TD 05 : ALGÈBRE LINÉAIRE

PSI 1 2024-2025 **vendredi 04 octobre 2024**

5.1 Comme E est de dimension finie n, $\mathcal{L}(E)$ est aussi de dimension finie n^2. Ainsi, la famille $(\mathrm{id}_E, f, \cdots, f^{n^2})$ admettant n^2+1 endomorphismes, elle est forcément liée donc il existe $(q_0, \cdots, q_{n^2}) \in \mathbb{R}^{n^2+1}$ telle que $(q_0, \cdots, q_{n^2}) \neq (0, \cdots, 0)$ et $\sum\limits_{k=0}^{n^2} q_k f^k = 0$. Le polynôme $Q = \sum\limits_{k=0}^{n^2} q_k X^k$ est donc annulateur de f. Quitte à diviser par le coefficient dominant de Q, on peut supposer Q unitaire.
On décompose Q en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ (ceux de degré 1 et ceux de degré 2 avec un discriminant strictement négatif) : $Q = \prod\limits_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{m_k} \times \prod\limits_{k=1}^{s} (X^2 - a_k X + b_k)^{n_k}$ avec $r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{N}$, $\forall k \in [\![1;r]\!]$, $\alpha_k \in \mathbb{R}$ et $m_k \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in [\![1;s]\!]$, $(a_k, b_k) \in \mathbb{R}^2$ et $a_k^2 - 4b_k < 0$ et $n_k \in \mathbb{N}^*$.
Comme $Q(f) = 0$, on a $\prod\limits_{k=1}^{r} (f - \alpha_k \mathrm{id}_E)^{m_k} \circ \prod\limits_{k=1}^{s} (f^2 + a_k f + b_k \mathrm{id}_E)^{n_k} = 0$ (où les produits signifient ici des composées). Les $f - \alpha_k \mathrm{id}_E$ $(k \in [\![1;r]\!])$ et les $(f^2 + a_k f + b_k \mathrm{id}_E)$ $(k \in [\![1;s]\!])$ ne peuvent pas tous être des automorphismes car une composée d'automorphismes en est encore un et que l'endomorphisme nul n'est pas dans $GL(E)$ (qui est un groupe). Ainsi, on peut considérer deux cas (qui ne s'excluent pas l'un l'autre) :

- soit $r \geqslant 1$ et $\exists k \in [\![1;r]\!]$, $f - \alpha_k \mathrm{id}_E \notin GL(E)$. Alors $\mathrm{Ker}(f - \alpha_k \mathrm{id}_E) \neq \{0_E\}$ et il existe donc un vecteur x non nul de E tel que $f(x) = \alpha_k x$. La droite $D = \mathrm{Vect}(x)$ est alors clairement stable par f.
- soit $s \geqslant 1$ et $\exists k \in [\![1;s]\!]$, $f^2 + a_k f + b_k \mathrm{id}_E \notin GL(E)$. Alors $\mathrm{Ker}(f^2 + a_k f + b_k \mathrm{id}_E) \neq \{0_E\}$ et il existe donc un vecteur x non nul tel que $f^2(x) + a_k f(x) + b_k x = 0$. Posons $P = \mathrm{Vect}(x, f(x))$. Si on avait $f(x)$ et x colinéaires, on aurait $f(x) = \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ d'où $f^2(x) = \lambda^2 x$ puis $(\lambda^2 + a_k \lambda + b_k)x = 0_E$ qui donnerait $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ car $x \neq 0_E$. Ceci est incompatible avec $a_k^2 - 4b_k < 0$ puisque λ est réel. Ainsi P est bien un plan vectoriel. De plus, si $y = \alpha x + \beta f(x)$ est un vecteur quelconque de P, son image par f vérifie $f(y) = \alpha f^2(x) + \beta f(x) = -b_k \alpha x + (\beta - a_k \alpha) f(x) \in P$ donc le plan P est stable par f.

Si E un $\mathbb{R}$-espace de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$, il existe au moins une droite ou un plan de E stable par f.

