $\Big(\sum_{i=1}^{n+1} E_{i,i}, \cdots, E_{1,n+1} \Big)$ est clairement libre, on a $\dim(C(A)) = n+1$.

b. Analyse : soit $F \neq \{0\}$ un sous-espace de $\mathbb{R}_n[X]$ stable par D, notons $p = \dim(F)$ sa dimension. Comme $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ P^{(n+1)} = 0$, on a $D^{n+1} = 0$ donc D est nilpotent. A fortiori, D_F, l'endomorphisme induit par D dans F, est aussi nilpotent. Notons $r \geqslant 1$ l'indice de nilpotence de D_F, de sorte que $D_F^r = 0$ et $D_F^{r-1} \neq 0$. Prenons $P \in F$ tel que $D_F^{r-1}(P) \neq 0$, alors on montre classiquement que la famille $(P, D_F(P), \cdots, D^{r-1}(P))$ est libre dans F par stabilité de F par D. Par conséquent, le cardinal de cette famille est inférieur à la dimension de F, donc $r \leqslant p$. On a donc $D_F^p = 0$, c'est-à-dire que $\forall P \in F,\ D_F^p(P) = D^p(P) = P^{(p)} = 0$ donc $P \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$. Comme $F \subset \mathbb{R}_{p-1}[X]$ alors que $\dim(F) = \dim(\mathbb{R}_{p-1}[X]) = p$, on a $F = \mathbb{R}_{p-1}[X]$.

Synthèse : tous les sous-espaces $\{0\}$ et $\mathbb{R}_{p-1}[X]$ de $\mathbb{R}_n[X]$ pour $p \in [\![1; n+1]\!]$ sont stables par dérivation.

En conclusion, les sous-espaces stables de $\mathbb{R}_n[X]$ stables par D sont $\{0\}$ et tous les sous-espaces $\mathbb{R}_m[X]$ avec $m \in [\![0; n]\!]$: il y a donc $n+2$ tels sous-espaces.

c. Posons $\mathcal{B} = \left(1, X, \dfrac{X^2}{2}, \cdots, \dfrac{X^n}{n!}\right)$, cette famille est formée de polynômes de degrés échelonnés donc elle est libre. De plus, son cardinal est égal à la dimension $n+1$ de $\mathbb{R}_n[X]$ donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. On a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(D) = A$ car $\forall k \in [\![0; n-1]\!],\ \left(\dfrac{X^{k+1}}{(k+1)!}\right)' = \dfrac{X^k}{k!}$. Pour $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$, si on note $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, on a $D \circ f = f \circ D \iff AM = MA$. Ceci justifie que $\varphi : C(D) \to C(A)$ définie par $\varphi(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est bien définie et que c'est un isomorphisme car elle est clairement linéaire et injective, sa surjectivité découlant de l'équivalence $D \circ f = f \circ D \iff AM = MA$. Par conséquent, les commutants de l'endomorphisme D et de la matrice A étant isomorphismes, ils ont même dimension donc, d'après **a.**, $\dim(C(D)) = n+1$.

4.10 **a.** Comme $f^{n-1} \neq 0$, il existe $a \in E$ tel que $f^{n-1}(a) \neq 0_E$. Considérons la famille $\mathcal{B} = (a, f(a), \cdots, f^{n-1}(a))$. Soit $(\lambda_0, \cdots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\lambda_0 a + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(a) = 0_E$ (1). Supposons que $(\lambda_0, \cdots, \lambda_{n-1}) \neq (0, \cdots, 0)$. Il existe alors $k \in [\![0; n-1]\!]$ tel que $\lambda_k \neq 0$ et on peut poser $m = \mathrm{Min}\left(\{i \in [\![0; n-1]\!] \mid \lambda_i \neq 0\}\right) \in [\![0; n-1]\!]$. L'équation (1) s'écrit donc $\lambda_m f^m(a) + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(a) = 0_E$ (1) qu'on compose par f^{n-m-1} et, comme $f^n = \cdots = f^{2n-m-2} = 0$, pour qu'il ne reste que $\lambda_m f^{n-1}(a) = 0_E$. Mais ceci est impossible car $f^{n-1}(a) \neq 0_E$ et $\lambda_m \neq 0$. On conclut ce raisonnement par l'absurde, et $(\lambda_0, \cdots, \lambda_{n-1}) = (0, \cdots, 0)$, donc la famille $\mathcal{B}$ est libre. Comme $\mathcal{B}$ comporte n vecteurs et que $\dim(E) = n$, on en conclut que $\mathcal{B}$ est une base de E.

b. Comme $f(f^{n-1}(a)) = f^n(a) = 0_E$, on a $f^{n-1}(a) \in \mathrm{Ker}(f)$ donc $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0_E\}$ ce qui garantit que f n'est pas injective donc pas bijective.

c. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à M. Alors $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$ donc, d'après **a.**, il existe un vecteur $a \in \mathbb{R}^3$ tel que $\mathcal{B} = (a, f(a), f^2(a))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Soit P la matrice de passage entre la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et la base $\mathcal{B}$, alors $M = PTP^{-1}$ en notant $T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. Or, comme $f(f^2(a)) = f^3(a) = 0_{\mathbb{R}^3}$, on a $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc M est semblable à T.

d. Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, posons alors $B = P^{-1}BP$ de sorte que $A = PBP^{-1}$, alors on a l'équivalence $AM = MA \iff PBP^{-1}PTP^{-1} = PTP^{-1}PBP^{-1} \iff BT = TB$. En écrivant B avec ses coefficients, c'est-à-dire en posant $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant 3}$, on calcule aisément $BT = \begin{pmatrix} b_{1,2} & b_{1,3} & 0 \\ b_{2,2} & b_{2,3} & 0 \\ b_{3,2} & b_{3,3} & 0 \end{pmatrix}$ et $TB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \end{pmatrix}$, ce qui donne $BT = TB \iff (b_{1,2} = b_{1,3} = b_{2,3} = 0$ et $b_{1,1} = b_{2,2} = b_{3,3}$ et $b_{2,1} = b_{3,2})$.

Ainsi, les matrices A qui commutent avec M sont exactement les matrices $A = P\begin{pmatrix} b_{1,1} & 0 & 0 \\ b_{2,1} & b_{1,1} & 0 \\ b_{3,1} & b_{2,1} & b_{1,1} \end{pmatrix}$, c'est-à-dire les matrices de la forme $A = P(b_{1,1}I_3 + b_{2,1}T + b_{3,1}T^2)P^{-1} = b_{1,1}I_3 + b_{2,1}M + b_{3,1}M^2 = Q(M)$ avec $Q = b_{1,1} + b_{2,1}X + b_{3,1}X^2 \in \mathbb{R}_2[X]$. Réciproquement, tout polynôme en M commute avec M d'après le cours. On vient de montrer que le commutant $C(M)$ de M est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (c'est classique, c'est même une sous-algèbre de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$) et que $C(M) = \mathrm{Vect}(I_3, M, M^2)$ est de dimension 3.