DEVOIR MAISON 2 : CENTRALE 1 PSI 2011

PSI 1 2024/2025 **pour le jeudi 19 septembre 2024**

PARTIE 1 : LA FONCTION GAMMA

1.1 La fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $]0;+\infty[$. De plus $t^{x-1}e^{-t} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-x}}$ donc $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0;1] \iff 1-x<1 \iff x>0$ par comparaison aux intégrales de RIEMANN. Enfin, $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{x+1}e^{-t}=0$ donc $t^{x-1}e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $[1;+\infty[$ pour tout x.

On en déduit que $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0;+\infty[\iff x>0$.

1.2 Si $x>0$, alors $x+1>0$ donc $\Gamma(x+1)=\displaystyle\int_0^{+\infty} t^x e^{-t}dt$ existe d'après la question précédente. Les fonctions $t\mapsto t^x$ et $t\mapsto -e^{-t}$ sont de classe C^1 sur $]0;+\infty[$; de plus $\lim\limits_{t\to 0} t^x(-e^{-t})=0$ car $x>0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} t^x(e^{-t})=0$ par croissances comparées donc on peut effectuer une intégration par parties, ce qui donne la relation $\Gamma(x+1)=\Big[-t^xe^{-t}\Big]_0^{+\infty}-\displaystyle\int_0^{+\infty} -xt^{x-1}e^{-t}dt$, et enfin $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$.

1.3 Comme $\Gamma(1)=\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt=[-e^{-t}]_0^{+\infty}=1$, on a l'initialisation de la récurrence. De plus, si $\Gamma(n)=(n-1)!$ pour un entier $n\geqslant 1$, alors $\Gamma(n+1)=n\times(n-1)!=n!=((n+1)-1)!$ et on a vérifié l'hérédité.

Par principe de récurrence, $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \Gamma(n)=(n-1)!$.

PARTIE 2 : LA FORMULE DE STIRLING

2.1 Les fonctions $t\mapsto(t-k+1)(k-t)$ et $t\mapsto \dfrac{-1}{t}$ sont C^1 sur le segment $[k-1;k]$ (car $k\geqslant 2$) donc on obtient $\displaystyle\int_{k-1}^k \frac{(t-k+1)(k-t)}{t^2}dt=\left[-\frac{(t-k+1)(k-t)}{t}\right]_{k-1}^k+\int_{k-1}^k\frac{2k-1-2t}{t}dt=\int_{k-1}^k\frac{2k-1-2t}{t}dt$ par intégration par parties. On recommence, les fonctions $t\mapsto 2k-1-2t$ et $\ln$ sont de classe C^1 sur le segment $[k-1;k]$ (car $k\geqslant 2$) donc il vient $\displaystyle\int_{k-1}^k\frac{2k-1-2t}{t}dt=\Big[(2k-1-2t)\ln(t)\Big]_{k-1}^k+2\int_{k-1}^k\ln(t)dt$ par intégration par parties. On a bien la relation attendue, $\displaystyle\int_{k-1}^k\frac{(t-k+1)(k-t)}{t^2}dt=\ln(k)-\ln(k-1)-2u_k$.

2.2.1 Si $k\geqslant 2$ et $t\in[k-1;k]$, on $0\leqslant t-k+1\leqslant 1$ et $0\leqslant k-t\leqslant 1$ donc, par produit, $0\leqslant(t-k+1)(k-t)\leqslant 1$ et on obtient $0\leqslant\dfrac{(t-k+1)(k-t)}{t^2}\leqslant\dfrac{1}{t^2}$. Par croissance de l'intégrale, $0\leqslant w_k\leqslant\dfrac12\displaystyle\int_{k-1}^k\frac{dt}{t^2}=\frac12\left(\frac{1}{k-1}-\frac1k\right)$.

Comme la série télescopique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac1n\right)$ converge car la suite $\left(\dfrac1n\right)_{n\geqslant 1}$ converge, on en déduit que la série à termes positifs $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} w_n$ converge par le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs.