5.2 **a.** On sait que A est inversible si et seulement si $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$ (un endomorphisme en dimension finie est injectif si et seulement s'il est bijectif). Par l'absurde, supposons qu'il existe $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $AX = 0$. Soit un entier $i \in [\![1;n]\!]$ tel que $|x_i| = ||X||_\infty = \underset{1 \leqslant k \leqslant n}{\mathrm{Max}} |x_k| > 0$. Dans la i-ième ligne de $AX = 0$, $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j = 0 \iff a_{i,i} x_i = -\sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{i,j} x_j$. Par inégalité triangulaire, $|a_{i,i}||x_i| \leqslant \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}||x_j| \leqslant \Big(\sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}| \Big) |x_i|$ qui devient, après division par $|x_i| > 0$, $|a_{i,i}| \leqslant \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|$ contredisant l'hypothèse de l'énoncé. On en déduit donc le seul vecteur colonne tel que $AX = 0$ est $X = 0$ d'où l'inversibilité de A.
b. L'idée est que si les coefficients diagonaux de A sont strictement positifs et A à diagonale strictement dominante, $A + xI_n$ l'est aussi $x \geqslant 0$ car $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $|a_{i,i} + x| = a_{i,i} + x \geqslant a_{i,i} > \sum\limits_{j \neq i} |a_{i,j}|$. Soit $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $P(x) = \det(xI_n + A) = \chi_{-A}(x)$.
On verra plus tard dans l'année que P est une fonction polynomiale, unitaire et de degré n.
Pour $x \geqslant 0$, comme $A + xI_n$ vérifie les hypothèses de **a.**, $A + xI_n$ est inversible donc $P(x) = \det(A + xI_n) \neq 0$.

Puisque P est continue et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$, P garde un signe constant sur $\mathbb{R}_+$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires, ce signe ne peut donc être que strictement positif car P est unitaire et de degré $n \geqslant 1$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = +\infty$. Par conséquent, comme $0 \in \mathbb{R}_+$, on a $P(0) = \det(A) > 0$.

5.3 **a.** Il est clair que si $(a_0, \dots, a_n)$ ne sont pas deux à deux distincts, alors la famille A contient deux fois le même vecteur, elle ne peut pas être libre. Réciproquement, si $(a_0, \dots, a_n)$ sont deux à deux distincts, considérons $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que $\sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k (X - a_k)^n = 0$. Alors en inversant les sommes doubles avec le binôme de Newton, on a $\sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k \Big(\sum\limits_{m=0}^{n} (-1)^m \binom{n}{m} a_k^m X^{n-m} \Big) = \sum\limits_{m=0}^{n} (-1)^m \binom{n}{m} \Big(\sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k a_k^m \Big) X^{n-m} = 0$. On obtient donc un système linéaire à $n+1$ équations $\sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k = \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k a_k = \cdots = \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k a_k^n$ et à $n+1$ inconnues $\lambda_0, \cdots, \lambda_n$ sans second membre dont la matrice associée est $M = \big(a_j^i\big)_{0 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$. On reconnaît une matrice de Vandermonde dont le déterminant vaut $\det(M) = \prod\limits_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i) \neq 0$ donc le système est de Cramer et ne possède comme unique solution que $\lambda_0 = \cdots = \lambda_n = 0$.

La famille A est donc libre et, comme elle contient $n+1$ vecteurs et que $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n+1$, A est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. On a bien l'équivalence : A est une base de $\mathbb{K}_n[X] \iff (a_0, \dots, a_n)$ deux à deux distincts.

b. En reprenant cet argument, le rang r de A est le nombre de termes distincts de la famille $(a_0, \dots, a_n)$ car en supposant (quitte à renuméroter) que les termes distincts sont $a_0, \dots, a_{r-1}$, on peut ne conserver que les équations $\sum\limits_{k=0}^{r-1} \lambda_k a_k^m$ pour $m \in [\![0; r-1]\!]$ et on conclut encore que $\sum\limits_{k=0}^{r-1} \lambda_k (X - a_k)^n = 0$ implique $\lambda_0 = \ldots = \lambda_{r-1} = 0$ donc la famille $(A_0, \dots, A_{r-1})$ est libre et les polynômes $A_r, \dots, A_n$ en font déjà partie.

