TD 06 : SÉRIES NUMÉRIQUES

PSI 1 2024-2025 **vendredi 11 octobre 2024**

6.1 *Centrale PSI 2012* Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $b_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+1} = b_n + \frac{a_n}{b_n}$.

a. Justifier que si $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (dans $\mathbb{R}$) alors on a $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

b. Montrer que : $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\iff \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ converge.

6.2 *Mines PSI 2015* Térence Burcelin

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, étudier la convergence de $\sum\limits_{n\in A} \frac{1}{n^\alpha}$ où A est l'ensemble des entiers n dont l'écriture en base 10 ne contient pas le chiffre 5.

6.3 *Centrale Maths1 PSI 2016* Adrien Boudy

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive et décroissante. On suppose pour la premiere question que pour toute suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ qui tend vers 0, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n v_n$ converge.

a. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, puis que $\ell = 0$.

On suppose maintenant que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge.

b. Montrer qu'il existe une suite d'entiers positifs $(N_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall i \in \mathbb{N},\ \sum\limits_{k=N_i}^{N_{i+1}-1} u_k \geqslant 1$.

c. En déduire qu'il existe $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante et tendant vers 0 telle que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n v_n$ diverge.

d. Conclure.

6.4 *CCP PSI 2016* Alexis Iacono I

On définit les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ par $u_n = \frac{1}{3^n n!}\prod\limits_{k=1}^{n}(3k-2)$ et $v_n = \frac{1}{n^{3/4}}$.

a. Montrer qu'à partir d'un certain rang : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$.

b. En déduire que $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ diverge.

6.5 *Mines PSI 2021* Robin Gondeau I

On admet que $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$ où γ est une constante réelle.

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et, pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5} u_n$.

a. Montrer qu'il existe une suite convergente $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(u_n) = -\frac{3}{2}\ln(n) + w_n$.

b. En déduire la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$.

c. Montrer que $\forall n \geqslant 0,\ 2\sum\limits_{k=1}^{n+1} k u_k + 3\sum\limits_{k=1}^{n+1} u_k = 2\sum\limits_{k=0}^{n} k u_k + 2\sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.

d. En déduire la valeur de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.

6.6 *ENS Cachan PSI 2023* Raphaël Déniel

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles qu'il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n\geqslant N,\ u_n>0,\ v_n>0$.
Pour tout entier $n\geqslant N$, on pose $w_n=v_n-\dfrac{v_{n+1}u_{n+1}}{u_n}$.

a. On suppose que $\exists c\in\mathbb{R}_+^*,\ \forall n\geqslant N,\ w_n\geqslant c$ et que $\sum\limits_{n\geqslant N}\dfrac{1}{v_n}$ converge, montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0}u_n$ converge.

b. On suppose que $\forall n\geqslant N,\ w_n\leqslant 0$ et que $\sum\limits_{n\geqslant N}\dfrac{1}{v_n}$ diverge, montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0}u_n$ diverge.

c. On suppose que $\exists c\in\mathbb{R}_+^*,\ \forall n\geqslant N,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant 1-\dfrac{1+c}{n}$, montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0}u_n$ converge.

d. On suppose que $\forall n\geqslant N,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n}\geqslant 1-\dfrac{1}{n}$, montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0}u_n$ diverge.

e. Soit $A\in\mathbb{R}$, $s>1$ et $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ bornée tels que $\forall n\geqslant N,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n}=1-\dfrac{A}{n}+\dfrac{f(s)}{n^s}$. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0}u_n$ converge si et seulement si $A>1$.

f. Pour quels $\alpha>0$ la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\left(\dfrac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times 2n}\right)^{\alpha}$ converge ?

6.7 *Centrale Maths1 PSI 2023* Maddie Bisch

a. Existe-t-il une suite géométrique $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $g_{n+1}-g_n\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{\sqrt{g_n}}$?

b. Existe-t-il $(A,\alpha)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ tel qu'en posant $v_n=An^{\alpha}$, on ait $v_{n+1}-v_n\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{\sqrt{v_n}}$?

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=1$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=u_n+\dfrac{1}{\sqrt{u_n}}$.

Soit $\beta>0$ et pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, le réel $p_n=\left(\dfrac{1}{u_n}\right)^{\beta}-\left(\dfrac{1}{u_{n+1}}\right)^{\beta}$.

c. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0}p_n$ est une série convergente à termes positifs telle que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}p_n=1$.

d. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sqrt{n}\leqslant u_n\leqslant 2n$.

e. Trouver un réel m tel que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1}^m-u_n^m)=\lambda\neq 0\in\mathbb{R}$. En déduire avec Cesaro que $u_n\underset{+\infty}{\sim}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2/3}n^{\frac{2}{3}}$.

f. Déterminer les valeurs de $\beta>0$ pour lesquelles $\sum\limits_{n\geqslant 0}p_nu_n$ est convergente.

6.8 *Mines PSI 2023* Tom Graciet II

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $H_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$.

a. Déterminer le développement asymptotique de H_n à la précision $o(1)$.

b. En déduire la limite de $(H_{2n}-H_n)_{n\geqslant 1}$.

c. Retrouver la limite de $(H_{2n}-H_n)_{n\geqslant 1}$ avec une somme de Riemann.

d. Grâce au développement de H_n, calculer $S_1=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$, $S_2=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n(2n-1)}$ et $S_3=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n}k^2}$.