2.2.2 On a $u_k=\dfrac12\big(\ln(k)-\ln(k-1)\big)-w_k$ par définition de u_k et w_k et d'après la question 2.1 donc, après télescopage, il vient $\displaystyle\sum_{k=2}^n u_k=\frac12\sum_{k=2}^n\big(\ln(k)-\ln(k-1)\big)-\sum_{k=2}^n w_k=\frac12\ln(n)-\sum_{k=2}^n w_k$.

Avec CHASLES, les propriétés de $\ln$ et la définition de la factorielle, $\displaystyle\sum_{k=2}^n u_k=\sum_{k=2}^n\ln(k)-\sum_{k=2}^n\int_{k-1}^k\ln(t)dt$ donc $\displaystyle\sum_{k=2}^n u_k=\ln(n!)-\int_1^n\ln(t)dt=\ln(n!)-[t\ln(t)-t]_1^n=\ln(n!)-n\ln(n)+n-1$ et, en comparant les relations, $\ln(n!) - n\ln(n) + n - 1 = \frac{1}{2}\ln(n) - \sum_{k=2}^{n} w_k$. Comme $\sum_{n\geqslant 2} w_n$ converge, si $S = \sum_{k=2}^{+\infty} w_k$ est la somme de cette série, on a $\sum_{k=2}^{n} w_k \underset{n\to+\infty}{=} S + o(1)$ donc $\ln(n!) \underset{n\to+\infty}{=} n\ln(n) - n + \frac{1}{2}\ln(n) - a + o(1)$ avec $a = S - 1$.

2.3 Pour $k \geqslant 2$, $w_k - \frac{1}{12}\int_{k-1}^{k}\frac{dt}{t^2} = \int_{k-1}^{k}\frac{6(t-k+1)(k-t)-1}{12t^2}dt$. En posant $u = t - k + 1 = \psi_k(t)$ (on pourrait travailler avec les expressions initiales mais le calcul me paraît plus clair avec des intégrales entre 0 et 1), comme ψ_k est de classe C^1 de $[k-1;k]$ dans $[0;1]$, on a $w_k - \frac{1}{12}\int_{k-1}^{k}\frac{dt}{t^2} = \int_0^1 \frac{6u(1-u)-1}{12(u+k-1)^2}du$. Les fonctions $u \mapsto 3u^2 - 2u^3 - u$ et $u \mapsto \frac{1}{(u+k-1)^2}$ sont de classe C^1 sur $[0;1]$ donc, par intégration par parties, comme $3u^2 - 2u^3 - u$ s'annule en 0 et en 1, $w_k - \frac{1}{12}\int_{k-1}^{k}\frac{dt}{t^2} = \int_0^1 \frac{3u^2-2u^3-u}{6(u+k-1)^3}du$. Or $3u^2 - 2u^3 - u = u(1-u)(2u-1)$ donc $|3u^2 - 2u^3 - u| \leqslant 1 \times 1 \times 1 = 1$ et, par inégalité triangulaire sur les intégrales, $\left|w_k - \frac{1}{12}\int_{k-1}^{k}\frac{dt}{t^2}\right| \leqslant \int_0^1 \frac{du}{6(u+k-1)^3} = \int_{k-1}^{k}\frac{dt}{6t^3}$ en re-posant en retour $t = u + k - 1$.