5.4 Avec les opérations de Gauss (dans cet ordre) $C_1 \longleftarrow C_1 - C_2$, $C_2 \longleftarrow C_2 - C_3, \cdots, C_{n-1} \longleftarrow C_{n-1} - C_n$,

on obtient $$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & & & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 2n-1 \\ n+1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 2n-1 & 2n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 4 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 2n-4 & 1 \\ \vdots & & & \ddots & -1 & 2n-1 \\ -1 & \cdots & \cdots & \cdots & -1 & 2n \end{vmatrix}.$$

Ensuite, on effectue $L_n \longleftarrow L_n - L_{n-1}$, $L_{n-1} \longleftarrow L_{n-1} - L_{n-2}, \cdots, L_2 \longleftarrow L_2 - L_1$ pour avoir $\det(A)$ comme le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure et $\det(A) = \prod\limits_{k=1}^{n-1} (-(2k-1)) = \dfrac{(-1)^{n-1}(2n)!}{2^n\, n!}$.

5.5 <u>Méthode 1</u> : Le lien entre ces deux matrices est la matrice de $M = \begin{pmatrix} I_q & A \\ B & I_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{R})$.

Si on pose $U = \begin{pmatrix} I_q & 0 \\ -B & I_p \end{pmatrix}$, alors $MU = \begin{pmatrix} I_q - AB & A \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$ et $UM = \begin{pmatrix} I_q & A \\ 0 & I_p - BA \end{pmatrix}$ donc, en passant au déterminant, il vient $\det(M)\det(U) = \det(I_q - AB) = \det(I_p - BA) = \det(U)\det(M)$ car UM, MU, U sont triangulaires par blocs. Cette formule est appelé identité de Sylvester. Difficile à voir !

<u>Méthode 2</u> : Si on ne voit pas cette relation par blocs, comme A est de rang $r \leqslant \mathrm{Min}(p, q)$, A est équivalente à $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (par blocs) mais c'est hors-programme. Ainsi, $\exists Q \in GL_q(\mathbb{R})$, $\exists P \in GL_p(\mathbb{R})$, $A = QJ_rP^{-1}$. Posons alors $C = P^{-1}BQ$ de sorte que $B = PCQ^{-1}$. Alors on peut simplifier et factoriser les deux matrices

$I_q - AB = I_q - QJ_rP^{-1}PCQ{-1} = Q(I_q - J_rC)Q^{-1}$ et $I_p - BA = I_p - PCQ^{-1}QJ_rP^{-1} = P(I_p - CJ_r)P^{-1}$.

Par propriétés du déterminant, on a $\det(I_q - AB) = \det(I_q - J_rC)$ et $\det(I_p - BA) = \det(I_p - CJ_r)$.

Si $C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}$ par blocs avec $C_1 \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$, alors après calculs $I_q - J_rC = \begin{pmatrix} I_r - C_1 & -C_2 \\ 0 & I_{q-r} \end{pmatrix}$ et $I_p - CJ_r = \begin{pmatrix} I_r - C_1 & 0 \\ -C_3 & I_{p-r} \end{pmatrix}$. Comme ces matrices sont triangulaires par blocs, on a finalement l'égalité annoncée, $\det(I_q - AB) = \det(I_q - J_rC) = \det(I_r - C_1) = \det(I_p - CJ_r) = \det(I_p - BA)$.

5.6 **a.** Soit v un projecteur de E, il existe donc deux sous-espaces F et G de E tels que $E = F \oplus G$ et tel que $v = p_{F,G}$ est la projection sur F parallèlement à G. Si on prend une base $\mathcal{B} = (v_1, \cdots, v_r, v_{r+1}, \cdots, v_n)$ adaptée à cette décomposition (c'est-à-dire que $(v_1, \cdots, v_r)$ est une base de F et $(v_{r+1}, \cdots, v_n)$ une base de G), alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = A = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_r \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{Tr}\,(v) = \mathrm{Tr}\,(A) = r = \mathrm{rang}\,(v)$ car $\mathrm{Im}\,(v) = F$ et $\dim(F) = r$.

Bien sûr, la réciproque est fausse. En effet, si $v : (x, y) \mapsto (3x, -y)$, on a $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, $\mathrm{rang}\,(v) = 2$ et $\mathrm{Tr}\,(v) = 3 - 1 = 2$ alors que v n'est pas un projecteur car $v^2 : (x, y) \mapsto (9x, y)$ et $v^2 \neq v$.

b. $p^2 = \dfrac{1}{m^2}\Big(\sum\limits_{k=0}^{m-1} u^k\Big)^2 = \dfrac{1}{m^2}\Big(\sum\limits_{i=0}^{m-1} u^i\Big) \circ \Big(\sum\limits_{j=0}^{m-1} u^j\Big)$ donc $p^2 = \dfrac{1}{m^2} \sum\limits_{0 \leqslant i,j \leqslant m-1} u^{i+j}$. Or $u^{i+j} = u^k$ si $k \equiv i + j\ [m]$ car $u^m = \mathrm{id}_E$. Pour $k \in [\![0; m-1]\!]$, il existe m couples $(i, j) \in [\![0; m-1]\!]^2$ tels que $u^{i+j} = u^m$:

- Si $k = 0$, ces m couples sont tous les couples $(i, m - i)$ avec $i \in [\![1; m-1]\!]$ et le couple $(0, 0)$.
- Si $k = 1$, ce sont les couples $(i, m + 1 - i)$ avec $i \in [\![2; m-1]\!]$ et les couples $(0, 1)$ et $(1, 0)$.
- Si $k \in [\![2; m-1]\!]$, ce sont les couples $(i, m+k-i)$ avec $i \in [\![k+1; m-1]\!]$ et les $(i, k-i)$ avec $i \in [\![0; k]\!]$.

Ainsi, en regroupant les termes, on a $p^2 = \dfrac{1}{m^2} \sum\limits_{k=0}^{m-1} mu^k = \dfrac{1}{m} \sum\limits_{k=0}^{m-1} u^k = p$.

Plus simplement, on pouvait écrire $p^2 = \dfrac{1}{m} \sum\limits_{k=0}^{m-1} u^k \circ p$. Or $u^k \circ p = \dfrac{1}{m} \sum\limits_{i=0}^{m-1} u^{i+k}$ et la suite $(u^q)_{q \geqslant 0}$ est m-périodique car $u^m = \mathrm{id}_E$ donc $u^k \circ p = \dfrac{1}{m} \sum\limits_{i=0}^{m-1} u^i = p$ et on retrouve $p^2 = \dfrac{1}{m} \sum\limits_{k=0}^{m-1} p = p$.

c. Par linéarité de la trace, $\mathrm{Tr}\,(p) = \dfrac{1}{m} \sum\limits_{k=0}^{m-1} \mathrm{Tr}\,(u^k) = \mathrm{rang}\,(p)$ d'après la question **a.**. Or, on sait que $\mathrm{Im}\,(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$ car p est un projecteur. Ainsi, $\dfrac{1}{m} \sum\limits_{k=0}^{m-1} \mathrm{Tr}\,(u^k) = \dim(\mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E))$. Il semble qu'il faille établir que $\mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E) = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$.

- Si $x \in \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$, alors $u(x) = x$ donc, par une simple récurrence, on obtient $\forall k \in \mathbb{N},\ u^k(x) = x$ d'où $p(x) = \dfrac{1}{m} \sum\limits_{k=0}^{m-1} u^k(x) = \dfrac{1}{m} \sum\limits_{k=0}^{m-1} x = x$ et $x \in \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$.
- Si $x \in \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$, alors $p(x) = x$. Comme $u \circ p = p$ d'après **b.**, $u(x) = x$ donc $x \in \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$.

Par double inclusion, $\mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E) = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$ donc, avec (1), $\dfrac{1}{m} \sum\limits_{k=0}^{m-1} \mathrm{Tr}\,(u^k) = \dim(\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E))$.

d. On vient de voir que $\mathrm{Im}\,(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E) = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$. Si $x \in \mathrm{Im}\,(u - \mathrm{id}_E)$, alors il existe un vecteur $y \in E$ tel que $x = u(y) - y$ donc $p(x) = \dfrac{1}{m} \sum\limits_{k=0}^{m-1} u^k(u(y) - y)$ et, après télescopage, il ne reste que $p(x) = \dfrac{u^m(x) - x}{m} = 0_E$. On aurait aussi pu écrire que $p(x) = p(u(y) - y) = p \circ u(y) - p(y)$ et on sait d'après la question **b.** que $p \circ u^k = u^k \circ p = p$ (des polynômes en u commutent) pour tout k donc en particulier $p \circ u = p$ ce qui donne bien $p(x) = p(y) - p(y) = 0_E$. On a donc l'inclusion $\mathrm{Im}\,(u - \mathrm{id}_E) \subset \mathrm{Ker}(p)$.