2.4 Soit $n \geqslant 2$ et $p \geqslant n+1$, alors $\sum_{k=n+1}^{p}\left(w_k - \frac{1}{12}\int_{k-1}^{k}\frac{dt}{t^2}\right) = \sum_{k=n+1}^{p} w_k - \frac{1}{12}\int_n^p \frac{dt}{t^2} = \sum_{k=n+1}^{p} w_k + \frac{1}{12p} - \frac{1}{12n}$ par la relation de Chasleset par calcul. Par inégalité triangulaire, la question 2.3 et Chasles, on a donc $\left|\sum_{k=n+1}^{p} w_k + \frac{1}{12p} - \frac{1}{12n}\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{p}\int_{k-1}^{k}\frac{dt}{6t^3} = \int_n^p \frac{dt}{6t^3} = \frac{1}{12n^2} - \frac{1}{12p^2}$. Puis, en passant à la limite (elles existent) quand p tend vers $+\infty$ dans cette inégalité, $\left|S - W_n - \frac{1}{12n}\right| \leqslant \frac{1}{12n^2}$. Or, on a vu à la question 2.2 que $\ln(n!) - n\ln(n) + n - 1 = \frac{1}{2}\ln(n) - W_n$ et on vient de voir que $W_n \underset{n\to+\infty}{=} S - \frac{1}{12n} + O\left(\frac{1}{12n^2}\right)$ ce qui, en injectant, donne $\ln(n!) - n\ln(n) + n - 1 \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2}\ln(n) - S + \frac{1}{12n} + O\left(\frac{1}{12n^2}\right)$. Puisque $a = S - 1$, on trouve bien le développement asymptotique attendu, $\ln(n!) \underset{n\to+\infty}{=} n\ln(n) - n + \frac{1}{2}\ln(n) - a + \frac{1}{12n} + O\left(\frac{1}{12n^2}\right)$.

PARTIE 3 : L'IDENTITÉ D'EULER

3.1 La fonction $f_n : t \mapsto \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}$ est continue sur $]0;n]$ et $f_n(t) \underset{t\to0^+}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$ de sorte que, par comparaison aux intégrales de Riemann, f_n est intégrable sur $]0;n]$ pour $x > 0$. De même, la fonction $g_n : t \mapsto (1-t)^n t^{x-1}$ est continue sur $]0;1]$ et $g_n(t) \underset{t\to0^+}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$ donc, comme avant, g_n est intégrable sur $]0;1]$ si $x > 0$.

Par conséquent, les deux intégrales $I_n(x) = \int_0^n f_n(t)dt$ et $J_n(x) = \int_0^1 g_n(t)dt$ existent si $x > 0$.

3.2 La fonction $k : x \mapsto x - \ln(1+x)$ est de classe C^1 sur $]-1;+\infty[$ avec $k'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$ donc k est décroissante sur $]-1;0]$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$. Elle admet donc un minimum en 0 et, puisque $k(0) = 0$, k est positive donc $\ln(1+x) \leqslant x$ pour $x > -1$. On pouvait aussi utiliser la concavité de $\ln$, puisque $\forall x > -1,\ \ln''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$, et le graphe de $\ln$ est donc en dessous de ses tangentes, notamment en 1 !

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0;n[$, on a $e^x\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1} = \exp\left[x + (n-1)\ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)\right] \leqslant \exp\left[x + (n-1)\left(-\frac{x}{n}\right)\right]$ d'après ce qui précède et par croissance de l'exponentielle car $-\frac{x}{n} \in]-1;0]$. Ainsi $e^x\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1} \leqslant e^{x/n} \leqslant e$ car $x \leqslant n$. Cette inégalité est encore valable si $x = n$, d'où $e^x\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1} \leqslant e$ si $x \in [0;n]$. On prend $C = e$.