Par la formule du rang, $\mathrm{dim}(E) = \mathrm{rang}\,(p) + \mathrm{dim}(\mathrm{Ker}(p)) = \mathrm{dim}(\mathrm{Im}\,(u - \mathrm{id}_E)) + \mathrm{dim}(\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E))$ si on l'applique à p et $u - \mathrm{id}_E$. Or, d'après **c.**, $\mathrm{Im}\,(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E) = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$ donc il ne reste que $\mathrm{dim}(\mathrm{Im}\,(u-\mathrm{id}_E)) = \mathrm{dim}(\mathrm{Ker}(p))$. Par inclusion et égalité des dimensions, on a donc $\mathrm{Im}\,(u-\mathrm{id}_E) = \mathrm{Ker}(p)$. Alors, p est la projection sur $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Im}\,(u - \mathrm{id}_E)$.

5.7 **a.** Méthode 1 : soit $x \in \mathbb{R}^3$, comme $f^3 + f = 0$, $f^3(x) + f(x) = 0$. Procédons par analyse/synthèse.

Analyse : si $x = y + z$ avec $y \in \mathrm{Ker}(f)$ et $z \in \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$, alors $f(y) = 0$ donc $f^2(y) = 0$ et $f^2(z) + z = 0$. Ainsi, $f^2(x) = f^2(y) + f^2(z) = -z$ d'où $y = x - z = x + f^2(x)$. Ceci montre déjà l'unicité d'une décomposition, donc le fait que la somme de $\mathrm{Ker}(f)$ et de $\mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ est directe.

Synthèse : réciproquement, si $y = x + f^2(x)$ et $z = -f^2(x)$, on a bien $y + z = x$, $y \in \mathrm{Ker}(f)$ car $f^3(x) + f(x) = 0$ et $z \in \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ car $f^4(x) + f^2(x) = f(f^3(x) + f(x)) = 0$. Ceci assure $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathbb{R}^3$.

On conclut donc que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$.

Méthode 2 : soit $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$, alors $f(x) = 0$ et $f^2(x) + x = 0$. Comme $f(x) = 0$, en composant par f, on a aussi $f^2(x) = f(0) = 0$ par linéarité de f donc $0 + x = 0$ d'où $x = 0$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \{0\}$. Comme $(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) \circ f = f^3 + f = 0$, on en déduit que $\mathrm{Im}\,(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ donc $\mathrm{rang}\,(f) \leqslant \mathrm{dim}(\mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}))$. Or, d'après la formule du rang, on a $\mathrm{dim}(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rang}\,(f) = 3$ donc $\mathrm{dim}(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{dim}(\mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) \geqslant 3 = \mathrm{dim}(\mathbb{R}^3)$. Comme on sait déjà que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ sont en somme directe, $\mathrm{dim}(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{dim}(\mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})) = \mathrm{dim}(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{dim}(\mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})) = 3$ donc $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$.

La première méthode a l'avantage de marcher même en dimension infinie.

Comme $\mathrm{Im}\,(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ et que $\mathrm{Im}\,(f) \neq \{0\}$ puisque $f \neq 0$ par hypothèse, on en déduit que $\mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) \neq \{0\}$. On pouvait aussi dire que si on avait $\mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \{0\}$, comme $f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ est un endomorphisme en dimension finie, on aurait $f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} \in GL(\mathbb{R}^3)$ donc $f^3 + f = f \circ (f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = 0$ impliquerait $f = 0$, ce qui contredit l'hypothèse. Par l'absurde, on a $\mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) \neq \{0\}$.

b. Soit $x \in \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ tel que $x \neq 0$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $ax + bf(x) = 0$ (1). On a aussi $af(x) + bf^2(x) = 0$ donc, puisque $f^2(x) + x = 0$, on a $af(x) - bx = 0$ (2). En effectuant $a(1) - b(2)$, on parvient à $(a^2 + b^2)x = 0$ donc $a^2 + b^2 = 0$ car $x \neq 0$. Ainsi, $a = b = 0$ car a et b sont réels donc $(x, f(x))$ est libre.

c. Si f était injective, $f \in GL(\mathbb{R}^3)$ et $f^3 + f = f \circ (f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = 0$ impliquerait $f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} = 0 = 0$ donc $f^2 = -\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ et, en passant au déterminant, on aurait $\det(f)^2 = (-1)^3 = -1$. NON ! Ainsi, $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0\}$ donc on peut prendre un vecteur non nul v_1 dans $\mathrm{Ker}(f)$. On a vu en question **a.** que $\mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) \neq \{0\}$ donc on peut prendre un vecteur non nul v_2 dans $\mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$. On sait d'après la question **b.** qu'en notant $v_3 = f(v_2)$ la famille (v_2, v_3) est libre. De plus, $\mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ est stable par f donc $v_3 \in \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$. Comme $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ sont en somme directe, $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est donc libre et, puisque $\mathrm{dim}(\mathbb{R}^3) = 3$, $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Par construction, $f(v_1) = 0$, $f(v_2) = v_3$ et $f(v_3) = f^2(v_2) = -v_2$ donc $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

d. Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ et $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{pmatrix}$, alors on a $g \circ f = f \circ g \Longleftrightarrow AB = BA$. Or, après calculs, $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -b_{3,1} & -b_{3,2} & -b_{3,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 0 & b_{1,3} & -b_{1,2} \\ 0 & b_{2,3} & -b_{2,2} \\ 0 & b_{3,3} & -b_{3,2} \end{pmatrix}$. On dispose donc de l'équivalence $AB = BA \iff (b_{1,2} = b_{1,3} = b_{2,1} = b_{3,1} = 0,\ b_{2,2} = b_{3,3},\ b_{2,3} = -b_{3,2})$. Les matrices B vérifiant $AB = BA$ sont donc de la forme $B = b_{1,1}I_3 + b_{3,2}A + (b_{1,1} - b_{2,2})A^2$ car $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ce qui montre que si g commute avec f, alors $g = b_{1,1}\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} + b_{3,2}f + (b_{1,1} - b_{2,2})f^2 \in \mathrm{Vect}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}, f, f^2)$. Comme les polynômes en f commutent avec f, on a l'autre inclusion $\mathrm{Vect}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}, f, f^2) \subset \{g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) \mid g \circ f = f \circ g\}$.

Par double inclusion, on a donc $\{g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) \mid g \circ f = f \circ g\} = \mathrm{Vect}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}, f, f^2)$.

On aurait pu, si $g \circ f = f \circ g$, dire que les deux sous-espaces $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ étaient stables par g donc la matrice $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$ est de la forme $B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & b_{2,2} & b_{2,3} \\ 0 & b_{3,2} & b_{3,3} \end{pmatrix}$. Or $f(v_2) = v_3$ donc $g(v_3) = g(f(v_2))$ devient $g(v_3) = f(g(v_2)) = f(b_{2,2}v_2 + b_{3,2}v_3) = -b_{3,2}v_2 + b_{2,2}v_3$ et on arrive à la même forme de B.

5.8 **a.** Soit $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ une base de E et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (dans $\mathbb{R}^2$ euclidien canonique avec $\mathcal{B}$ la base canonique, u serait la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$). Alors $A^2 = -I_2$ donc $u^2 = -\mathrm{id}_E$.

b. Par hypothèse, $P = X^2 + 1$ annule u et on sait d'après le cours que les valeurs propres de u sont des racines de P. Or les seules racines de P sont $\pm i$ dont aucune n'est réelle. Ainsi, u n'admet aucune valeur propre réelle. De plus, $\det(-\mathrm{id}_E) = (-1)^n = \det(u^2) = \det(u)^2 \geqslant 0$ ce qui impose $n = 2p$ pair.

c. Initialisation : soit $e_1 \neq 0_E \in E$ (e_1 existe car $\dim(E) \geqslant 1$) et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda e_1 + \mu u(e_1) = 0_E$ (1), alors en appliquant u, on obtient $\lambda u(e_1) - \mu e_1 = 0_E$ (2). En effectuant $(1) - \mu(2)$, il reste $(\lambda^2 + \mu^2)e_1 = 0_E$ ce qui, comme $e_1 \neq 0_E$, montre que $\lambda^2 + \mu^2 = 0$ donc que $\lambda = \mu = 0$. Ainsi, $(e_1, u(e_1))$ est libre.