3.3 Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0;n[$ alors $\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = \exp\left[n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)\right] \leqslant \exp\left[n\left(-\frac{x}{n}\right)\right] \leqslant e^{-x}$ avec les mêmes arguments, ce qui donne l'inégalité de gauche (qui est aussi vérifiée pour $x = n$). Pour celle de droite, la fonction θ de l'énoncé est C^1 sur $[0;n]$ et $\theta'(x) = e^x\left[\left(1-\frac{x}{n}\right)^n - \left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-1}\right] + 2e\frac{x}{n}$ qu'on peut encore écrire $\theta'(x) = \frac{x}{n}\left[2e - e^x\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-1}\right]$. L'inégalité de la question 2 montre que $\forall x \in [0;n],\ \theta'(x) \geqslant \frac{ex}{n} \geqslant 0$ donc θ est croissante sur $[0;n]$ et, comme $\theta(0) = 0$, on obtient $\theta(x) \geqslant 0$ si $x \in [0;n]$. Ainsi, comme $e^{-x} \geqslant 0$, on a bien l'encadrement attendu, à savoir $0 \leqslant e^{-x} - \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \leqslant e\frac{x^2}{n}e^{-x}$ si $x \in [0;n]$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

3.4 Pour $x > 0$, on a $\Gamma(x) - I_n(x) = \int_0^n t^{x-1}\left[e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right]dt + \int_n^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ par Chasles et linéarité de l'intégrale. Prouvons alors que les deux termes tendent vers 0 quand n tend vers $+\infty$:

- Comme $\int_n^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ est le reste d'une intégrale convergente d'après 1, $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_n^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt = 0$.
- D'après la question précédente, $0 \leqslant \int_0^n t^{x-1}\left[e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right]dt \leqslant \frac{2e}{n}\int_0^n t^{x-1}t^2e^{-t}dt$. La fonction $t \mapsto t^{x+1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0;+\infty[$ car $x+1 > 0$ (déjà vu avant, définition de $\Gamma(x+2)$) donc on a $0 \leqslant \int_0^n t^{x-1}\left[e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right]dt \leqslant \frac{2e}{n}\int_0^{+\infty} t^{x+1}e^{-t}dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par encadrement, on obtient donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^n t^{x-1}\left[e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right]dt = 0$.

Par somme, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(\Gamma(x) - I_n(x)) = 0$. Ainsi, il vient bien $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n(x) = \Gamma(x)$ si $x > 0$.

3.5 Si $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, les fonctions $t \mapsto (1-t)^{n+1}$ et $t \mapsto \frac{t^x}{x}$ sont de classe C^1 sur $]0;1]$ et on a la limite $\lim\limits_{t\to0}(1-t)^{n+1}\frac{t^x}{x} = 0$ car $x > 0$ donc on a la relation $J_{n+1}(x) = \left[(1-t)^{n+1}\frac{t^x}{x}\right]_0^1 + \frac{n+1}{x}\int_0^1(1-t)^n t^x dt$ par intégration par parties, c'est-à-dire $J_{n+1}(x) = \frac{n+1}{x}J_n(x)$ pour $n \geqslant 0$ et $x > 0$.

3.6 Pour $n = 0$, on a $J_0(x) = \int_0^1 t^{x-1}dt = \left[\frac{t^x}{x}\right]_0^1 = \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$. Si on suppose $J_n(x) = n!\prod\limits_{k=0}^{n}(x+k)^{-1}$ pour un entier $n \geqslant 0$ et pour tout $x > 0$, alors on a $J_{n+1}(x) = \frac{n+1}{x}J_n(x) = (n+1)!\prod\limits_{k=0}^{n+1}(x+k)^{-1}$. Par principe de récurrence, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x > 0,\ J_n(x) = \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$.

3.7 On pose le changement de variable $u = \frac{t}{n}$ dans l'intégrale $I_n(x) = \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt$ ($t \mapsto \frac{t}{n}$ est une bijection strictement croissante de classe C^1 de $]0;n]$ sur $]0;1]$), et $I_n(x) = \int_0^1 (1-u)^n(nu)^{x-1}n du = n^x J_n(x)$. Par conséquent, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n(x) = \Gamma(x)$ d'après la question 4 et $I_n(x) = \frac{n^x \times n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$ d'après la question 6, on a bien $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^x \times n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$.

PARTIE 4 : UNE AUTRE IDENTITÉ D'EULER

4.1 Courbe à tracer.

4.2 Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n = \int_n^{n+1}\frac{u-n-1/2}{x+u}du = \int_n^{n+1}\frac{(x+u)-(x+n+1/2)}{x+u}du$ car $h(u) = u - n - \frac{1}{2}$ pour

$u \in [n; n+1[$. Ainsi, $a_n = 1 - (n + x + 1/2)\Big[\ln(x + u)\Big]_n^{n+1} = 1 - (n + x + 1/2)\ln\Big(1 + \dfrac{1}{n+x}\Big)$ ce qui donne par développements limités $a_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \Big((n+x) + \dfrac{1}{2}\Big)\Big(\dfrac{1}{n+x} - \dfrac{1}{2(n+x)^2} + O\Big(\dfrac{1}{(n+x)^3}\Big)\Big)$ et encore $a_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 - 1 + \dfrac{1}{2(n+x)} - \dfrac{1}{2(n+x)} + O\Big(\dfrac{1}{(n+x)^2}\Big)$ donc $a_n \underset{n\to+\infty}{=} O\Big(\dfrac{1}{(n+x)^2}\Big)$. D'après le théorème de comparaison et RIEMANN, $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ converge absolument donc converge. On peut noter $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n = S$.

4.3 La fonction $u \mapsto \dfrac{h(u)}{x+u}$ est continue par morceaux sur $[0; +\infty[$ (car $x > 0$), il s'agit donc de prouver l'existence de la limite de $H(y) = \displaystyle\int_0^y \dfrac{h(u)}{x+u}du$ quand y est un réel tendant vers $+\infty$. Soit $y \in \mathbb{R}_+$, par CHASLES, on a $H(y) = \displaystyle\int_0^{\lfloor y\rfloor} \dfrac{h(u)}{x+u} + \int_{\lfloor y\rfloor}^y \dfrac{h(u)du}{x+u} = \int_{\lfloor y\rfloor}^y \dfrac{h(u)du}{x+u} + \sum_{k=0}^{\lfloor y\rfloor - 1} a_k$. Comme h est bornée par $\dfrac{1}{2}$, on a $\Big|\displaystyle\int_{\lfloor y\rfloor}^y \dfrac{h(u)du}{x+u}\Big| \leqslant \dfrac{1}{2}\int_{\lfloor y\rfloor}^y \dfrac{du}{x+u} \leqslant \dfrac{1}{2(x+\lfloor y\rfloor)}$ car $x + u \geqslant x + \lfloor y\rfloor$ pour $u \in [\lfloor y\rfloor; y]$ et que $y - \lfloor y\rfloor \leqslant 1$. Comme $\lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{1}{2(x+\lfloor y\rfloor)} = 0$, par encadrement, $\lim\limits_{y\to+\infty} \displaystyle\int_{\lfloor y\rfloor}^y \dfrac{h(u)du}{x+u} = 0$. De plus, $\sum\limits_{k=0}^{\lfloor y\rfloor-1} a_k$ est la somme partielle d'ordre $\lfloor y\rfloor - 1$ de la série numérique de la question précédente. Comme $\lim\limits_{y\to+\infty}(\lfloor y\rfloor - 1) = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{y\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{\lfloor y\rfloor-1} a_k = S$. Par somme, $\lim\limits_{y\to+\infty} \displaystyle\int_0^y \dfrac{h(u)}{x+u}du = S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{h(u)}{x+u}du$ converge.

4.4 Les fonctions $t \mapsto t - (x + 1 + i)$ et $\ln$ sont de classe C^1 sur le segment $[x + i; x + i + 1]$ donc on a, par intégration par parties, $\displaystyle\int_{x+i}^{x+i+1} \ln(t)dt = \Big[(t - (x+i+1))\ln(t)\Big]_{x+i}^{x+i+1} - \int_{x+i}^{x+i+1} \dfrac{t - (x+i+1)}{t}dt$ puis en posant $t = u + x$ (facile à justifier), $\displaystyle\int_{x+i}^{x+i+1} \ln(t)dt = \ln(x+i) - \int_i^{i+1} \dfrac{u-1-i}{u+x}du$.

4.5 On a $\displaystyle\int_i^{i+1} \dfrac{u-i-1}{u+x}du = \int_i^{i+1} \dfrac{u - [u] - 1}{u+x}du = \int_i^{i+1} \dfrac{h(u)}{u+x}du - \dfrac{1}{2}\Big((\ln(x+i+1) - \ln(x+i)\Big)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, en sommant pour $i \in [\![0; n]\!]$, $\displaystyle\int_0^{n+1} \dfrac{h(u)}{u+x}du = \dfrac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}(\ln(x+i+1) - \ln(x+i)) + \sum_{i=0}^{n} \ln(x+i) - \int_x^{x+n+1} \ln(t)dt$ donc $\displaystyle\int_0^{n+1} \dfrac{h(u)}{u+x}du = \dfrac{1}{2}(\ln(x+n+1) - \ln(x)) + \sum_{i=0}^{n} \ln(x+i) - (x+n+1)\ln(x+n+1) + (n+1) + x\ln(x)$. Ainsi, $G_n(x) - \displaystyle\int_0^{n+1} \dfrac{h(u)}{u+x}du = \ln(n!) + (x+1)\ln(n) - \sum_{i=0}^{n} \ln(x+i+1)$ donc $F_n(x) = G_n(x) - \displaystyle\int_0^{n+1} \dfrac{h(u)}{u+x}du$.

4.6.1 $G_n(x) \underset{n\to+\infty}{=} n\ln(n) - n + \dfrac{1}{2}\ln(n) + \dfrac{1}{2}\ln(2\pi) + (x+1)\ln(n) - \Big(x + n + \dfrac{3}{2}\Big)\Big(\ln(n) + \dfrac{x+1}{n}\Big) + (n+1) + \Big(x + \dfrac{1}{2}\Big)\ln(x) + o(1)$ d'où, après calculs, la relation attendue $G_n(x) \underset{n\to+\infty}{=} \Big(x + \dfrac{1}{2}\Big)\ln(x) - x + \dfrac{1}{2}\ln(2\pi) + o(1)$.

4.6.2 Par continuité $\exp$, définition de $F_n(x)$ et la question 6 de la partie 3, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = \ln(\Gamma(x+1))$, d'où avec les questions 3 et 6.1 de cette partie, $\ln(\Gamma(x+1)) = \Big(x + \dfrac{1}{2}\Big)\ln(x) - x + \dfrac{1}{2}\ln(2\pi) - \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{h(u)}{u+x}du$.

4.7 On calcule $b_n = \displaystyle\int_n^{n+1} \Big|\dfrac{h(u)}{x+u}\Big| du = \int_n^{n+1/2} \dfrac{n + 1/2 - u}{x+u}du + \int_{n+1/2}^{n+1} \dfrac{u - n - 1/2}{x+u}du$ donc, après calculs, $b_n = (x + n + \frac{1}{2})\Big[\ln \dfrac{x+n+1/2}{x+n} - \ln \dfrac{x+n+1}{x+n+1/2}\Big] = (x + n + \frac{1}{2})\Big[2\ln\Big(1 + \dfrac{1}{2(x+n)}\Big) - \ln\Big(1 + \dfrac{1}{x+n}\Big)\Big]$. On en déduit que $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4(x+n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4n}$ donc la série à termes positifs $\sum\limits_{n\geqslant 0} b_n$ diverge. Cette fois, comme $\displaystyle\int_0^n \Big|\dfrac{h(u)}{x+u}\Big| du = \sum_{k=0}^{n-1} b_k$ tend vers $+\infty$ quand $n \to +\infty$, $u \mapsto \dfrac{h(u)}{x+u}$ n'est pas intégrable sur $[0; +\infty[$.