Hérédité : soit un entier $k \in [\![1; p-1]\!]$ telle qu'il existe une famille libre $(e_1, u(e_1), \cdots, e_k, u(e_k))$ dans E. Comme $\dim(\mathrm{Vect}(e_1, u(e_1), \cdots, e_k, u(e_k))) = 2k < n$, il existe un vecteur non nul $e_{k+1} \in E$ tel que $e_{k+1} \notin \mathrm{Vect}(e_1, u(e_1), \cdots, e_k, u(e_k))$. Soit $(\lambda_1, \mu_1, \cdots, \lambda_k, \mu_k) \in \mathbb{R}^{2k}$ tel que $\sum_{i=1}^{k} (\lambda_i e_i + \mu_i u(e_i)) = 0_E$ (1). On applique u à (1) pour avoir $\sum_{i=1}^{k} (\lambda_i u(e_i) - \mu_i e_i) = 0_E$ (2). En effectuant $\lambda_k(1) - \mu_k(2)$ et il reste $(\lambda_k^2 + \mu_k^2)e_k + \sum_{i=1}^{k-1} (\lambda_k\lambda_i + \mu_k\mu_i)e_i + (\lambda_k\mu_i - \mu_k\lambda_i)u(e_i)) = 0_E$ donc, puisque $(e_1, u(e_1), \cdots, e_{k-1}, u(e_{k-1}), e_k)$ est libre, on a en particulier $\lambda_k^2 + \mu_k^2 = 0$ d'où $\lambda_k = \mu_k = 0$. (1) se résume alors à $\sum_{i=1}^{k-1} (\lambda_i e_i + \mu_i u(e_i)) = 0_E$ et on a $\lambda_1 = \mu_1 = \cdots = \lambda_{k-1} = \mu_{k-1} = 0$ car $(e_1, u(e_1), \cdots, e_{k-1}, u(e_{k-1}))$ est libre. On a donc montré que $\lambda_1 = \mu_1 = \cdots = \lambda_k = \mu_k = 0$ et $(e_1, u(e_1), \cdots, e_k, u(e_k))$ est libre.

Conclusion : par principe de récurrence, pour tout $k \in [\![1; p]\!]$, il existe des vecteurs $e_1, \cdots, e_k$ tels que la famille $(e_1, u(e_1), \cdots, e_k, u(e_k))$ est libre.

Pour $k = p$, il existe donc $e_1, \cdots, e_p$ tels que la famille $\mathcal{B} = (e_1, u(e_1), \cdots, e_p, u(e_p))$ est libre. Comme $\mathrm{card}(\mathcal{B}) = n$, $\mathcal{B}$ est une base de E et, par construction, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{diag}(A, \cdots, A)$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5.9 **a.** Soit $n = \dim(E)$ et A un sous-espace vectoriel de $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$. Comme on sait que $\dim(E^*) = \dim(E) = n$, A est aussi de dimension finie, notons $p = \dim(A) \leqslant n = \dim(E^*)$. Soit $(\ell_1, \cdots, \ell_p)$ une base de A et $\psi : E \to \mathbb{R}^p$ définie par $\forall x \in E,\ \psi(x) = (\ell_1(x), \cdots, \ell_p(x))$. L'application ψ est clairement linéaire. Soit $x \in \mathrm{Ker}(\psi)$, alors $\forall k \in [\![1;p]\!],\ \ell_k(x) = 0$. Soit $\ell \in A$, il existe alors $(\alpha_1, \cdots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $\ell = \sum\limits_{k=1}^{p} \alpha_k \ell_k$, ce qui montre que $\ell(x) = \sum\limits_{k=1}^{p} \alpha_k \ell_k(x) = 0$ donc $x \in \bigcap\limits_{\ell \in A} \mathrm{Ker}(\ell) = \{0_E\}$ donc $x = 0_E$. Ainsi, ψ est injective ce qui montre que $\dim(E) = n \leqslant p = \dim(\mathbb{R}^p)$.

On a donc $p = n$ donc, comme $\dim(A) = \dim(E^*)$ et $A \subset E^*$, on a comme attendu $A = E^*$.

b. Posons $E = \mathrm{Vect}(f_1, \cdots, f_n)$ de sorte que E est un sous-espace de dimension finie de $F = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Par définition, on a $\dim(E) = \mathrm{rang}\,(f_1, \cdots, f_n)$.

($\Longrightarrow$) Supposons $(f_1, \cdots, f_n)$ libre, alors $\dim(E) = n$. Soit $A = \mathrm{Vect}(\{\varphi_x \mid x \in \mathbb{R}\})$ le sous-espace de E^* engendré par les formes linéaires $\varphi_x : E \to \mathbb{R}$ définies par $\varphi_x(f) = f(x)$. Si $f \in E$ vérifie $f \in \bigcap\limits_{\ell \in A} \mathrm{Ker}(\ell)$, alors en particulier on a $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi_x(f) = f(x) = 0$ donc $f = 0$. Ainsi, $\bigcap\limits_{\ell \in A} \mathrm{Ker}(\ell) = \{0_E\}$ d'où $A = E^*$ d'après la question **a.**. Comme $\dim(E) = n$, on a aussi $\dim(E^*) = n$. Soit $\mathcal{B} = (\psi_1, \cdots, \psi_n)$ une base de E^*. Par définition, les ψ_k sont des combinaisons linéaires d'un nombre fini de φ_x et, comme il y a un nombre fini de ψ_k, on peut énumérer $\varphi_{y_1}, \cdots, \varphi_{y_p}$ toutes les formes linéaires dont se composent les formes linéaires de la base $\mathcal{B}$. Comme la famille $(\varphi_{y_1}, \cdots, \varphi_{y_p})$ engendre $\mathcal{B}$ qui elle-même engendre E^*, alors $\mathcal{F} = (\varphi_{y_1}, \cdots, \varphi_{y_p})$ est génératrice de E^*. Par le théorème de la base extraite, on peut extraire de $\mathcal{F}$ une famille $\mathcal{B}' = (\varphi_{x_1}, \cdots, \varphi_{x_n})$ qui est une base de E^* (de cardinal n car $\dim(E^*) = n$) avec $\{x_1, \cdots, x_n\} \subset \{y_1, \cdots, y_p\}$.

Considérons $\theta : E \to \mathbb{R}^n$ définie par $\theta(f) = (f(x_1), \cdots, f(x_n))$ de sorte que θ est clairement linéaire. Si $f \in \mathrm{Ker}(\theta)$, on a $f(x_1) = \cdots = f(x_n)$ donc $\varphi_{x_1}(f) = \cdots = \varphi_{x_n}(f) = 0$. Soit $\ell \in E^*$ qu'on écrit $\ell = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \varphi_{x_k}$, on a donc $\ell(f) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \varphi_{x_k}(f) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k) = 0$ donc $f \in \mathrm{Ker}(\ell)$. Par conséquent, $f \in \bigcap\limits_{\ell \in A} \mathrm{Ker}(\ell)$ donc $f = 0_E$ ce qui montre que $\mathrm{Ker}(\theta) = \{0_E\}$ donc que θ est injective. Mais comme $\dim(E) = \dim(\mathbb{R}^n) = n$, ceci montre que θ est un isomorphisme de E dans $\mathbb{R}^n$. Comme $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\theta) = \big(f_i(x_j)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ en notant $\mathcal{B}_0 = (f_1, \cdots, f_n)$ la base de E, la matrice A est inversible.

($\Longleftarrow$) Soit $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ telle que $A = \big(f_i(x_j)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible. Soit $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f_i = 0$. En appliquant ceci en les x_j, on a donc $\forall j \in [\![1;n]\!],\ \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x_j) = 0$ ce qui, en définissant $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ par $Y^T = (\lambda_1 \ \cdots \ \lambda_n)$, se traduit par $AY = 0$. Comme A est inversible, on a donc $Y = 0$ donc $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = (0, \cdots, 0)$ et $(f_1, \cdots, f_n)$ est libre.

Par double implication, on a bien montré que $(f_1, \cdots, f_n)$ est libre si et seulement s'il existe une famille $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ telle que la matrice $\big(f_i(x_j)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible.